
TOPOLOGÍA GENERAL & ANÁLISIS

Notas

Manuel Torres Valdebenito
Correo: manuel.torres@ug.uchile.cl

Versión en inglés del resumen de su trabajo importante.

Versión en otro idioma del resumen de su trabajo importante.

Agradecimientos.

Índice general

I	Teoría de conjuntos	11
1.	Teoría de conjuntos	13
1.1.	Axiomas de la teoría de conjuntos	13
1.2.	Construcción de los números naturales	22
1.3.	Axioma de elección de Zermelo	25
1.4.	Consecuencias del axioma de elección	29
1.4.1.	Equivalencias importantes al axioma de elección . . .	33
1.5.	Aplicaciones del Lema de Zorn	44
1.5.1.	Existencia de una función entre dos conjuntos	44
1.5.2.	Estructuras algebraicas	44
1.5.3.	Base de Hamel	46
1.5.4.	Propiedad de intersección finita, filtros y ultrafiltros .	49
2.	Ordinales y cardinales	55
2.1.	Ordinales	55
2.1.1.	Preorden	55
2.1.2.	Orden parcial y buen orden	56
2.1.3.	Isomorfismo entre buenos órdenes	57
2.1.4.	Construcción del buen orden de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$	60
2.2.	Cardinales	66
2.2.1.	Hipótesis del continuo (CH)	70
2.2.2.	Aritmética de cardinales	70
2.2.3.	Conjunto de Cantor	81
II	Topología general	85
3.	Espacios topológicos	87
3.1.	Definición de topología	87
3.1.1.	Topología en espacios métricos y normados	93
3.1.2.	Topología del subespacio	95
3.2.	Conjuntos abiertos y cerrados	95
3.3.	Base y subbase de una topología	96
3.3.1.	Base de una topología, definición y caracterizaciones	96
3.3.2.	Topología en el espacio producto	101
3.3.3.	Sub-base de una topología	104
3.3.4.	Topología en el espacio producto (continuación) . . .	105

3.4.	Espacios de Fréchet y Hausdorff	105
3.5.	Entornos y localidad	106
3.5.1.	Entornos y sistemas de entornos	106
3.5.2.	Bases de entornos	107
3.5.3.	Topologías y sistemas de entornos	108
3.6.	Axiomas de numerabilidad	108
3.7.	Interior, adherencia y frontera de un conjunto	110
4.	Continuidad de funciones y topología inducida	115
4.1.	Continuidad	115
4.2.	Topologías directas e inversas mediante funciones	117
4.2.1.	Topología cociente	119
4.3.	Topología inversa inducida por una familia de funciones . . .	121
4.3.1.	Topología inversa a partir de una familia de semi-normas $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$	121
4.3.2.	Topología producto	122
5.	Separación y convergencia	125
5.1.	Separación	125
5.1.1.	Axiomas de separación	125
5.1.2.	Teorema de Urysohn	129
5.1.3.	Teorema de extensión de Tietze	131
5.2.	Convergencia	131
5.2.1.	Conjuntos dirigidos y redes	131
5.2.2.	Caracterizaciones mediante redes	133
5.2.3.	Filtros	134
5.2.4.	Filtro como conjunto dirigido	137
6.	Invariantes topológicos	139
6.1.	Homeomorfismos	139
6.1.1.	Ejemplos de espacios topológicos homeomorfos	139
6.2.	Invariantes topológicos	140
7.	Compacidad y conexidad	141
7.1.	Compacidad	141
7.1.1.	Compacidad en subespacios	143
7.1.2.	Compacidad mediante operaciones de conjuntos . . .	144
7.1.3.	Compacidad y funciones continuas	144
7.1.4.	Teorema de Tychonoff	146
7.2.	Formas débiles de compacidad	149
7.2.1.	Compacidad numerable	149
7.2.2.	Espacios de Lindelöf	150
7.2.3.	Espacios σ -compactos	151
7.2.4.	Espacios secuencialmente compactos	151
7.3.	Compacidad local y compactificación	152
7.3.1.	Compacidad local	152
7.3.2.	Compactificación de Stone-Cech	153

7.4.	Conexidad	164
7.4.1.	Conexidad y funciones continuas	167
7.4.2.	Conexidad mediante operaciones de conjuntos	167
7.4.3.	Teorema de los productos conexos	167
7.4.4.	Componentes conexas	167
7.5.	Conexidad por caminos	168
7.6.	Conexidad local	168
8.	Espacios uniformes	171
8.1.	Uniformidades	171
8.2.	Semi métricas unifromes	173
8.3.	Compleitud	173
8.4.	Convergencia uniforme	173
9.	Homotopía	175
III	Espacios métricos	177
10.	Espacios métricos	179
10.1.	Continuidad en espacios métricos	180
10.2.	Espacios métricos completos	181
10.2.1.	Teorema del punto fijo de Banach	183
10.2.2.	Teorema de categoría de Baire	184
10.2.3.	Teorema de intersección de Cantor	184
10.2.4.	Principio variacional de Ekeland	184
10.3.	Espacios métricos compactos	184
11.	Espacios polacos	187
11.1.	Introducción	187
IV	Análisis funcional	189
12.	Primeros teoremas fuertes	191
12.1.	Teorema de Stone-Weierstrass	191
12.2.	Teorema de Arzela-Ascoli	194
12.2.1.	Espacio de las funciones de Hölder y la bola unitaria compacta	195
13.	Espacios vectoriales y operadores lineales	199
13.1.	Espacios vectoriales topológicos	199
13.1.1.	Vecindades del 0	200
13.1.2.	Propiedades de separación	202
13.1.3.	Conjuntos	203
13.1.4.	Metrizabilidad y normabilidad	204
13.1.5.	Espacios de dimensión finita	206
13.2.	Operadores lineales	207

13.2.1. Operadores lineales continuos	207
13.2.2. Dos ejemplos de operadores lineales continuos	211
13.2.3. Operadores compactos	215
13.2.4. Nota: Bra y Ket en la física moderna	220
14. Teoremas fuertes	221
14.1. Teorema de Baire	221
14.2. Principio de la cota uniforme	222
14.3. Teorema de Banach-Steinhaus	222
14.4. Teorema de la aplicación abierta	222
14.4.1. Aplicaciones de los teoremas de aplicación abierta y del grafo cerrado	224
14.5. Teorema de Hahn-Banach	225
14.5.1. Forma analítica	225
14.5.2. Forma geométrica	227
V Anexo	229
A. Funciones y relaciones	231
A.1. Regla de asignación	231
A.1.1. Conjunto imagen y pre-imagen	231
A.2. Relaciones de orden	232
A.2.1. Orden total	232
A.2.2. Un vistazo a la topología del orden	233
A.3. Relaciones de equivalencia	234
A.3.1. Clase de equivalencia	234
A.3.2. Espacio cociente	236
B. Propiedades topológicas del conjunto de Cantor	239
C. Topología en teoría de números	241
C.1. Progresiones aritméticas	241
C.2. Infinitud de los números primos	241

Introducción

Este apunte nació como un proyecto personal en el que me propuse comenzar a tomar notas en L^AT_EX durante las clases en las que asisto como estudiante, la asignatura que elegí para realizar esto por primera vez fue Análisis (MA3801) que corresponde a un curso del primer semestre de Ingeniería Civil Matemática en la facultad de ciencias físicas y matemáticas, luego seguí con el proyecto durante el curso de Topología General (CS4033) dictado como electivo de Licenciatura en Matemáticas en la facultad de ciencias.

Los temas a lo largo de este texto son:

1. Teoría de conjuntos (a nivel introductorio).
2. Topología general.
3. Espacios métricos.
4. Análisis funcional (de manera introductoria).

Algunos posibles enfoques que se podrían abordar es estudiar topología para luego seguir con el estudio de la topología algebraica, esto es seguir con el estudio del grupo fundamental, teoremas de separación en el plano, o bien estudiar complejos simpliciales, para esto se recomienda seguir los libros de *James R. Munkres*. Otro posible enfoque puede ser el de utilizar el conocimiento de topología general para estudiar análisis real y análisis funcional, que será la línea a seguir en este caso, con el objetivo de revisar por primera vez algunos teoremas clásicos del análisis funcional, tales como el *teorema de Hahn-Banach*, *teorema de la aplicación abierta* y el *teorema del grafo cerrado*, entre otros.

Manuel Torres V. (15/09/2020)

Parte I

Teoría de conjuntos

Capítulo 1

Teoría de conjuntos

1.1. Axiomas de la teoría de conjuntos

En el comienzo del siglo XX, Zermelo y Frankel (ZF) introdujeron una axiomática para definir y entender conjuntos. Esta axiomática fue "mejorada" por Von Neumann, Bernays y Godel (NBG), que será estudiada en este curso.

El problema fundamental de la axiomática de conjuntos es dar sentido a muchas cosas como al *conjunto de Russell*:

Considerando el conjunto R cuyos elementos son todos aquellos (y solo aquellos) conjuntos que no son miembros de sí mismos

$$R = \{x | x \notin R\}$$

Viendo que con dicho conjunto ocurre lo siguiente:

1. $x \in R \Rightarrow x \notin R$.
2. $x \notin R \Rightarrow x \in R$

¿ x pertenece a R ? Si x pertenece a R , entonces x no es miembro de R , y entonces $x \notin R$. Por otro lado, si $x \notin R$, entonces x pertenece a R . En cualquier caso, se tiene una contradicción pues ocurre que $p \leftrightarrow \neg p$. Por lo tanto, se concluye que $\{x | x \notin R\}$ no es un conjunto, por lo que hay que revisar la noción de conjunto.

NBG resolvieron este problema de la forma siguiente:

1. Asumieron la lógica proposicional.
 - a) Sean p, q proposiciones.
 - b) Se tienen los operadores lógicos $\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow\}$.
 - c) Cuantificadores como: $\{\exists, \forall\}$ y variables $p(x)$.
 - d) Y sólo Verdadero (V) y Falso (F).

2. Conceptos no definidos:

- a) Pertenencia: $\in$.
- b) Clase: $A, B, X, \dots$

3. Conceptos definidos:

- a) *Conjunto: Se define como la clase que pertenece a otra clase.*

También se asumirán que existen proposiciones del estilo $x \in A$: Se lee la clase x pertenece a la clase A .

Definición 1. Sean A, B, x clases, se definen:

1. $x \notin A \Leftrightarrow \sim (x \in A)$
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.
3. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.
4. A conjunto $\Leftrightarrow \exists B$ clase tq $A \in B$.

Notar que $A = B$ se escribe $\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Ejemplo. Sea $x \in A \wedge x = y \Rightarrow x \in B$

Ejemplo (Discusión). Se puede probar que si $x \in A \wedge x = y \Rightarrow y \in A$?

Axioma (Individualidad).

$$(x \in A) \wedge (x = y) \Rightarrow (y \in A)$$

Axioma (Formación de clases). $\forall p$ propiedad, $p = p(x)$ en que sólo aparecen cuantificadas variables de conjunto existe una clase cuyos miembros son solo aquellos que satisfacen la propiedad $A(p) = \{x | x \text{ es conjunto} \wedge p(x)\}$ es clase.

Ejemplo. A continuación se tienen dos clases propias (una clase propia es algo que no es conjunto pero es clase):

1. La clase universal:

$$U := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x = x\}$$

2. La clase de Russel:

$$R := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x \notin x\}$$

Spoiler: ¿Podrá ser que la clase universal y la clase de Russel son iguales?

