

0) Concepto de Completación de Q a R .

Aquí mostraremos dos formas de
completar $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

1º) Teorema de Completación

2º) Axioma, con la C. de Cauchy

1º) Preliminares

Def 1 ① Sea M un espacio, $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es
métrica o (M, d) es esp. métrico si:

$$(1) \quad d(x, y) \geq 0; \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$$

$$(2) \quad d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in M$$

$$(3) \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in M$$

B (2) Una sucesión $\{x_n\}$ en (M, d) es de Cauchy
 si: $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall m, n > N$

M



(3) El espacio métrico (M, d) es completo si:
 todos los suc. de Cauchy convergen
 en M.

(3)* $\hookrightarrow \exists R \in M \text{ t.q. } \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q.}$
 $d(x_n, R) < \varepsilon \quad \forall n > N$
 $\Rightarrow \{x_n\} \rightarrow R \quad (\text{converge})$

Teo (de la completación) Todo esp. métrico (M, d)
 puede ser completado. Esto es, existe $(\hat{M}, \hat{d})$

o primeiro método

(2) $(\widehat{M}, \widehat{d})$ es completo

(2) $\hat{M}$ contiene un subciclo $\hat{M}_0$ isométrico a M

(3) $\hat{M}_0$ es denso en $\hat{M}$ (gen cada pto en $\hat{M}$ es pto límite por $\hat{M}_0$)

Besprechung Dem

Erhalten wir also $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$

Existence de $(\hat{A}, \hat{d})$ Pour construire $\hat{A}$, prenons une collection $\{M_i\}$ de tous les successeurs

una colección $\{M\}$ de todos los sucesos
de coaching posibles.

luego, decimos que $\{a_n\}, \{b_n\} \in \mathcal{M}$ son relacionadas si $(a_n) \sim (b_n)$ si $d(a_n, b_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$

Nov. 1. 1902 Nov. 2. 1902 Nov. 3. 1902 Nov. 4. 1902 Nov. 5. 1902 Nov. 6. 1902 Nov. 7. 1902 Nov. 8. 1902 Nov. 9. 1902 Nov. 10. 1902 Nov. 11. 1902 Nov. 12. 1902 Nov. 13. 1902 Nov. 14. 1902 Nov. 15. 1902 Nov. 16. 1902 Nov. 17. 1902 Nov. 18. 1902 Nov. 19. 1902 Nov. 20. 1902 Nov. 21. 1902 Nov. 22. 1902 Nov. 23. 1902 Nov. 24. 1902 Nov. 25. 1902 Nov. 26. 1902 Nov. 27. 1902 Nov. 28. 1902 Nov. 29. 1902 Nov. 30. 1902

seguir... para... que $\sim$ es una
relación de equivalencia (refl., sim., trans).

$$\Rightarrow \hat{M} = M / \sim = \{ \text{conjunto de clases de equiva-} \\ \text{le sec. de equivalencia} \}$$

Para cualquier d , se define por $\hat{d}: \hat{M} \times \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\hat{d}(\{a_n\}, \{b_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) \quad (*)$$

y se prueba que $\hat{d}$ es métrica.

Tarea Probar que el límite (*) existe y
es independiente de los representantes
Existe $(\hat{M}, \hat{d})$

(1) $(\hat{M}, \hat{d})$ es completo (Cuerpo de Análisis) ✓

(2) $\hat{M}$ tiene un subconjunto $\hat{M}_0$ isométrico a M

Sea $i: M \rightarrow \hat{M}$ una inmersión
 $a \mapsto \{a\}$

$\hat{M}_0 = i(M)$ i = inmersión isométrica

$$d(a, b) = \hat{d}(i(a), i(b))$$

(3) $\overline{\hat{M}_0} = \hat{M}$ ✓

$$\overline{\hat{M}_0} = \overline{i(M)}$$

Consejo 0 La completación es única.
(Además isométrica)

obs Dada la métrica Euclídea (no es
o valor absoluto) $d: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$d(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$$

y como $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ es un ~~espacio~~ espacio de $(\mathbb{Q}, d)$

2º Queremos que $\forall a \in \mathbb{R}$ tiene una
expresión decimal

$$a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

$$k = m$$

Ej: $19,56 = 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + \dots + 0 \cdot 10^{-n} + \dots$

