Departamento de Física—Facultad de Ciencias—U. de Chile
Segundo Semestre 2020

Profesor: Mario I. Molina **Ayudante**: Claudio Aravena

Física contemporánea I: Guía Cuántica

1. Un electron esta descrito por la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ C\ e^{-x}(1-e^{-x}) & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

   (a) Encuentre la constante de normalización C
   (b) Donde es la probabilidad de hallar al electrón maxima?
   (c) Calcule $< x >$ para este electrón
   (d) Halle la forma general del potencial $V(x)$ para este problema y grafique $V(x)$ cualitativamente para el caso de energía cero, $E = 0$.

2. Sea el estado cuántico de un oscilador armónico de frecuencia ω, dado por

$$\begin{aligned} \psi(x,t) &= (1/\sqrt{2})\psi_0(x)\exp(-iE_0t/\hbar)) + (1/\sqrt{3})\psi_1(x)\exp(-iE_1t/\hbar)) + \qquad (1) \\ &\quad (1/\sqrt{6})\psi_2(x)\exp(-iE_2t/\hbar)) \qquad (2) \end{aligned}$$

   donde $\psi_0(x), \psi_1(x)\ y\ \psi_2(x)$ son las autofunciones normalizadas del oscilador armónico, con energías E_0, E_1 y E_2 respectivamente. Encuentre el valor esperado de la energía.

3. Considere una partícula encerrada en un pozo infinito de ancho a:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < a \\ \infty & \text{si } x < 0 \text{ y } x > a \end{cases}$$

   Demuestre que se cumple:
   $\langle x \rangle = \frac{1}{2}a,\ \ \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)$. Muestre que para grandes valores de n, estos resultados cuánticos coinciden con los correspondientes resultados clásicos.

4. Un electrón de energía cinética 4 eV se encuentra bruscamente con una frontera donde su energía potencial decrece en 5 eV, con lo cual su energía cinética se incrementa a 9 eV. Encuentre la probabilidad de que el electrón sea reflejado en la frontera.

5. Calcule el coeficiente de transmission de una particula de masa m a través del potencial $V(x) = (\hbar^2/2m)\Omega[\delta(x)+\delta(x-L)]$, donde $\delta(x)$ es la función 'delta de Dirac" discutida en clases. Encuentre las energías para las cuales la partícula se transmite con probabilidad uno (resonancias).

6. Calcule el estado ligado y su energía para una partícula de masa m dentro del potencial atractivo
$$V(x) = -(\hbar^2/2m)\ \Omega\ \delta(x)$$
donde $\delta(x)$ es la "función" delta de Dirac.

7. Calcule la mínima profundidad V_0 en electrón volts, de un pozo cuadrado para contener 2 niveles de energía, si el ancho del pozo es $2a = 4.0 \times 10^{-13} cm$ y la partícula tiene una masa de $2.0 \times 10^9 eV/c^2$.

8. Considere una partícula de masa m sujeta al potencial
$$V(x) = \begin{cases} -V_0\ \sqrt{1-(x/R)^2} & \text{si } |x| < R \\ 0 & \text{si } |x| > R \end{cases}$$
Usando el método de integración numérica explicado en clases, encuentre el primer autovalor de energía E_1 y su correspondiente autofunción $\psi_1(x)$. Tome $\Delta x = 0.01\ R$, $2mV_0R^2/\hbar^2 = 10$, y obtenga una tabla con doscientos valores de $\{x, \psi_1(x)\}$, para $x = 0$ hasta $x = 2R$. Grafique la tabla de valores para $\psi_1(x)$ en ese intervalo. (Hint: Parta desde $x = 0$ y use $\psi_1(0) = 1, \psi_1'(x) = 0$. Para el correcto valor de E_1, se tendrá que $\psi(x) \to 0$ para x grande).

9. Calcule las energías y las autofunciones (normalizadas) para una partícula de masa m confinada a vivir en un anillo de radio R (Hint: Escriba la ecuación de Schrödinger en coordenadas polares).

10. Encuentre la energía de punto cero de un oscilador armónico suponiendo que es la mínima energía requerida por el principio de incerteza.

11. Para el problema del oscilador armónico, calcule el valor esperado de la energía potencial ($(1/2)Kx^2$), y de la energía cinética ($p_x^2/2m$) para el estado de menor energía. Compare con la energía total del nivel.

12. Para un oscilador armónico de masa m y frecuencia ω, halle en forma explícita la forma de la autofunción (normalizada) corespondiente a la autoenergía $(11/2)\hbar\omega$. Grafique la autofunción (Hint: Use los operadores de "subida").

13. Un oscilador armónico unidimensional de masa m, frequencia ω y **carga eléctrica** e es afectado por la aplicación de un campo eléctrico $\mathcal{E}$ en la dirección $+x$, de modo que la energía potencial es
$$V(x) = (1/2)m\omega^2x^2 - e\ \mathcal{E}x$$

(a) Demuestre que la ecuación de Schrödinger para este sistema puede ser resuelta *exactamente*. Encuentre la energía y la autofunción del estado fundamental.
(b) En base a lo anterior calcule en forma exacta el valor esperado del momento dipolar del oscilador, $\langle ex \rangle$, para un autoestado arbitrario.

14. Una partícula de masa m esta confinada a moverse dentro del potencial

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x < 0 \\ -V_0 & \text{si } 0 < x < a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

(a) Encuentre la ecuación para las energías de los estados ligados ($E < 0$).
(b) Encuentre el valor mínimo de V_0 que dará origen a un solo estado ligado.
(c) Encuentre la forma de la autofunción para un estado con energía $E > 0$.

15. Calcule las autofunciones y autoenergías para una partícula de masa m en el potencial:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{para } x < 0 \\ (1/2)kx^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

16. Considere la función $x\ \exp(-x^2)$. Considerándola como una autofunción $\psi(x)$, encuentre el correspondiente potencial del cual es autofunción, con autovalor $E = 1$. Grafique $V(x)$ y $\psi(x)$ (tome $\hbar^2/2m \equiv 1$).