Definición 2 (Clase vacía).

$$\emptyset := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x \neq x\}$$

Observación. Respecto a la clase vacía:

1. La propiedad $p \in \emptyset$ siempre es falsa.
2. El vacío es único (propuesto como ejercicio).

Axioma (Vacío). $\emptyset$ es conjunto, i.e., existen conjuntos.

Resumen. Hasta el momento, (x, y, A, B) son clases, luego se estudiaron los siguientes axiomas:

1. *Axioma de individualidad:* $x \in A \wedge x = y \Rightarrow y \in A$
2. *Axioma de creación de clases:* $\{x | x \text{ es conjunto} \wedge p(x)\}$ es clase.
3. *Axioma del vacío:* $\emptyset := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x \neq x\}$

Definición 3. Algunas clases de interés son:

1. Se llama clase de Russell a:

$$R := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x \notin x\}$$

2. Se llama clase universal a:

$$U := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x = x\}$$

Ejemplo (Básico). R es clase propia¹, pues no es conjunto.

Demostración. Suponiendo que R es un conjunto y $R \in R \Rightarrow R \notin R$, lo que lleva a una contradicción. ■

También se puede ver que si ahora $R \notin R \Rightarrow R \in R$, lo cual también es contradicción

Definición 4 (Álgebra de clases). Se definen:

1. $A \sqcup B := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge (x \in A \vee x \in B)\}$ (Si A, B son clases, la unión también lo es).
2. $A \sqcap B := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge (x \in A \wedge x \in B)\}$
3. $A^c := \{x | x \notin A \wedge x \text{ es conjunto}\}$
4. $A \setminus B := A \sqcap B^c$

¹Clase propia: Una clase que no es conjunto

Axioma (Emparejamiento). Si A, B son conjuntos diferentes, $\{x|x \text{ es conjunto} \wedge (x = A \vee x = B)\} := \{A, B\}$ es conjunto.

Definición 5 (Par ordenado). $(A, B) := \{A, \widehat{\{A, B\}}\}$

Definición 6 (Producto cartesiano de clases). Sea un producto cartesiano:

$$A \times B := \{x|x \text{ es conjunto} \wedge \exists y \in A, z \in B \text{ tq } x = (y, z)\}$$

Definición 7 (Relación). Una relación $\mathcal{R}$ en $A \times B$ es una subclase de $A \times B$. Denotamos $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$

Ejemplo. Algunas relaciones binarias son:

1. Para cualquier conjunto A , se denomina la diagonal de A de la siguiente forma:

$$\Delta := \{(a, a)|a \in A\} \subset A \times A$$

corresponde a una caracterización de la relación de igualdad.

2. Luego, para cualquier conjunto A , se tiene la relación de desigualdad como:

$$(A \times A) \setminus \Delta$$

3. La relación (de orden) $\leq$ en los números reales es:

$$\{(x, y)|x \leq y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

4. La relación de inclusión $\subset$ en $\mathcal{P}(X)$ es:

$$\{(A, B)|A \subset B \wedge A, B \in \mathcal{P}(X)\} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$$

5. La noción usual de función $f : X \rightarrow Y$ genera una relación

$$\{(x, f(x))|\forall x \in X \exists! f(x) \in Y\} \subseteq X \times Y$$

Particularizando la idea de relación definamos entonces lo que es una función:

Definición 8 (Función). Una función (denotada f) es una relación $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ para la cual $\forall x \in A \exists! y \in B : x\mathcal{R}y$ ($y=f(x)$).

Claramente una función es una subclase de $A \times B$ (usualmente se escribirá $f : A \rightarrow B$).

Comentario. En el anexo puede revisar resultados útiles que se espera que el lector haya estudiado a estas alturas. Entre ellos están las propiedades de la imagen y preimagen de f función, éstas serán de gran utilidad para el desarrollo de los temas venideros.

Ejemplo.

1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que $f(x) = 0$ si $x < 0$ y $f(x) = 1$ en caso contrario es una función, escribiendo el conjunto de la función

$$\{(x, f(x)) | f(x) = 0, x < 0 \text{ o bien } f(x) = 1, 0 \leq x\} \subseteq X \times Y$$

2. *Contraejemplo:* Sea $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} = \mathcal{R}$, luego $\mathcal{R}$ no es función, pues notemos que para $x = 0$, se tiene $y = 1, -1$ (y viceversa).

Definición 9 (Familias de conjuntos). Dado Λ conjunto, una familia de conjuntos indexada por Λ es una función $f : \Lambda \rightarrow U$ (U es la clase universal)

Notación.

$$A_\lambda := f(\lambda) \in U$$

$$f = \underbrace{\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}}$$

También se puede entender como una sucesión de conjuntos.

Definición 10 (Operaciones sobre conjuntos). Se definen las siguientes operaciones entre una cantidad arbitraria de conjuntos

1. $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge \exists \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}.$
2. $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{x | x \text{ es conjunto} \wedge \forall \lambda \in \Lambda, x \in A_\lambda\}$
3. $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda := \{f | f \text{ es función}, f : \Lambda \rightarrow \underbrace{\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}_{\lambda \mapsto f(\lambda)} \wedge (\forall \lambda, f(\lambda) \in A_\lambda)\}$

Definición 11 (Proyección). Se define la proyección como la siguiente función:

$$\pi_\mu : \underbrace{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}_{(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \rightarrow a_\mu} \rightarrow A_\mu$$

Proposición 1. Sea $\pi_\mu : \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \rightarrow A_\mu$ una proyección, para cada $\mu \in \Lambda$ la proyección es función sobreyectiva.

Demostración. Propuesta, puede complementar estudiando [3] en la página 24. ■

Proposición 2. Sean $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ y $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ dos familias no vacías de conjuntos, entonces

1. $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda).$
2. $\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) \sqcup \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) \subseteq \prod_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \sqcup B_\lambda).$

Demostración. Página 24, [3]. ■

Axioma (Unión). Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de conjuntos, entonces $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es conjunto.

Ejemplo. Sea la familia de conjuntos $\{[n, n+1]\}_{n \in \mathbb{Z}}$, luego $\mathbb{R} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1]$ es conjunto.

Axioma (Reemplazo). Si A es un conjunto, $\mathcal{A}$ clase y $f : A \rightarrow \mathcal{A}$ es función, entonces $f(A) := \{y \mid y \text{ es conjunto} \wedge \exists x \in A \text{ tq } f(x) = y\}$ es conjunto.

Comentario. En palabras simples, el axioma de reemplazo dice que la imagen de un conjunto es conjunto.

Axioma (Intersección). Si A es un conjunto y $\mathcal{A}$ es clase, entonces $A \cap \mathcal{A}$ es conjunto.

Axioma (Potencia). Si A es conjunto, sus partes

$$\mathcal{P}(A) := \{x \mid x \text{ es conjunto} \wedge x \subseteq A\}$$

es conjunto.

¿Es posible conmutar $\mathcal{P}$ con las operaciones de unión e intersección de conjuntos?. A continuación se verá que ocurre:

Proposición 3.

1. $\mathcal{P}\left(\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{P}(A_\lambda).$
2. $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{P}(A_\lambda) \subset \mathcal{P}\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right).$

Observación. Note que usualmente se tiene que $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \notin \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{P}(A_\lambda)$, pues es difícil que $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subseteq A_{\lambda_0}$, para algún $\lambda_0 \in \Lambda$ fijo.

Ejemplo. A continuación se muestran algunos ejemplos simples, se recomiendan desarrollarlos:

1. Si $\mathcal{A}$ es subclase ($\mathcal{A} \subseteq A$) de A conjunto entonces es conjunto.
Demostración: Pues es posible ver que $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap A$ es conjunto por el axioma 7.
2. Si A es conjunto y $p(x)$ propiedad, luego $\{x|x \text{ es conjunto} \wedge x \in A \wedge p(x)\}$ es conjunto, denotado por $:= \{x \in A | p(x)\}$.
Demostración: A continuación se verá que:

$$\{x|x \text{ es conjunto} \wedge x \in A \wedge p(x)\} = A \cap \{x|x \text{ es conjunto} \wedge p(x)\}$$
donde A es conjunto y solo se puede asegurar que $\{x|x \text{ es conjunto} \wedge p(x)\}$ es clase, luego por el axioma 7 (intersección) se concluye.
3. Tomando $A = \{x|x \text{ es conjunto} \wedge x \in A\}$ y por otro lado, tomando $\mathcal{A} = \{x|x \text{ es conjunto} \wedge p(x)\}$, luego se tiene que $\hat{A} = A \cap \mathcal{A}$ es conjunto.

A continuación se presenta una revisión de algunos ejercicios resueltos como ejemplo utilizando lo visto hasta ahora.

Ejemplo. P0.-P0.-

1. Si A es un conjunto entonces $\{A\}$ es conjunto.

Demostración.

- a) *Caso 1:*² Sea $A = \emptyset \Rightarrow \{\emptyset\}$ es conjunto?. Hay que ver que $\{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset)$, el cual es conjunto por el axioma 8 (potencia).
- b) *Caso 2:* Sea $A \neq \emptyset$. Entonces $\{A, \emptyset\}$ es conjunto debido al axioma 4 (emparejamiento). Sea $\mathcal{A} = \{x|x \text{ es conjunto} \wedge x = A\}$ clase por el axioma 2 (creación de clases). Luego $\{A, \emptyset\} \cap \mathcal{A} = \{A\}$ es conjunto por el axioma 7 (intersección).

■

2. Si A,B son conjuntos, $A \times B$ también.

Demostración. Notando que $A \times B = \bigsqcup_{x \in A} \underbrace{(\{x\} \times B)}_{\text{Hay que probar que sea conjunto } \forall x \in A}$.

Luego para probar que $\bigsqcup_{x \in A} (\{x\} \times B)$ es conjunto, se utiliza el axioma 5 (unión). Para x fijo en A, sea $f_x(y) := (x, y)$ ³, $f : B \rightarrow A \times B$, luego:

$$f : \underbrace{B}_{\text{Conjunto}} \rightarrow \underbrace{A \times B}_{\text{Clase}}$$

Pero $f_x(B) = \{x\} \times B$ es conjunto para cualquier x arbitrario debido al axioma 6. ■

²Caso simple, en caso de no saber realizar la demostración

³A partir de acá se omite el subíndice x en la función f.

3. Si A, B son conjuntos, la clase de funciones de A a B , denotada $\{x | x \text{ es conjunto} \wedge x \in A \wedge p(x)\}$ es conjunto.

Demostración. Sea f una función de A a $B \Leftrightarrow f = \{(x, y) \in \mathcal{R} \subseteq A \times B | \forall x \in A, \exists! y \in B, x \mathcal{R} y (y = f(x))\}$, que es igual al siguiente conjunto:

$$\{(x, y) \in \underbrace{A \times B}_{\text{Es conjunto, lo que hace que } f \text{ sea conjunto}} | p(x, y)\}$$

Lo anterior, por el axioma 1 es de la forma:

$$:= \{x \in A | p(x)\}$$

$f \subseteq A \times B$ (conjunto) $\Rightarrow f \in \mathcal{P}(A \times B)$ es conjunto debido al axioma 8.

Finalmente, $\mathcal{F}(A, B) = \{f \in \mathcal{P}(A \times B) | f : A \rightarrow B \text{ es función}\}$ es conjunto por el axioma 1. ■

4. La clase universal U no es conjunto.

Demostración. Sea $U = \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x = x\}$ la clase universal. Suponiendo que U es conjunto, luego se puede decir que $U \cap R$ con $R = \{x \in U | x \notin x, x \text{ es conjunto}\}$ la clase de Russell, luego por el axioma 7, R es conjunto (lo cual es una contradicción). ■

Comentario (Sobre el ejemplo anterior (1)). Cuando no hay información sobre cómo comenzar la demostración, es bueno poner casos simples para visualizar lo que ocurre.

