Departamento de Física—Facultad de Ciencias—U. de Chile
Segundo Semestre 2020

Profesor: Mario I. Molina

Fisica contemporánea I: Primera guía

1. Quince partíiculas idénticas tienen diversas velocidades: una tiene una velocidad de 2.0 m/s, dos tienen velocidades de 3.0 m/s; tres tienen velocidades de 5.0 m/s; cuatro tienen velocidades de 7.0 m/s; tres tienen velocidades de 9.0 m/s y dos tienen velocidades de 12.0 m/s. Encuentre la velocidad promedio $< V >$, la velocidad cuadrática media $\sqrt{< V^2 >}$, y la velocidad más probable de estas partículas.

2. Para un gas ideal:
   a) Obtener la energía de traslación molecular media a partir de la distribución de Maxwell expresada como distribución de energías.
   b) Calcular la fracción de moléculas de un gas que tienen un valor de v_x^2 mayor que la velocidad cuadrática media $\langle v_x^2 \rangle$. Demuestre que esta fracción es independiente de la temperatura de los gases.

3. A partir de la función de distribucion de velocidades, deduzca la funcion de distribución de energías.

4. Considere la funcion $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ para $-1 < x < 1$, y cero afuera. Puede esta funcion llegar a ser una densidad de probabilidad? Justifique. Si lo es, calcule $\sqrt{< x^2 >}$.

5. Considere la funcion distribucion dada por

$$f(x) \propto \begin{cases} 2 & \text{si } -2 < x < -1 \text{ y } 1 < x < 2 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{fuera} \end{cases}$$

   (a) Normalice f(x) de modo que pueda representar a una distribucion de probabilidad.
   (b) Calcule $< x >$
   (c) Calcule $< x^2 >$ y $\Delta x \equiv \sqrt{< x^2 > - < x >^2}$.

6. En presencia de un potencial externo $U(\mathbf{r})$ la función distribución de un gas no es uniforme, sino que toma la forma

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = C\ e^{-\frac{1}{kT}(\frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}))}.$$

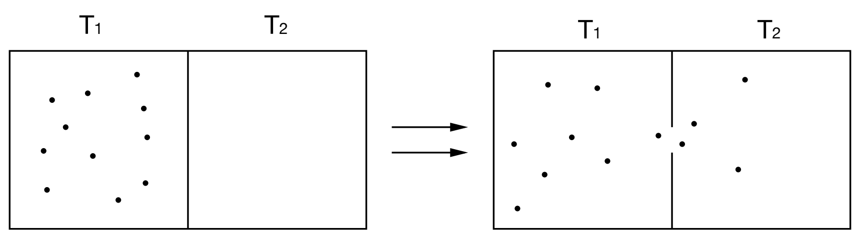
Considere una columna de gas bajo gravedad la cual posee una temperatura T independiente de la altura z.
(a) Muestre que la densidad como función de la altura esta dada por

$$n(z) = n(0)e^{-mgz/kT}.$$

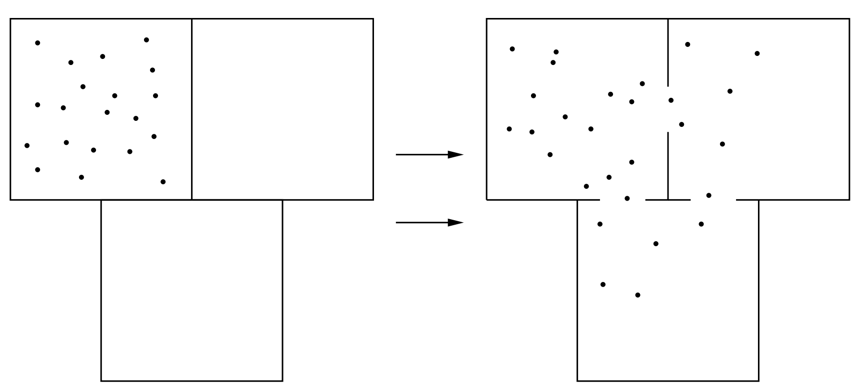
(b) Que fracción del gas H_2 que esta a nivel del mar y a temperatura de 300K puede escapar del campo gravitatorio de la Tierra?
(c) Por que existe todavia H_2 en la atmósfera a nivel del mar?

7. Suponga un recipiente cerrado de moléculas idénticas de masa m y velocidad v que ejercen una presión p sobre las paredes del recipiente. Si reemplazamos la mitad de ellas por moléculas de masa $m/2$ y velocidad $2v$, cómo varía la presión?

8. Un compartimento cerrado de volumen $2V$ se divide en dos compartimientos iguales mediante un delgado tabique. El compartimento izquierdo contiene inicialmente un gas ideal a la presión p_0, y sus paredes se hallan a temperatura T_1. El compartimento derecho se halla vacio inicialmente y sus paredes se hallan a temperatura T_2. En el instante $t = 0$ el tabique se perfora dejando un pequeño orificio de área A. Encuentre las presiones de cada lado en función del tiempo.



9. Resuelva el caso en que se tienen 3 compartimientos, cada uno de volumen V . Inicialmente el primer compartimiento tiene un numero de particulas N_0 los compartimientos adyacentes estan vacios. Si los tabiques que separan los compartimientos son perforados al mismo tiempo, vuelva a calcular las numero de particulas en cada uno de los compartimientos en funcion del tiempo. Asuma que los compartimentos estan a la misma temperatura, poseen el mismo volumen y que todas las aberturas son identicas.



10. Considere un gas ideal de moléculas de N_2 (Nitrogeno), sobre la superficie de la Tierra, y a temperatura ambiente. A esta temperatura, que fracción de las moléculas posee energía suficiente para escapar de la gravedad terrestre ?