$m=1$ $a_k = 0 \quad \forall k > 2$

obs La representación decimal es finita
a no ser que $a_k = 0 \quad \forall k > n$ y $a_n \neq 0$

Ej $0,9 = 1$

$$0,9999 \dots = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + \dots$$

$$1 = 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + \dots$$

Cualquier expresion decimal
representa un real, pero no necesariamente
unica (los no p^o p^o $0, \overline{9}$)

Ex: Los siguientes dos ejemplos son
Secuencias de Candy con no acionados
que no convergen a racionales

$$\textcircled{1} \quad \left\{ \begin{array}{cccc} 0,1 & 0,1011 & 0,10110111 & 0,1011011101111 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \end{array} \right\}$$

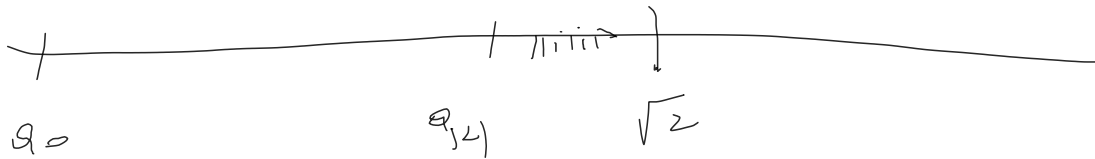
Teorema: La expansion decimal de un real x
es semi-periodica $\Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$.

$$\sqrt{2} = 1, \underbrace{4142135673095}_{\alpha, 9} \dots$$

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 1,4 \quad a_2 = 1,41 \quad \dots \quad a_{14} = 1,41421356237$$

$$H_2 E = \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{74 \text{ rows}}$$

$$\exists N = 14 \quad \text{f.} \quad |r_n - r_m| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N$$



$$b = \frac{h}{-k}$$

$$\underline{\text{Obs}} : \left\{ \begin{array}{l} a_n \\ \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} a_k 10^{-k} \right\}$$

$$\downarrow$$

$$a \in \mathbb{R}$$

Tarea

Nota La Expresión decimal puede generalizarse

para $g \geq 2$ por

$$a = \sum_{k=m}^{\infty} a_k g^{-k}, \quad a_k \in \{0, 1, \dots, g-1\}$$

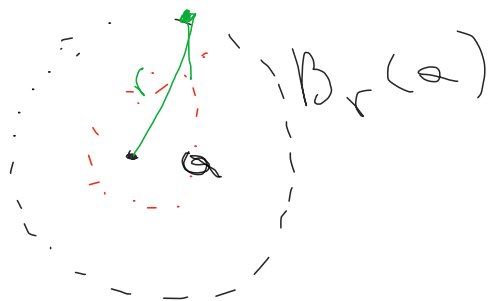
has

Las Dgls definiciones, pueden ser
definidas en esp. métrico

Def ① La bola abierta de radio $r \in \mathbb{R}^+$
centrada en $a \in (M, d)$ es el conjunto

$$B(a, r) = B_r(a) = \{x \in M \mid d(a, x) < r\}$$

M



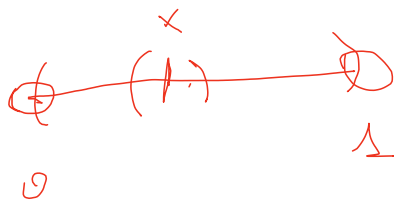
$\cdot \notin B_r(a)$

$\cdot \in B_r(a)$

(2) La bola cerrada de radio $r > 0$ centrada en $a \in M$ es

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in M / d(x, a) \leq r\}$$


(3) Un cto $A \subset M$ es abierto si: $\forall x \in A$ existe una bola $B(a, r) \subset M$ que contenga a x



(4) Un cto $A \subset M$ es cerrado si: M/A es abierto

Prop: Si M es esp. métrico completo y $X \subset M$,

entonces X es completo $\Leftrightarrow X$ es cerrado en $\mathbb{R}$
 Particularmente, $\overline{X}$ es la clausura de X .

Ej: $X = \{ \frac{1}{n} \mid n \text{ es entero} \}$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X$

$\Rightarrow \overline{X} = X \cup \{0\}$