Axioma (Fundación). Si A es conjunto, $A \neq \emptyset$, existe $u \in A$ tq $A \cap u = \emptyset$.

Ejemplo. Sea $A = \{a, \{a\}\}$, donde u puede ser a o $\{a\}$, luego:

$$A \cap a = \emptyset$$

$$A \cap \{a\} = \{a\}$$

$$A \cap \{\{a\}\} = \{\{a\}\}$$

$\rightarrow$ Se recomienda corroborar las intersecciones.

Teorema 1. Si x es conjunto, $x \notin x$.

Demostración. Si x es conjunto, $A := \{x\}$ es conjunto. Por el axioma 9, A contiene un elemento que no se intersecta con A : Tiene que ser x , luego:

$$\underbrace{x}_{\text{Pero, si } x \in x, \text{ se tiene que } x \cap \{x\} \neq \emptyset} \cap \{x\} = \emptyset$$

Luego se concluye por la contradicción. ■

Corolario 1.1. $U = R$ (la clase universal es igual a la clase de Russel).

Demostración. Usando el teorema anterior es fácil ver que:

$$R = \{x | x \text{ es conjunto} \wedge x \notin x\} = \{x | x \text{ es conjunto}\} = U$$

■

Proposición 4. Si x, y son conjuntos, entonces $x \notin y$ o bien $y \notin x$.

Demostración. Razonando por contradicción, suponiendo que $x \in y$ e $y \in x$, por otro lado como x, y son conjuntos, luego es cierto que $\{x, y\}$ es conjunto por el axioma 4 (apéndice).

Luego viendo que $\{x, y\} \neq \emptyset$, además es posible notar que

$$\{x\} \subseteq \{x, y\} \wedge \{y\} \subseteq \{x, y\}$$

$$x \in \{x, y\} \wedge y \in \{x, y\}$$

Luego, por el axioma 9, $\exists n \in \{x, y\}$, tal que $n \cap \{x, y\} = \emptyset$, no obstante n sólo puede ser x o y , entonces:

$$x \cap \{x, y\} = y \text{ pues } y \in \{x, y\} \wedge y \in x$$

$$y \cap \{x, y\} = x \text{ pues } x \in \{x, y\} \wedge x \in y$$

Lo que lleva a la contradicción (no existe dicho n).

■

1.2. Construcción de los números naturales

El problema a estudiar a continuación es: ¿Cómo definir los números naturales?

SPOILER: No se pueden definir con lo visto hasta el momento, de hecho se necesita un axioma.

Von Neumann ideó una forma inteligente de introducir los números naturales, realizó lo siguiente:

- $0 := \emptyset$
- $1 := \{\emptyset\} = \{0\}$
- $2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$
- $3 := \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- Y así sucesivamente...

Definición 12 (Sucesor). Sea $n + 1 := n \sqcup \{n\}$, se dice que $n + 1$ es el sucesor de n denotado a veces como n^+

Se tiene entonces la siguiente forma para escribir la idea de Von Neumann:

- $0 := \emptyset$
- $n^+ = n \sqcup \{n\}, n \geq 1$

El problema es que se ha definido una recursión que se desea infinita, pero ningún axioma nos permite realizar eso. En particular, al definir infinitos números mediante una recursión no asegura formalmente que se tienen los naturales, solo puede afirmar que hay números naturales muy altos.

Resumen. Teniendo en resumen, la siguiente recurrencia:

$$\begin{cases} 0 = \emptyset \\ n^+ = n \sqcup \{n\} \end{cases}$$

Se produce una recurrencia, que no se sabe si produce un conjunto de verdad.

La recurrencia anterior motiva a que se defina la siguiente noción:

Definición 13 (Conjunto inductivo). Un conjunto A se dice inductivo si verifica:

1. $\emptyset = 0 \in A$
2. $x \in A \Rightarrow x^+ \in A$

Axioma (Infinito). Existe un conjunto inductivo.

Comentario. El axioma del infinito otorga la existencia de al menos un conjunto inductivo, dicho conjunto serán los números naturales que se definirá como el menor conjunto inductivo respecto a un conjunto A, más aún, serán invariantes respecto al conjunto A respecto al que se definan.

Los "naturales" $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ son parte de un conjunto inductivo, el problema es saber si hay más elementos en un conjunto inductivo.

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \underbrace{\quad}_w, w + 1, w + 2, \dots$$

Infinito natural

Sea $A \neq \emptyset$ un conjunto inductivo dado por el axioma 10, definimos:

$$I_A := \underbrace{\{B \text{ es conjunto} \mid B \subseteq A, B \text{ es inductivo}\}}_{\text{Es conjunto, pues } I_A \subseteq \mathcal{P}(A)}$$

Definición 14 (Conjunto de los naturales $\mathbb{N}$). Se define el siguiente conjunto $\mathbb{N} := \mathbb{N}_A := \bigcap_{x \in I_A} x$, que es el menor conjunto inductivo con respecto a A.

¿Es $\mathbb{N}$ un conjunto? Si, porque $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es conjunto si A_λ es conjunto, Λ es conjunto.

Proposición 5. $\mathbb{N}_A$ no depende de A.

Demostración. En efecto, si A y $\bar{A}$ son inductivos, probamos que $\mathbb{N}_A \subseteq \mathbb{N}_{\bar{A}}$
 Sea $x \in \mathbb{N}_A$, luego, $x \in A$ y $\forall B \subseteq A$, B es inductivo, $x \in B$.

Sea $B := A \cap \bar{A} \subseteq A$ (inductivo). Luego, $x \in A \cap \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{A}$.

Basta probar que $x \in \bar{B}$ inductivo con respecto a $\bar{A}$.

Sea $\bar{B} \in I_{\bar{A}}$. Sea $\underbrace{\tilde{B}}_{\in I_A} := \underbrace{\bar{B} \cap A}_{\subseteq A}$ es inductivo, donde I_A es el conjunto de todos los subconjuntos inductivos de A.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } x \in \tilde{B} &= \bar{B} \cap A \\ &\Rightarrow x \in \bar{B} \\ &\Rightarrow x \in \mathbb{N}_{\bar{A}} \end{aligned}$$

■

Teorema 2 (Principio de inducción). Se verifica que:

1. El conjunto $\mathbb{N}$ es inductivo y si B es inductivo, $\mathbb{N} \subseteq B$.
2. Si B es inductivo y $B \subseteq \mathbb{N}$, entonces $B = \mathbb{N}$.
3. Sea $p(n)$ una proposición para $n \in \mathbb{N}$ y tal que:
 - $\vdash p(0)$.
 - $\vdash (p(n) \Rightarrow p(n^+))$

Entonces $\vdash (\forall n, p(b))$

Demostración.

- (1) y (2) es trivial (no denostativamente).
- Sea $B := \{n \in \mathbb{N} | p(n)\}$, donde $p(n)$ es una proposición que indica que $0 \in B$ y que $n \in B \Rightarrow n^+ \in B$, luego, B es inductivo, puesto que $B \subseteq \mathbb{N}$ por su definición.

$$\Rightarrow B = \mathbb{N}$$

■

Resumen: El primer conjunto inductivo es $\mathbb{N}$

El conjunto $\mathbb{N}$ posee las siguientes particularidades:

1. Es el primer conjunto inductivo en ser definido, además posee infinitos elementos, es posible definirlo gracias al axioma 10, que asegura la existencia de un conjunto inductivo.
2. Es el menor conjunto inductivo que existe, más aún, está contenido en los demás conjuntos inductivos, puesto que se define como

$$\mathbb{N} := \mathbb{N}_A := \bigcap_{x \in I_A} x$$

Su contención en los demás conjuntos inductivos corresponde a (1) en el principio de inducción.

3. Al definir el menor conjunto inductivo $\mathbb{N}_A$ respecto al conjunto A y otro conjunto inductivo $\mathbb{N}_B$ respecto al conjunto B , se tiene que $\mathbb{N} = \mathbb{N}_A = \mathbb{N}_B$

1.3. Axioma de elección de Zermelo

Axioma (Axioma de elección de Zermelo). Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos disjuntos de a dos. Entonces existe un conjunto A que contiene exactamente un elemento a_λ de A_λ

Comentario (Sobre el axioma de elección de Zermelo). Casi todos los teoremas fundamentales de la matemática utilizan el axioma de elección o variantes en sus demostraciones, en particular es de interés el lema de Zorn (la equivalencia se probará más adelante).

Definición 15 (Función de elección). Dada una familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos no vacíos (no necesariamente disjuntos), una función de elección es:

$$f : \Lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

tal que $\forall \lambda \in \Lambda, f(\lambda) \in A_\lambda$.

Proposición 6 (Equivalencias al ax. de elección). A continuación se muestran algunas equivalencias del axioma de elección:

1. El axioma de elección es equivalente a la existencia de una función de elección.
2. El axioma de elección es equivalente a $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ si $\forall \lambda, A_\lambda \neq \emptyset$.

Demostración.

1. Se muestran ambas implicancias:

- *Axioma de elección implica función de elección:*

Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos disjuntos y no vacíos, luego se define $f : \Lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, puesto que la familia de conjuntos es disjunta, se tiene que $\forall \lambda \in \Lambda, \exists! A_\lambda \in \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tq $f(\lambda) \in A_\lambda$. Osea que al tomar un elemento λ desde el dominio, la imagen se restringe simplemente al conjunto A_λ de la familia de conjuntos.

- *Función de elección implica axioma de elección:*

Sea $f : \Lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ tal que $\forall \lambda \in \Lambda, f(\lambda) \in A_\lambda$, osea que $\forall A_\lambda \in \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \exists f(\lambda) = a_\lambda \in A_\lambda$. Por otro lado, se tiene que probar que $a_\lambda \in A_\lambda \Rightarrow A_\lambda$ es disjunto con A_μ con $\lambda \neq \mu$.

2. $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{f | f : \Lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \forall \lambda, f(\lambda) \in A_\lambda\} = \{ \text{Conjunto de funciones de elección} \} \neq \emptyset$



Proposición 7 (Equivalencia al ax. de elección). Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Axioma de elección.
2. Para toda familia $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto A tal que $A \cap A_\lambda$ contiene exactamente un elemento.

Demostración. Para demostrar la equivalencia basta con probar ambas implicancias:

i) $(1) \rightarrow (2)$: Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia disjunta de conjuntos no vacíos. Luego, suponiendo verdadero el axioma de elección, $\exists A$ (lo llamaremos conjunto de elección) tal que A contiene exactamente un elemento denotado a_λ perteneciente a cada A_λ de la colección. Luego es directo comprobar que $A \cap A_\lambda$ contiene exactamente un elemento $\forall \lambda \in \Lambda$

ii) $(2) \rightarrow (1)$: Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia disjunta de conjuntos no vacíos, luego, suponiendo que existe un conjunto $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A} \cap A_\lambda$ contiene un único elemento $\forall \lambda \in \Lambda$, hay que notar que esto no quiere decir que sea conjunto de elección, pues puede existir $b \in \mathcal{A}$ tal que $b \notin A_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$ (la idea detrás es que no hay seguridad de que a $\mathcal{A}$ no le sobren elementos).

Como $\mathcal{A}$ es conjunto, por el axioma 8 se tiene que $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ también es conjunto, y por ello $A \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$ es conjunto, tal que A sólo contenga los elementos a_λ de A_λ (uno por cada A_λ), luego es fácil notar que A es un conjunto de elección, concluyendo entonces que $\exists A$ es conjunto de elección para la colección tomada.