11. Calcule la altura promedio a que se halla una molécula de oxígeno O_2 en la atmósfera terrestre, suponiendo una temperatura de 10^oC.

12. Considere las partículas dentro de una centrífuga de gases, un aparato usado para separar partículas de masa diferente, haciéndolas girar en una trayectoria circular de radio r a una velocidad angular ω. La fuerza sobre una partícula dada actúa hacia el centro de la órbita circular, y tiene una magnitud de $m\omega^2 r$. Demuestre que la densidad radial de partículas obedece
$$n(r) = n(0)\ \exp(m\omega^2 r^2/2K_B T)$$

13. Considere un oscilador armónico simple de frecuencia ω y amplitud máxima x_0.
(a) Halle la función densidad de probabilidad para el oscilador, es decir, la probabilidad de que el oscilador sea hallado en el intervalo entre x y $x + dx$, como función de x.
(b) Grafiquela en todo el rango permitido, y muestre que está normalizada a uno.
(c) Evalúe $< x >$, $\sqrt{< x^2 >}$ y la posición más probable.
(d) Cuál es la probabilidad de hallar el oscilador entre $x = 0$ y $x = x_0/2$? Compárela con la probabilidad de hallarlo entre $x = x_0/2$ y $x = x_0$. Cuál es mayor?

14. Considere un recipiente 1D conteniendo un gas de partículas no interactuantes. Suponga que la densidad de probabilidad de hallar una partícula en posición x entre las paredes $x = 0$ y $x = L$ es proporcional a $\sin(\pi x/L)^2$. Encuentre la distribución normalizada para la posición de las partículas, y halle la posición promedio $\langle x \rangle$.

15. Considere una función de distribución de rapideces dada por $f(v) = A\ v \exp(-Bv)$, donde $B \equiv \sqrt{m/K_B T}$ y $0 < v < \infty$.
(a) determine A de modo que $f(v)$ esté normalizada.
(b) Calcule $\langle v \rangle$, $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$, y la velocidad más probable.
(c) Qué porcentaje de las partículas posee rapidez mayor que $2\langle v \rangle$?

16. Considere un oscilador **NO** armónico de masa m y constante de resorte k, donde el potencial tiene la forma $U(x) = (1/2)k|x|$. Sea x_0 la amplitud máxima del oscilador.
(a) Halle la función distribucion (normalizada) para este oscilador, es decir, la probabilidad de que el oscilador sea hallado entre x y $x + dx$, como función de x.
(b) Calcule $\langle x^2 \rangle$.
(c) Calcule la probabilidad de hallar el oscilador en el intervalo $(x_0/2) < x < x_0$.

17. Deduzca la distribución de Maxwell-Boltzmann para un gas ideal bidimensional. Calcule la velocidad media $\langle v \rangle$, la velocidad más probable v_{mp} y $\sqrt{v^2}$, como funciones de la temperatura.

18. Dada la distribucion de Maxwell-Boltzmann, calcule $< 1/v >$ y $< 1/v^2 >$

19. La luz emitida por las molecules de un gas caliente experimentan un corrimiento Doppler debido a la agitacion termica que hace que unas moleculas se muevas hacia el observador,

y otras se alejan del observador. Estime el corrimiento Doppler $\Delta f/f_0$, asumiendo que la frecuencia en reposo es f_0, para atomos de fierro at una temperatura de 6000 K, y donde la velocidad media es

$$< v >= \pm\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} \tag{1}$$

Lleve a cabo las aproximaciones que sean razonables al usar la formula para el corrimiento de las frecuencias:

$$f = f_0\frac{\sqrt{1 \pm v/c}}{\sqrt{1 \mp v/c}}. \tag{2}$$

20. Considere un gas de fotones en equilibrio dentro de una caja cubica de volumen a^3. Calcule el numero de modos normales permitidos de frecuencia ω en el intervalo $d\omega$.

21. En muchos casos de interés la energía total de una partícula puede escribirse de la forma $E = \sum_{n=1}^{n} c_j q_j^2$, donde los c_j son constantes y los q_j son coordenadas de posició o momento. En tal caso , la distribución de Maxwell-Boltzmann tiene la forma $F_{MB} = A\ \exp(-\sum c_j q_j^2/kT)$. Encuentre el valor de la constante A. Luego, como aplicación de este resultado demuestre que la energía promedio por partícula es igual a $(1/2)kT \times n$. Este resultado se conoce como el *Teorema de equipartición de la energía.*

22. Suponga una nave espacial (en 3D) donde la presión interna es P_0 inicialmente. En un cierto instante se producen 2 roturas (en sitios alejados uno del otro) en el casco de la nave. Una de las roturas tiene el doble de area que la otra. Halle el comportamiento de la presión como función del tiempo.

23. Suponga ahora una nave espacial en 2D donde la presion interna es P0 inicialmente. Si en cierto instante se produce una pequeña rotura en el casco de la nave (debida a un micrometeorito), halle el comportamiento de la presion como funcion del tiempo.

24. A partir de la distribución de velocidades Maxwell-Boltzmann, halle la distribución de energías $G(E)$ donde $G(E)dE$ es la fracción de moléculas con energía cinética en el intervalo $[E, E + dE]$.

25. Un sistema posee niveles de energia no-degenerados con energia $E = (n + 1/2)\hbar\omega$, donde $\hbar\omega = 8.625 \times 10^{-5}$ev, y $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Calcule la probabilidad de que el sistema este en el estado $n = 10$ si esta en contacto con un baño termico a temperatura ambiente $(T = 300K)$. Cual sera la probabilidad en los casos limites de temperatura muy bajas y muy altas?