Proposición 8 (Equivalencia al ax. de elección). Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Axioma de elección.
2. Para toda función $f : X \rightarrow Y$ sobreyectiva, existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $(f \circ g) = id_Y$.

Demostración. Para demostrar la equivalencia basta con probar ambas implicancias:

i) $(1) \rightarrow (2)$: Sea $f : X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva, luego se definen los conjuntos:

$$F_b = \{x \in X \mid f(x) = b\}$$

Como f es sobreyectiva, entonces $(F_b)_{b \in Y}$ es una familia de conjuntos no vacíos, por lo que podemos utilizar el axioma de elección en ella.

Además se tiene que $\bigsqcup_{b \in Y} F_b = X$.

Sea $g : Y \rightarrow \bigsqcup_{b \in Y} F_b$ una función de elección, luego como $g(y) \in F_Y$, se tiene que $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$, con lo que muestra que g es una inversa por la derecha para f .

- ii) (2) $\rightarrow$ (1): Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos y disjuntos entre sí. Se desea hallar

$$f : \Lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

una función de elección.

Para ello se define la función $g : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \rightarrow \Lambda$, dada por $g(x) = \lambda \Leftrightarrow x \in A_\lambda$. la cual es sobreyectiva por definición.

Teniendo así por hipótesis que g admite una inversa por la derecha, digamos f . Veamos que esa es la función de elección buscada.

Se tiene que $g(f(\lambda)) = \lambda$, pero por definición, esto equivale a que $f(\lambda) \in A_\lambda$. Como esto vale $\forall \lambda \in \Lambda$ se concluye.

■

Ejemplo. 1. Unión numerable de conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es numerable. Sea:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots\}$$

$$A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3n}, \dots\}$$

$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{nn}, \dots\}$$

¿En qué parte se utiliza el axioma de elección?, se deben elegir elementos en el siguiente orden: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, \dots$, el orden de la toma de elementos es determinado por el axioma de elección (investigar demostración).

Comentario (Datos históricos). 1. **Gödel** probó que si el axioma 1 hasta el axioma 10 son consistentes (i.e. no inducen falacias), entonces los axiomas 1 hasta el axioma 9 son consistentes.

2. **P.Cohen** probó que si los axiomas 1 hasta el 10 son consistentes, entonces los axiomas 1 hasta el 10 con la negación del axioma 11 también es consistente. Luego se tiene que el axioma 11 es independiente de los otros 10.

Finalmente **Gödel** probó que si un sistema axiomático permite definir los números naturales, entonces:

1. Hay teoremas que no se pueden demostrar con el sistema axiomático.
2. El sistema axiomático mismo no puede probar su propia consistencia.

Axiomas ZFC de la teoría de conjuntos

1. **Axioma de individualidad:** $x \in A \wedge x = y \Rightarrow y \in A$
2. **Axioma de creación de clases:** $\{x|x \text{ es conjunto} \wedge p(x)\}$ es clase.
3. **Axioma del vacío:** $\emptyset := \{x|x \text{ es conjunto} \wedge x \neq x\}$ es conjunto.
4. **Axioma de emparejamiento:** A, B conjuntos (diferentes) $\Rightarrow \{A, B\}$ es conjunto.
5. **Axioma de la unión:** $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es conjunto si $\forall \lambda, A_\lambda$ es conjunto.
6. **Axioma del reemplazo:** A es conjunto, $\mathcal{A}$ es clase, $f : A \rightarrow \mathcal{A}$ es función $\Rightarrow f(A)$ es conjunto.
7. **Axioma de la intersección:** A es conjunto $\mathcal{A}$ es clase, entonces $A \cap \mathcal{A}$ es conjunto.
8. **Axioma de potencia:** $\mathcal{P}(A)$ es conjunto si A es conjunto.
9. **Axioma de fundación:** Si A es conjunto, $A \neq \emptyset$, existe $u \in A$ tq $A \cap u = \emptyset$.
10. **Axioma del infinito:** Existe un conjunto inductivo.
11. **Axioma de elección de Zermelo:** Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos disjuntos de a dos. Entonces existe un conjunto A que contiene exactamente un elemento a_λ de A_λ

1.4. Consecuencias del axioma de elección

Resumen. El axioma de elección dice:

- Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos disjuntos, cada uno no vacío, entonces existe un conjunto A formado por exactamente un elemento a_λ de cada A_λ

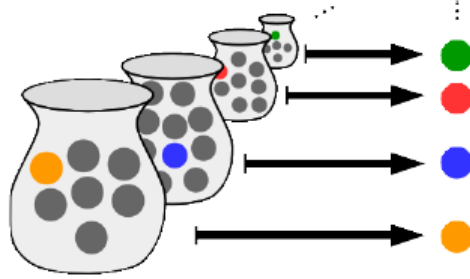


Figura 1.1: Axioma de elección

Luego algunas consecuencias simples del axioma de elección son:

1. El axioma de elección equivale a que existe al menos una función de elección f :

$$f : \Lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \forall \lambda, f(\lambda) \in A_\lambda$$

2. Producto cartesiano arbitrario no vacío:

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$$

si cada $A_\lambda \neq \emptyset$.

Consecuencias fuertes: A continuación se verá la equivalencia entre estos 3 enunciados:

1. Axioma de elección.
2. Lema de Zorn.
3. Principio del buen orden.

Para entender estas equivalencias es necesario recordar la noción de relación de orden, para ello veremos algunas definiciones.

Definición 16 (Orden parcial). Sea A una clase no vacía (o conjunto). Un orden (parcial) $(A, \leq)$ es una subclase $\mathcal{R}$ de $A \times A$ mas una relación binaria $\leq$, que satisface:

1. Notación: $x \leq y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$.
2. Refleja: $x \leq x$.
3. Antisimétrica: Si $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.
4. Transitiva: Si $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Para repasar la noción de relación de orden puede revisar el anexo.

Ejemplo.

1. Se tiene que $(\mathbb{N}, \leq)$ es orden parcial.
2. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ también es orden parcial.
3. $(\mathbb{R}, \leq)$ también es orden parcial.
4. $(\mathbb{N}, <)$ no es orden parcial, pues no verifica ser refleja.

Observación. En un orden parcial, no necesariamente todos los elementos están relacionados. Por ejemplo, en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$, los intervalos $[0, 1]$ y $[2, 3]$ no se pueden comparar (ninguno es subconjunto del otro).

¿Hay casos en que todos los elementos de A son comparables o se relacionan? Sí, cuando todos los elementos de A son comparables, se habla de un *orden total*.

Ejemplo. Se puede comprobar que $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{R}, \leq)$ son orden total, pero $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ es sólo orden parcial.

Comentario. La inclusión $\subseteq$ es uno de los órdenes más importantes en la matemática, aunque no sea total (incluso puede llegar a ser más importante que la mayoría de los órdenes totales, se usa en topología).

Para hacer que un orden parcial sea orden total, se introduce la noción de cadena siguiente:

Definición 17 (Cadena). Una cadena B en $(A, \leq)$ es un subconjunto de A tal que $(B, \leq)$ es ahora orden total.

Comentario. Al tomar B subconjunto de A , se quitan elementos que no se relacionan con el resto.

Ejemplo. En $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \subseteq)$ se pueden tomar las siguientes cadenas:

1. $B = \{[-n, n] : n \in \mathbb{N}\}$, note que los conjuntos son cada vez más grandes.
2. $B = \{[0, \frac{1}{n}] : n \geq 1\}$, note que a diferencia del ejemplo anterior, los conjuntos cada vez se van haciendo más pequeños.

Definición 18 (Buen orden). Un orden parcial $\leq$ en A se dice buen orden (o que A está bien ordenado, o que A es ordinal), si todo subconjunto no vacío B de A , posee un primer elemento para $\leq$, es decir^a

$$\exists x_0 \in B \text{ tq } \forall y \in B, x_0 \leq y$$

^aEn palabras simples, todo subconjunto de A debe tener un primer elemento, dicho elemento debe estar incluido en el subconjunto o ser alcanzable.

Ejemplo.

1. $(\mathbb{N}, \leq)$ está bien ordenado, porque cualquier subconjunto de los naturales posee un primer elemento para $\leq$.

Nota: Dicho primer elemento debe estar presente en el subconjunto, a continuación un ejemplo dónde ese primer elemento no es alcanzable:

2. $(\mathbb{R}, \leq)$ no está bien ordenado, porque $B = (0, 1]$ no posee primer elemento para $\leq$ (0 es ínfimo pero no mínimo).

Comentario. El primer elemento debe estar incluido en el subconjunto.

Proposición 9.

1. Un subconjunto de un orden total es orden total (el orden total se hereda).
2. Todo buen orden en A es orden total.

Demostración. 1. Pendiente.

2. **Bosquejo:** Basta tomar $B = \{x, y\} \subseteq A$, que posee primer elemento, es decir, o bien $x \leq y$ o bien $y \leq x$, por lo tanto es orden total.

Nota: Lo anterior se puede aplicar a cualquier par x, y del conjunto, por lo que se extiende que todos van a ser comparables entre sí. ■

Pregunta fundamental: Los naturales $\mathbb{N}$ están bien ordenados, pero los reales $\mathbb{R}$ no (con el orden usual $\leq$). ¿Es posible definir un nuevo orden $\leq$ en $\mathbb{R}$ que lo haga bien ordenado?

La intuición dice que la pregunta anterior está casi condenada a tener una respuesta negativa, pero antes de dar una respuesta, a continuación se verá que el lema de Zorn está íntimamente relacionado a esta pregunta.

Proposición 10 (Lema de Zorn). Sea $(A, \leq)$ un orden parcial tal que toda cadena $B \subseteq A$ posee cota superior:

$$\exists z = z(B) \in A \text{ tq } \forall y \in B, y \leq z$$

Entonces A posee un elemento maximal, es decir

$$\exists \bar{z} \in A \text{ tq } \forall y \in A, y \leq \bar{z}$$

Ejemplo (Clásico). Considerando las partes $(A = \mathcal{P}(X), \subseteq)$: Dada cualquier cadena $B = \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, tomando $Z = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, notamos que es cota superior para $\subseteq$. Entonces $\mathcal{P}(X)$ posee elemento maximal, que es en realidad el mismo conjunto X .⁴

Comentario. Para cada cadena se define una cota superior, en el ejemplo anterior basta con tomar $Z = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \mathcal{P}(X)$, aunque también se podría tomar X como cota superior.

Ejemplo. Casos que no cumplen el lema de Zorn:

1. Considerando $(\mathbb{R}, \leq)$, al ser totalmente ordenado, todo subconjunto de reales es cadena, pero si se toma $B = \mathbb{R}$ entonces no hay cota superior.
2. El mismo resultado anterior corre para los naturales $(\mathbb{N}, \leq)$ (pero note que las partes de los naturales si poseen cota superior para $\subseteq$).

Comentario. El Lema de Zorn es constructivo y muy útil: Dice que dada una cadena, basta probar que tiene cota superior para concluir que hay elemento maximal en el conjunto en el que se trabaja. Ese elemento maximal tendrá mejores propiedades que cualquier otro normal.

La siguiente proposición es muy importante y da respuesta a la pregunta de si $\mathbb{R}$ tiene un buen orden.

Proposición 11 (Principio del buen orden). Todo conjunto $A \neq \emptyset$ puede ser bien ordenado.

Observación. Algunas cosas interesantes a partir del Lema de Zorn (algunas demostrables más adelante):

1. Ojo, que $(\mathbb{R}, \leq)$ NO está bien ordenado, pero se asegura que existe un buen orden para $\mathbb{R}$ por lo que el buen orden debe ser otro (de hecho aún no se conoce ese orden).
2. Aún no se conoce un orden total de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (buen orden $\Rightarrow$ orden total).

⁴**Spoiler:** Utilizando esta estrategia, es posible probar que toda topología $\mathcal{T}$ sobre X posee elemento maximal, considerando $\bigsqcup_{U \in \mathcal{T}} U = X$, pues por definición $X \in \mathcal{T}$.

3. Usando el Lema de Zorn, es demostrable que todo espacio vectorial posee una base de Hamel.
4. Usando Lema de Zorn: $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es compacto ssi cada A_λ es compacto (Teorema de Tychonoff⁵).
5. El buen ordenamiento dice que todo conjunto puede ser un ordinal (bien ordenado). El conjunto $\omega := (\mathbb{N}, \leq)$ se llama primer ordinal infinito.

1.4.1. Equivalencias importantes al axioma de elección

Teorema 3 (Fundamental, parte 1). Son equivalentes los siguientes 3 enunciados:

1. **Axioma de elección de Zermelo:** Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos disjuntos de a dos. Entonces existe un conjunto A que contiene exactamente un elemento a_λ de A_λ .

■ Equivale a la existencia de una función de elección.

2. **Lema de Zorn:** Sea $(A, \leq)$ un orden parcial tal que toda cadena $B \subseteq A$ posee cota superior:

$$\exists z = z(B) \in A \text{ tq } \forall y \in B, y \leq z$$

Entonces A posee un elemento maximal, es decir

$$\exists \bar{z} \in A \text{ tq } \forall y \in A, y \leq \bar{z}$$

3. **Principio de buen orden:** Todo conjunto $A \neq \emptyset$ puede ser bien ordenado.

Demostración. Se demostrará la secuencia $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$, de donde se concluye la equivalencia:

- **(3) $\Rightarrow$ (1)** (*Principio de buen orden implica el axioma de elección*).
Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos disjuntos no vacíos. Se define $\mathcal{A} := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Luego por buen ordenamiento, $\mathcal{A}$ puede ser bien ordenado. En particular, todo subconjunto B de $\mathcal{A}$ posee primer elemento. Luego, los subconjuntos $B = A_\lambda$ poseen un primer elemento, digamos a_λ . Finalmente el conjunto $A := \{a_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ satisface lo pedido, concluyendo así el axioma de elección

⁵El teorema más importante de la topología.

- (2) $\Rightarrow$ (3) (Lema de Zorn implica el Principio de buen orden).⁶

Sea X un conjunto no vacío. Luego utilizando el lema de Zorn, vamos a construir un buen ordenamiento $\leq$ en X .

Sea $\mathcal{L}$ la clase de subconjuntos bien ordenados de X :⁷

$$\mathcal{L} := \{(A, \leq_A) : A \subseteq X \wedge \leq_A \text{ bien ordena a } A\}$$

Veamos que $\mathcal{L}$ es no vacío, puesto que para $x_0 \in X$ fijo, $(\{x_0\}, =)$ ⁸ es bien ordenado y por ende se encuentra en la clase $\mathcal{L}$.

Propuesto: ¿Es acaso $\mathcal{L}$ conjunto?

Vamos a intentar colocarle un orden a $\mathcal{L}$, dicho orden, al menos no es el de subconjunto ($\subseteq$). Para lograr esta tarea definiremos la noción de ideal:

Definición 19 (Ideal). Sea $(A, \leq)$ un orden parcial. Se dice que $S \subseteq A$ es ideal si verifica que:

$$x \in S \wedge y \in A \wedge y \leq x \Rightarrow y \in S$$

Ejemplo. 1. En $(\mathbb{N}, \leq)$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$ es ideal, pero $S = \{2, 3, 4, 10\}$ no lo es "porque tiene hoyos".

2. En $(A, \leq)$, ocurre que $\emptyset$ y A son siempre ideales.

3. En $([0, \infty], \leq)$, $[0, 1]$ es ideal, pero $[1, 2]$ no lo es.

Comentario. Un ideal de A deben estar presentes los elementos desde los "menores" hasta alguno cualquiera "mayor", si en dicho orden falta un elemento de A , el conjunto extraído no es ideal porque tendría "hoyos".

Volviendo a la demostración, vamos a introducir en $\mathcal{L}$ el siguiente orden parcial particular:

$$(A_1, \leq_1) \leq_{\mathcal{L}} (A_2, \leq_2) \Leftrightarrow A_1 \text{ es ideal de } A_2 \text{ y } \leq_2|_{A_1} = \leq_1$$

Desglosando lo expresado anteriormente:

- Al ser A_1 ideal de A_2 , es directo que A_1 está contenido en A_2 .

⁶Esta demostración es larga (en matemática se le dice técnica). Para ello introduciremos la noción de **Ideal**

⁷Se desea probar que $A = X \in \mathcal{L}$ con algún orden.

⁸Con esto nos aseguramos que está bien ordenado con $=$, pues hay un solo elemento, la gracia de esto es asegurar la existencia de un elemento en $\mathcal{L}$.

- $\leq_2 \upharpoonright_{A_1} = \leq_1$ significa $\leq_2$ restringida a A_1 es $\leq_1$ ⁹.
- Lo anterior quiere decir que cuando se comparan elementos de A_2 con $\leq_2$, y dichos elementos son además parte del ideal A_1 , el orden a usar será $\leq_1$, (osea $\leq_2 = \leq_1$ en dicho caso).

Oséa en particular, $A_1 \subseteq A_2$, y además $x \leq_2 y \Leftrightarrow x \leq_1 y$ si $x, y \in A_1$.

Luego, ya dada la constucción anterior y definida la noción de orden, se probará lo siguiente:

1. $\leq_{\mathcal{L}}$ es un orden parcial.
2. Toda cadena en $(\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ posee una cota superior.
3. **Concluyendo por Lema de Zorn:** $\mathcal{L}$ posee elemento maximal, denotado $(A_m, \leq_m) \in \mathcal{L}$ (lo vamos a tener gratis suponiendo Lema de Zorn).
4. Ese elemento maximal es $(A, \leq_m)$.

Nota: Algunas cosas a considerar:

- Sobre $\mathcal{L}$ NO se coloca la inclusión como orden.
- Se necesita trabajar $\leq_{\mathcal{L}}$ a través de ideales (y no solo que $A_1 \subseteq A_2$) porque los ideales iran conservando el orden.

Ahora demostramos los 4 puntos anteriores, los dos primeros con el fin de verificar las hipótesis del *Lema de Zorn*.

1. *Pdq $\leq_{\mathcal{L}}$ es un orden parcial:*

Veamos que es orden parcial por definición:

- a) *Refleja:* Se verifica que $(A_1, \leq_1) \leq_{\mathcal{L}} (A_1, \leq_1)$.
- b) *Antisimétrica:* $(A_1, \leq_1) \leq_{\mathcal{L}} (A_2, \leq_2)$ y $(A_2, \leq_2) \leq_{\mathcal{L}} (A_1, \leq_1)$, entonces:

$$A_1 = A_2, \leq_1 = \leq_2$$

.

- c) *Transitiva:* Propuesto.

2. *Pdq Toda cadena en $(\mathcal{L}, \leq_{\mathcal{L}})$ posee una cota superior:*

Sea $\{(A_\lambda, \leq_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ cadena en $\mathcal{L}$ para $\leq_{\mathcal{L}}$. La cadena es totalmente ordenada, es decir, se cumple

$$(A_\lambda, \leq_\lambda) \leq_{\mathcal{L}} (A_\mu, \leq_\mu)$$

o bien

$$(A_\mu, \leq_\mu) \leq_{\mathcal{L}} (A_\lambda, \leq_\lambda)$$

⁹Se puede decir que $\leq_1$ es extensión de $\leq_1$

Proponemos como cota superior al siguiente conjunto

$$Z := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subseteq X$$

con el orden

$$x \leq y \Leftrightarrow x \leq_\lambda y, \text{ si } x, y \in A_\lambda$$

A partir de esto:

- *Pdq $\leq$ está bien definido (no depende de λ):*

La idea de probar que no depende de λ , es que extiende a todos los órdenes indexados por λ hasta hacia la cota superior. Veamos que *todos los elementos son comparables*, si $x, y \in Z = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, supongamos que $x \in A_\lambda$ e $y \in A_\mu$.

Por ser cadena en $\leq_{\mathcal{L}}$, tenemos $A_\lambda \subseteq A_\mu$ (o lo contrario), pues son ideales, luego subconjuntos. En cualquier caso, x, y son comparables o bien con $\leq_\lambda$ o bien con $\leq_\mu$.

Veamos la *duplicidad de λ s*: Si existen dos órdenes indexados por $\lambda, \tilde{\lambda}$ para comparar x, y , o sea:

$$x \leq_\lambda y, \text{ si } x, y \in A_\lambda$$

$$x \leq_{\tilde{\lambda}} y, \text{ si } x, y \in A_{\tilde{\lambda}}$$

Entonces $x, y \in A_\lambda \cap A_{\tilde{\lambda}}$. Como A_λ debe ser ideal de $A_{\tilde{\lambda}}$ (o viceversa, no se pierde generalidad), podemos asumir $x, y \in A_\lambda \subseteq A_{\tilde{\lambda}}$. Luego, se tiene que $\leq_{\tilde{\lambda}}|_{A_\lambda} = \leq_\lambda$. Entonces, $x \leq_{\tilde{\lambda}} y$ implica $x \leq_\lambda y$ y viceversa. Por lo tanto ambos ordenes para λ s son iguales.

- *Pdq el orden $\leq$ bien ordena Z (es decir $(Z, \leq) \in \mathcal{L}$).*

Sea $C \subseteq Z$ conjunto no vacío.

- *Pdq $C_\lambda \subset C$ posee primer elemento:*

Sea $x \in C$ y λ tal que $x \in A_\lambda$ ($Z = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$).

Sea $C_\lambda := C \cap A_\lambda \neq \emptyset$. Por ser subconjunto de A_λ bien ordenado, C_λ posee primer elemento b , además $b \in C$.

- *Pdq b es primer elemento de C :*

Sea $y \in C$. Se tienen dos casos: $y \in A_\lambda$, o bien $y \in A_\mu$, con $\lambda \neq \mu$.

◊ En el primer caso, $y \in C_\lambda = C \cap A_\lambda$, luego $b \leq y$.

◊ En el segundo caso, como A_λ es ideal en A_μ , y $b \in A_\lambda$, si $z \in A_\mu \setminus A_\lambda$ es tal que $z \leq b$, entonces $z \in A_\lambda$, lo que es una contradicción. Luego $b \leq z$. Tomando $z = y$, se concluye.

Además, si ahora $\tilde{b}$ es otra cosa inferior de C , es cota inferior de $C_\lambda = C \cap A_\lambda$, que posee primer elemento b . Luego $\tilde{b} \leq b$.

Comentario. El primer paso fue sacar un primer elemento de algún lado, luego se probó que dicho elemento es primer elemento del conjunto que me interesa.

- *Pdq que Z es cota superior de la cadena.*

Como $\leq$ es una extensión de cada $\leq_\lambda$, esa parte está lista. Basta con probar que cada A_λ es ideal en Z , ya que esto significa que $A_\lambda \subset Z \forall \lambda \in \Lambda$.

Sea $x \in A_\lambda$, $y \in Z$, $y \leq x$. Luego $y \in A_\mu$, tiene dos casos: A_λ es ideal de A_μ , o viceversa.

- En el primer caso, como $y \leq x$, luego A_λ al ser ideal se concluye que $y \in A_\lambda$.
- En el segundo caso, $y \in A_\lambda$ es más directo aún.

.....

3. *Pdq $\mathcal{L}$ posee elemento maximal, denotado $(A_m, \leq_m) \in \mathcal{L}$:* Veamos que por (1) y (2) se satisfacen las hipótesis del *Lema de Zorn*, por lo tanto la existencia del elemento maximal la vamos a tener gratis suponiendo cierto el Lema de Zorn.

.....

4. *Pdq el elemento maximal es $(A, \leq_m)$.*

Suponiendo por contradicción, si $A_m \neq X$, existe $a \in X \setminus A_m$. Sea $\tilde{A}_m := A_m \sqcup \{a\}$. Definamos en $\tilde{A}_m$ el orden parcial:

$$\tilde{x} \tilde{\leq}_m \tilde{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{x} \tilde{\leq}_m \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y} \in A_m \\ \text{Falso, } \tilde{x} = a, \tilde{y} \in A_m. \\ \text{Verdadero, } \tilde{x} \tilde{\leq}_m a. \end{cases}$$

Ejercicio 1. Probar que $\tilde{\leq}_m$ es orden parcial y extiende a $\leq_m$ de A_m a $\tilde{A}_m$.

Ahora hay que probar que $(\tilde{A}_m, \tilde{\leq}_m) \in \mathcal{L}$. Se tiene que $\tilde{A}_m = A_m \sqcup \{a\} \subseteq X$.

- *Pdq $\tilde{\leq}_m$ es buen orden:* Si $B \subseteq \tilde{A}_m$, como siempre $\tilde{x} \tilde{\leq}_m a$, el primer elemento es o bien a , o bien el primer elemento de $B \cap A_m$.
- *Pdq A_m es ideal de $\tilde{A}_m$:* Si $x \in A_m$, $y \in \tilde{A}_m$, $y \tilde{\leq}_m x$, como $x \neq a$, necesariamente $y \in A_m$.

Luego, A_m no es maximal, por lo tanto hay contradicción.

Queda demostrado entonces que Lema de Zorn implica Principio de buen orden.

Comentario. Lo más importante es el esquema de la demostración, las demostraciones pequeñas entre medio sirven para ejercitar,

- (1) $\Rightarrow$ (2) (Axioma de Elección implica el Lema de Zorn).

Sea $(X, \leq)$ un orden parcial tal que toda cadena admite cota superior, entonces hay que probar que X posee elemento maximal para $\leq$ (utilizando el axioma de elección).

Comentario. Al considerar $(X, \leq)$ un orden parcial tal que toda cadena admite cota superior, estamos asumiendo las hipótesis para el lema de Zorn, la idea es hacer que dichas hipótesis junto con el axioma de elección permitan obtener la conclusión.

Razonando por contradicción, suponiendo que no existe un elemento maximal.

$$\sim (\exists z \in X \text{ tq } \forall b \in X, b \leq z)$$

. Luego, para cualquier $z \in X$ existe $b \in X$ con $\sim (b \leq z) \Leftrightarrow b > z$.

En particular, toda cadena C en X posee una cota superior EXTRICTA (porque posee cota superior por hipótesis, pero esa cota es mayorada estrictamente por otro elemento también).

Luego para toda cadena C en X :

$$C^* := \{b \in X : x < b \forall x \in C\} \neq \emptyset$$

y $C^* \cap C = \emptyset$.

Ejemplo. En $(\mathbb{N}, \geq)$, si $C := \{0, 1, \dots, n-1\}$ cadena, entonces $C^* := \{n, n+1, \dots\}$.

Usando axioma de elección, para cada C cadena de X podemos escoger un elemento $g(C)$ en C^* .

Ejemplo. En $(\mathbb{N}, \geq)$, si $C := \{0, 1, \dots, n-1\}$ cadena, entonces una g es $g(C) := n \in C^* := \{n, n+1, \dots\}$.

Definición 20 (Intervalo inicial). Dado un conjunto $B \subseteq X$, $x \in X$, se define su intervalo inicial hasta x como:

$$S_B(x) := \{y \in B : y < x\}$$

Ejemplo (Intervalo inicial). Mientras que en $(\mathbb{R}, \leq)$:
Por ejemplo, en el conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$ se tienen:

$$\begin{aligned} S_{\mathbb{N}}(5) &= \{0, 1, 2, 3, 4\} & S_{\mathbb{R}}(3) &= (-\infty, 3) \\ S_{\text{impares}}(8) &= \{1, 3, 5, 7\} & S_{[0,1]}(1) &= [0, 1) \\ & & S_{[1,2]}(3) &= [1, 2] \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (Sobre intervalo inicial y e ideal.). Suponga que $B=X$:

1. Probar que $\emptyset$ es un intervalo inicial, pero X no lo es.
2. Probar que todo intervalo inicial es ideal, y todo ideal distinto de X es intervalo inicial.
3. Si B está totalmente ordenado, entonces $S_B(x)$ es cadena.

Definición 21 (Conjunto especial). Dado $m \in X$, diremos que $B \subseteq X$ es especial con respecto a m si:

1. $(B, \leq)$ está bien ordenado ($\Rightarrow B$ es cadena).
2. m es primer elemento de B ($m \in B$).
3. Para todo $x \in B$, $x \neq m$, $x = g(S_B(x))$.

Comentario. La última condición nos dice que para el intervalo inicial $S_B(x)$ (que es cadena), la función de elección g escoge su borde superior (x).

Ejemplo. En $X = \mathbb{N}$ con $\leq$, $m = 0$ y $B = \mathbb{N}$ es especial:

1. $(B = \mathbb{N}, \leq)$ está bien ordenado.
2. 0 es primer elemento de $\mathbb{N}$.
3. Para todo $n \geq 1$, $n = g(\{0, 1, 2, \dots, n-1\}) = g(n)^a$ (g definida antes).

Otro ejemplo es $B = \{\text{Pares}\}$ y $g(\{0, 2, 4, \dots, 2n-2\}) = 2n$

^aIntervalo inicial hasta n .

Volviendo a la demostración, fijemos m en X . Sea G la unión de todos los conjuntos especiales en X con respecto a m ¹⁰.

Entonces G también es especial con respecto a m . Esto basta y sobra para concluir una contradicción y terminar la demostración. En efecto, notemos primero que G es cadena.

Sea $\hat{G} := G \sqcup \{g(G)\}$. Entonces $\hat{G}$ es especial también.

1. m es primer elemento de $\hat{G}$:
 m es primer elemento de cada especial, por lo tanto lo es de la unión de especiales G . Como $g(G) >$ todos los elementos de G , concluimos que m es primer elemento de $\hat{G}$.
2. $\hat{G}$ bien ordenado:
 Como $g(G) \in G^*$, necesariamente $g(G) >$ todo elemento de G . Luego el buen orden se preserva.
3. Para todo $x \neq m$, $x \in \hat{G}$, $x = g(S_{\hat{G}}(x))$:
 Hay dos casos:

¹⁰Queda pendiente hasta el final de la demostración probar que G , la unión de todos los conjuntos especiales en X , es especial con respecto a m , por el momento se asume

a) Si $x = g(G)$:

$$S_{\hat{G}}(x) = \{y \in \hat{G} : y < g(G)\} = G$$

Luego, $g(S_{\hat{G}}(x)) = g(G) = x$.

b) Si $x \in G$:

Como $g(G) >$ todos los elementos de G ,

$$S_{\hat{G}}(x) = \{y \in \hat{G} : y < g(G)\} = \{y \in G : y < x\} = S_G(x)$$

Luego, $g(S_{\hat{G}}(x)) = g(S_G(x)) = x$ (G especial).

Conclusión: G es el máximo conjunto especial (es la unión de todos los especiales), pero encontramos un conjunto con un elemento más, $\hat{G}$.

Luego necesariamente $\hat{G} \subseteq G$ y por ende $g(G) \in G$. Pero g por definición es tal que $g(G) \in G^*$, lo que es contradicción (G es cadena).

Luego, g no puede existir, es decir, X posee elemento maximal.

Pendiente: Pdq G , la unión de todos los conjuntos especiales en X , es especial (c/r a m):

1. **Pdq** m es primer elemento:

Sea $m \in G$ pues está en cada especial. Si $x \in G$, está en algún especial B , cuyo primer elemento es m : $m \leq x$.

2. **Pdq** G es cadena:

Usaremos el siguiente lema muy útil:

Lema 1. Si B, D son especiales $\Rightarrow B$ es ideal de D o viceversa.

Nota: La demostración de este lema quedará pendiente.

Usando el lema anterior, si $x, y \in G$, existen B, D especiales tales que $x \in B$ e $y \in D$. Del lema anterior, o bien $x, y \in B$, o bien $x, y \in D$. En ambos casos al ser especiales B y D , tenemos x y y relacionados.

3. **Pdq:** G está bien ordenado:

Razonando por contradicción: Si no es el caso, existe $B : (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{k+1} < x_k$ (i.e., sin primer elemento).

Sea B_k especial tal que $x_k \in B_k$. Entonces o bien B_0 es ideal de B_k o al revés.

Caso 1: B_k ideal en B_0 : Tenemos $x_k \in B_k \subseteq B_0$.

Caso 2: B_0 ideal en B_k : Como $x_k < x_0$ si $k \geq 1$, al ser B_0 ideal en B_k , $x_k \in B_0$.

En cualquier caso, $x_k \in B_0$ para todo k . Pero B_0 está bien ordenado, y $B = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B_0$ no posee primer elemento, contradicción.

4. **Pdq:** Para cualquier $x \in G$, $x \neq m$, $x = g(S_G(x))$:

Sea $B \subseteq G$ especial tal que $x \in B$. Se tiene gratis que $S_B(x) \subseteq S_G(x)$.

$\supseteq$. Si ahora $y \in S_G(x)$, y D es especial tal que $y \in D$, entonces $D \subseteq B$ o bien B es ideal en D . En ambos casos $y \in B$ (en el segundo caso, se usa que $y < x$).

Luego, $y \in S_B(x)$. Concluimos que $S_B(x) = S_G(x)$ por lo que $x = g(S_B(x)) = g(S_G(x))$ (B especial).

Nota: Aún nos falta probar el lema :(

Luego, queda probado el teorema fundamental, osea la equivalencia entre el axioma de elección, el lema de Zorn y el principio de buen orden. ■

Definición 22 (Orden parcial estricto). Dado un conjunto A , una relación $<$ sobre A se denomina *orden parcial estricto* si posee las siguientes propiedades:

1. *No reflexividad:* No se cumple $a < a$ para todo $a \in A$.
2. *Transitividad:* Sean $a, b, c \in A$. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Ejemplo.

1. Para $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ dotados con el orden $<$.
2. La relación $\subset$ sobre $\mathcal{P}(X)$ es un orden parcial estricto.

Proposición 12 (Principio del máximo de Hausdorff). Sea A un conjunto y $<$ un orden parcial estricto sobre A . Entonces existe un subconjunto simplemente ordenado maximal B de A .

Ejemplo. Si (a, b) y (c, d) son dos puntos del plano $\mathbb{R}^2$, se define

$$(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow a < c \wedge b = d$$

Lo anterior es un orden parcial de $\mathbb{R}^2$ bajo el cual dos puntos son comparables ssi están en la misma recta horizontal. Los subconjuntos simplemente ordenados maximales son las rectas horizontales de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 13 (Lema de Tukey). Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Suponiendo que para toda subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que esté simplemente ordenada por la inclusión propia, la unión de los elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$.

Teorema 4 (Fundamental, parte 2). Son equivalentes los siguientes 3 enunciados:

1. **Lema de Tukey:** Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos. Suponiendo que para toda subfamilia $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ que esté simplemente ordenada por la inclusión propia, la unión de los elementos de $\mathcal{B}$ pertenece a $\mathcal{A}$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento que no está contenido propiamente en ningún otro elemento de $\mathcal{A}$.
2. **Principio del máximo de Hausdorff:** Sea A un conjunto y $<$ un orden parcial estricto sobre A . Entonces existe un subconjunto simplemente ordenado maximal B de A .
3. **Lema de Zorn:** Sea $(A, \leq)$ un orden parcial tal que toda cadena $B \subseteq A$ posee cota superior:

$$\exists z = z(B) \in A \text{ tq } \forall y \in B, y \leq z$$

Entonces A posee un elemento maximal, es decir

$$\exists \bar{z} \in A \text{ tq } \forall y \in A, y \leq \bar{z}$$

Demostración. Se probará $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$.

1. Para probar que $(1) \Rightarrow (2)$



1.5. Aplicaciones del Lema de Zorn

A continuación se presentarán algunas construcciones donde se utiliza el *Lema de Zorn* para probar algunos resultados interesantes.

1.5.1. Existencia de una función entre dos conjuntos

Proposición 14. Sean A, B conjuntos y $\mathcal{R}$ una relación en $A \times B$ con dominio A (todos los $x \in A$ están relacionados con algún $y \in B$). Existe $f \subseteq \mathcal{R}$, $f : A \rightarrow B$ función.

Demostración. Para comenzar, se define la clase

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{S} \mid \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \text{ es relación en } A \times B \text{ tq } \forall a \in \text{Dom}(\mathcal{S}) \subseteq A, \exists! b \in B\}^{11}$$

Veamos que el orden $\subseteq$ es orden parcial en $(\mathcal{F}, \subseteq)$, pues verifica lo siguiente (sin mayor detalle):

- i) *Refleja:* Sea $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$, luego es fácil confirmar que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$.
- ii) *Antisimétrica:* Sean $\mathcal{S}, \mathcal{Q} \in \mathcal{F}$ $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{S} = \mathcal{Q}$.
- iii) *Transitiva:* Sean $\mathcal{S}, \mathcal{Q}, \mathcal{T} \in \mathcal{F}$, tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q}$ y $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$.

Luego en $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tomamos una cadena arbitraria no vacía $C \subseteq \mathcal{F}$, sea la clase de las cadenas:

$$\mathcal{C} := \{C \mid C \text{ sea cadena de } (\mathcal{F}, \subseteq)\}$$

Luego es fácil ver que $\forall C \in \mathcal{C}$, $\bigcup_{c \in C} c \in C$ (por ende $\in \mathcal{F}$) es cota superior de C . Por lo tanto, por el *lema de Zorn* se concluye que $(\mathcal{F}, \subseteq)$ posee elemento maximal.

Sea $f \in \mathcal{F}$ el elemento maximal, luego veamos que f es tal que $A \rightarrow B$ función, para ello, razonando por contradicción supongamos que no es función en todo A , osea que existe $a \in A$ tal que $(a, b) \notin f$ para todo $b \in B$ (osea que hay un punto del dominio que no es tomado y por ende no se le asigna imagen), luego se tiene que $(f \sqcup \{(a, b)\}) \in \mathcal{F}$ para algún b (fijo), lo que contradice la maximalidad de f en $\mathcal{F}$. Se concluye que $\forall a \in A, \exists! b \in B$ por medio de f , por lo tanto es función en todo A como dominio. ■

1.5.2. Estructuras algebraicas

Recordemos que un subconjunto $I \subset R$ se denomina ideal de R si:

$$x \in I, y \in R, y \leq x \Rightarrow y \in I$$

A partir de la definición de ideal se extienden las siguientes nociones sobre ideales:

¹¹Este es un caso en el que importa mucho el orden de los cuantificadores.

Definición 23 (Ideal propio). Un ideal I de R se dirá ideal propio si $I \neq R$.

Definición 24 (Ideal maximal). Un ideal propio I de R se dice ideal maximal si es maximal con respecto a la inclusión entre otros ideales propios.

Comentario. El ideal maximal es el ideal más grande

Definición 25 (Grupo). Sea $(G, *)$ una estructura algebraica, se dice grupo si verifica:

1. $*$ es asociativa.
2. $(G, *)$ posee neutro $e \in G$.
3. Todo elemento $x \in G$ posee inverso $x^{-1} \in G$.

Definición 26 (Grupo abeliano). Si $(G, *)$ es un grupo, se dice abeliano si $*$ es conmutativa.

Definición 27 (Anillo). Sea $(A, +, \cdot)$ una estructura algebraica, se dice que es anillo si verifica:

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano.
2. $\cdot$ es asociativa.
3. $\cdot$ distribuye con respecto a $+$

Definición 28 (Anillo conmutativo). Un anillo $(R, +, \cdot)$ se dice conmutativo si la operación $\cdot$ es conmutativa.

Definición 29 (Anillo con unidad). Un anillo $(R, +, \cdot)$ se dice con unidad si la operación $\cdot$ posee neutro en A (denotado por 1).

Ejemplo. $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ es un anillo conmutativo con unidad.

Definición 30 (Ideal propio de un anillo). Un subconjunto no vacío $I \subset R$ de un anillo R es un ideal si:

- I es subgrupo aditivo de R .
- $\forall (x, y) \in I \times R$ es cumple que $x \cdot y \in I$.

Propiedad 1. Los ideales de un anillo conmutativo pueden ser ordenados parcialmente por inclusión.

Teorema 5. El conjunto $\{0\}$ es ideal propio.

Demostración. Veamos que $\{0\}$ es ideal propio: Claramente es un subgrupo aditivo. Sea $r \in R, r \cdot 0 = 0 \in \{0\}$.

$\Rightarrow \{0\}$ es ideal propio. ■

Teorema 6. Si U es ideal propio, entonces $1 \notin I$.

Demostración. Supongamos que $1 \in I$ (para buscar la contradicción), luego $\forall r \in R, 1 \cdot r = r \in I$, ya que I es propio y cumple con esto.

Pero $\forall r \in R, r \in I$, entonces $R = I$, no obstante se supone que es ideal propio (contradicción).

$$\Rightarrow 1 \notin I$$

■

Teorema 7. Todo anillo conmutativo contiene un ideal propio maximal.

Demostración. Sea $S = \{I \subset R | I \text{ es ideal propio de } R\}$, entonces S se puede ordenar parcialmente por inclusión ($\subseteq$).

Sea $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset S$ un conjunto totalmente ordenado, luego definimos $\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha = I$, con A conjunto de índices.

$$\Rightarrow I_\alpha \subset I \forall \alpha \in A$$

Para la demostración necesitamos usar el lema de Zorn, para ello hay que verificar las siguientes hipótesis:

1. I es ideal de R .
2. I es ideal propio de R .
3. I es cota superior.

■

1.5.3. Base de Hamel

Recordemos algunas definiciones sobre espacios vectoriales:

Definición 31 (Independencia lineal). Sea X un espacio vectorial, luego $U \subseteq X$ se dice linealmente independiente, si para cada $\{u_i\}_{i \in I} \subseteq U$ finito y para cada $\{\lambda\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{R}$ se tiene

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \forall i \in I$$

Definición 32 (Espacio vectorial de dimensión finita). Un espacio vectorial X se dice de dimensión finita, si para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un conjunto con n elementos en E que es linealmente independiente. Así X es de dimensión finita, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para cada conjunto $\{u_1, \dots, u_{n+1}\} \subseteq X$, existen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\} \in \mathbb{R}$ no todos cero tales que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i = 0$$

En dicho caso, el mínimo n_0 con ésta propiedad se dice es la dimensión de X .

Definición 33 (Base algebraica o de Hamel). Un conjunto $U \subseteq X$ se dice base algebraica (o de Hamel) del espacio vectorial X si:

1. U es linealmente independiente.
2. $\langle U \rangle = X$, es decir, para todo $x \in X$ existen subconjuntos finitos $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq U$ y $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ de forma que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$$

Teorema 8 (Existencia de la base de Hamel). Todo espacio vectorial X posee una base de Hamel, esto es, existe $\{e_i\}_{i \in I} \subseteq X$ tal que $\forall x \in X$, $\exists J \subseteq I$ finito, y $\{\lambda_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}$ tales que:

$$x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$$

Comentario. Note que I puede ser un conjunto con cardinal cualquiera, en particular es interesante estudiar para el caso de I infinito, puesto que independiente de eso, existe J finito para indexar la combinación lineal.

Demostración. Sea $\{A \subseteq X : A \text{ es un conjunto l.i.}\}$ ordenado mediante inclusión. Notemos que S es no vacío pues cualquier conjunto con un solo elemento es l.i. (los singletons $\{x\} \in S$). A continuación se desea satisfacer el Lema de Zorn, para ello hay que ver que $\forall \mathcal{C} \subseteq S$ cadena posee cota superior.

Intuitivamente¹² es posible pensar que $B = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$ es cota superior de $\mathcal{C}$, para esto se debe mostrar que $B \in S$ y que $A \subseteq B \forall A \in \mathcal{C}$. A continuación probemos que efectivamente B cumple lo que queremos:

¹²Es un candidato conveniente.

- **Pdq** B es cota superior:

Como el orden es la inclusión de conjuntos, ésto equivale a decir que $A \subseteq B$ para todo $A \in \mathcal{C}$ (pues B es la unión de los $A \in \mathcal{C}$).

- **Pdq** $B \in S$, osea que B es un conjunto linealmente independiente:

Sean $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{B}$ y $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$$

Como $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{B}$, cada elemento debe estar en algún $A_i \in \mathcal{C}$, y por ser $\mathcal{C}$ una cadena se tiene que debe existir un A_i más grande que todos, digamos A_n . Es decir que $A_i \subseteq A_n$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Con lo anterior se tiene que $x_1, \dots, x_n \in A_n$, el cual por estar en $\mathcal{C}$ es linealmente independiente, con lo que concluimos que necesariamente $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Por lo tanto, como B es linealmente independiente se encuentra en S.

Por lo tanto, por *Lema de Zorn* se tiene que S tiene elemento maximal, será denotado por $\overline{B}$ (note que el Lema de Zorn sólo asegura la existencia de $\overline{B}$).

Ahora probaremos que este conjunto que es elemento maximal es base de X, osea que genera a X, puesto que ya se sabe que $\overline{B}$ es un conjunto l.i. (puesto que pertenece a S).

Razonando por contradicción. Supongamos que existe $x_0 \in X$ tal que no se puede escribir como combinación lineal (finita) de elementos de $\overline{B}$.

Sea $\hat{B} = \overline{B} \sqcup \{x_0\}$, veamos que es linealmente independiente: Sean $x_1, \dots, x_{n-1} \in \overline{B}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vemos que si

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda_0} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$$

lo cual es una contradicción, y por lo tanto $\hat{B}$ es linealmente independiente, lo cual contradice la maximalidad de $\overline{B}$. Por lo que se concluye que $\overline{B}$ es base de X. ■

Proposición 15. Existen dos funciones periódicas f,g tal que

$$f(x) + g(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposición 16. Existe una función discontinua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1.5.4. Propiedad de intersección finita, filtros y ultrafiltros

A continuación se estudiará la existencia de ultrafiltros no triviales (Boolean Prime Ideal Theorem), para ello comenzamos con la siguiente definición:

Definición 34 (Filtro). Un filtro sobre un conjunto no vacío X es una colección $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que verifica:

1. $X \in \mathcal{F}$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$.
3. Si $A, B \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Ejemplo. El filtro $\mathcal{F}$ es llamado principal o trivial para algún A_0

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid A_0 \subseteq A\}$$

Definición 35 (Propiedad de intersección finita). Una familia de conjuntos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la propiedad de intersección finita (**PIF**) si toda colección finita $\{G_1, \dots, G_n\} \subseteq \mathcal{G}$ tiene intersección no vacía, es decir:

$$\bigcap_{i=1}^n G_i \neq \emptyset$$

Proposición 17. Todo filtro $\mathcal{F}$ verifica la PIF.

Demostración. Razonando por contradicción supongamos que el filtro $\mathcal{F}$ no cumple la PIF, luego para alguna colección finita $\{F_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n F_i = \emptyset$$

debido a la definición de filtro (2, asegura la clausura para la intersección finita) se tiene que $\emptyset \in \mathcal{F}$, lo cual es una contradicción, pues por la misma definición de filtro (1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$. ■

Proposición 18. Si $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tiene la PIF, entonces existe un filtro $\mathcal{F}$ sobre X tal que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.

Demostración. Veamos que como $\mathcal{G}$ cumple la PIF, luego $\emptyset \notin \mathcal{G}$, además cualquier colección $\{Y_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{G}$ cumple que

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i \neq \emptyset$$

A partir de cualquier $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que tenga la PIF, consideremos la siguiente colección:

$$\mathcal{M} := \{Y \subseteq X \mid \exists \{Y_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{G} \text{ con } \bigcap_{i=1}^n Y_i \subseteq Y\}$$

Veamos que $\mathcal{M}$ es filtro en X .

- i) Veamos que $X \in \mathcal{M}$. Se sabe que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$, por lo tanto para cualquier colección finita (aunque bastaría con encontrar una conveniente) $\{Y\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{G}$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i \subseteq \underbrace{Y_j}_{\forall j \in \{1, \dots, n\}} \subseteq X$$

Por lo que se deduce que $X \in \mathcal{M}$.

- ii) Veamos que $\emptyset \notin \mathcal{M}$. Razonando por contradicción supongamos que $\emptyset \in \mathcal{M}$, osea que existe $\{Y_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{G}$ tal que

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i \subseteq \emptyset$$

y como $\underbrace{\emptyset \subseteq A}_{\forall A \subseteq X} \subseteq X$, se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n Y_i = \emptyset$$

Lo que es una contradicción, puesto que $\mathcal{G}$ cumple la PIF por lo que no existe alguna colección $\{Y_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{G}$ con intersección vacía.

- iii) Veamos que si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{M}$. Veamos que $A, B \in \mathcal{M}$, entonces

$$\exists \{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{G} \text{ con } \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A$$

$$\exists \{B_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{G} \text{ con } \bigcap_{i=1}^m B_i \subseteq B$$

Luego tomando la colección (finita) $\{A_i\}_{i=1}^n \sqcup \{B_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{G}$ se tiene que

$$\underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m B_i \right)}_{\text{Segue siendo intersección finita.}} \subseteq A \cap B$$

Sigue siendo intersección finita.

concluyendo así que $A \cap B \in \mathcal{M}$.

- iv) Sea $A \in \mathcal{M}$ y $B \subseteq X$ tal que $A \subseteq B$, veamos que $B \in \mathcal{M}$, para ello basta con notar que se cumple que

$$\exists \{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{G} \text{ con } \bigcap_{i=1}^n A_i \subseteq A \subseteq B$$

concluyendo así que $B \in \mathcal{M}$.

Por lo tanto $\mathcal{M}$ es filtro, probemos ahora que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{M}$. Para ello veamos que si $G \in \mathcal{G}$ entonces $G \in \mathcal{M}$. Considerando la colección (conveniente) $\{G, H\} \subseteq \mathcal{G}$ (H será un soporte para realizar la intersección finita), luego como $\mathcal{G}$ cumple la PIF nos asegura una intersección no nula $G \cap H \subseteq G$, por lo tanto $G \in \mathcal{M}$. Concluyendo así que para cualquier colección $\mathcal{G}$ que cumple la PIF existe un filtro $\mathcal{M}$ que lo contiene. ■

Definición 36 (Ultrafiltro). Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X se dirá ultrafiltro si:

$$\forall Y \subseteq X \text{ se verifica que } Y \in \mathcal{F} \vee Y^c \in \mathcal{F}$$

Proposición 19. Un filtro $\mathcal{F}$ es ultrafiltro si y solo si $\mathcal{F}$ es maximal (con respecto a la inclusión).

Demostración. ($\rightarrow$) Suponiendo que el filtro $\mathcal{F}$ es maximal, osea que para cualquier filtro $\mathcal{G}$ sobre X , $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ (respecto a la inclusión). Veamos a continuación que es ultrafiltro:

Razonando por contradicción supongamos que $\mathcal{F}$ no es ultrafiltro, esto es, existe $A \subseteq X$ tal que ni $A \in \mathcal{F}$ ni $X \setminus A \in \mathcal{F}$, entonces tomamos las posibles extensiones a $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F} \sqcup \{A\} \text{ o bien } \mathcal{F} \sqcup \{X \setminus A\} \text{ sea filtro}$$

Luego veamos dos posibles casos:

- i) Supongamos que al menos una de las posibles extensiones cumplen la PIF, esto quiere decir que existe un filtro $\mathcal{H}$ que la extiende, esto es:

$$\mathcal{F} \subseteq \underbrace{\mathcal{F} \sqcup \{A\}}_{\text{o bien usando } \mathcal{F} \sqcup \{X \setminus A\}} \subseteq \mathcal{H}$$

lo que contradice la maximalidad del filtro $\mathcal{F}$.

- ii) Supongamos que ninguna de las dos extensiones cumplen la PIF, esto es que existen las colecciones $\{F_i\}_{i=1}^n, \{F'_i\}_{i=1}^m \subseteq \mathcal{F}$ tales que:

$$\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap A = \emptyset \text{ y } \left(\bigcap_{i=1}^m F'_i \right) \cap X \setminus A = \emptyset$$

Luego, se puede decir que:

$$\bigcap_{i=1}^n F_i \subseteq X \setminus A \text{ y } \bigcap_{i=1}^m F'_i \subseteq A$$

pero al intersectar ambas colecciones, debido a su disjunción

$$\left(\bigcap_{i=1}^n F_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^m F'_i \right) = \emptyset$$

lo cual es una contradicción, pues $\mathcal{F}$ cumple la PIF debido a que es filtro.

($\leftarrow$) Suponemos que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro sobre X , osea que

$$\forall A \subseteq X \text{ se verifica que } A \in \mathcal{F} \vee (X \setminus A) \in \mathcal{F}$$

Razonando por contradicción, supongamos que $\mathcal{F}$ no es maximal, para ello digamos que existe $G \subseteq X$ tal que $G \notin \mathcal{F}$ y que $\mathcal{F} \sqcup \{G\}$ es filtro (es el que le gana la maximalidad a $\mathcal{F}$).

Por otro lado, como $\mathcal{F}$ es ultrafiltro y $G \notin \mathcal{F}$, entonces $(X \setminus G) \in \mathcal{F}$, entonces:

$$G \in (\mathcal{F} \sqcup \{G\}) \wedge (X \setminus G) \in \mathcal{F} \subseteq (\mathcal{F} \sqcup \{G\})$$

Luego notemos que $G \cap (X \setminus G) = \emptyset$, por lo tanto $\mathcal{F} \sqcup \{G\}$ no cumple la PIF, lo que contradice que sea filtro, concluyendo que $\mathcal{F}$ es un filtro maximal. ■

Proposición 20. Todo filtro puede ser extendido a un ultrafiltro.

Demostración. Sea X un conjunto no vacío. Sea un filtro sobre X : $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Recordemos que cualquier filtro $\mathcal{F}$ verifica la PIF. Por otro lado definimos el siguiente conjunto

$$\mathcal{Q} := \{\mathcal{G} \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X) \wedge \mathcal{G} \text{ verifica la PIF}^{13}\}$$

Veamos que $\mathcal{Q}$ posee un orden parcial con respecto a la inclusión de conjuntos (como relación):

- i) *Veamos que $\mathcal{Q}$ es refleja:* Sea $Q \in \mathcal{Q}$, luego es fácil ver que $Q \subseteq Q$.
- ii) *Veamos que $\mathcal{Q}$ es antisimétrica:* Sean $Q, R \in \mathcal{Q}$ tal que $Q \subseteq R$ y $R \subseteq Q$, entonces $Q = R$ (doble inclusión).
- iii) *Veamos que $\mathcal{Q}$ es transitiva:* Sean $Q, R, S \in \mathcal{Q}$ tal que $Q \subseteq R$ y $R \subseteq S$, entonces $Q \subseteq S$.

Luego, como $(\mathcal{Q}, \subseteq)$ es orden parcial, deseamos verificar las hipótesis del Lema de Zorn, para ello, sea C cualquier cadena no vacía de $\mathcal{Q}$, luego es posible ver que para cualquier cadena $C \subseteq \mathcal{Q}$ existe una cota superior.

Veamos que la cadena C es un orden total, en particular también es orden parcial, veamos que verifica las hipótesis del Lema de Zorn: Toda cadena K de la cadena C ($K \subseteq C$) posee cota superior, dicha cota superior se define a partir de

$$\bigsqcup_{c \in K} c \in K \subseteq \mathcal{Q}$$

Como toda cadena $K \subseteq C$ posee cota superior **se concluye mediante lema de Zorn** que la cadena C posee elemento maximal denotado $\mathcal{C}$, luego dicho elemento maximal sirve de cota superior para la cadena C en particular, por lo tanto como cualquier cadena C tiene elemento maximal **se**

¹³Así aseguramos que no se suma el conjunto vacío a la colección, entre otras cosas.

concluye mediante el lema de Zorn que $\mathcal{Q}$ posee elemento maximal.

Veamos que el elemento maximal obtenido es el ultrafiltro buscado:

- i) *Veamos que $\mathcal{H}$ es filtro*: Razonando por contradicción, supongamos que $\mathcal{H}$ no es filtro, pero como $\mathcal{H} \in \mathcal{Q}$ se puede afirmar que verifica la PIF, luego existe un filtro $\mathcal{J}$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{J}$, además $\mathcal{J} \in \mathcal{Q}$, lo que contradice la maximalidad de $\mathcal{H}$. Se concluye que el maximal $\mathcal{H}$ es filtro.
- ii) *Veamos que $\mathcal{H}$ es ultrafiltro*: Como $\mathcal{H}$ es un filtro en X y es maximal, se concluye que es ultrafiltro.

Se concluye que para cualquier filtro $\mathcal{F}$, existe un ultrafiltro $\mathcal{H}$ que lo extiende. ■

Resumen: Filtros y sus propiedades

Podemos clasificar lo visto en propiedades

1. Todo filtro tiene la PIF.
2. Todo filtro maximal es ultrafiltro.

y en extensiones

1. Toda colección que tiene la PIF se puede extender a un filtro.
2. Todo filtro se puede extender a un ultrafiltro.

Capítulo 2

Ordinales y cardinales

2.1. Ordinales

2.1.1. Preorden

Definición 37 (Preorden). Sea A una clase no vacía (o conjunto). Una preorden $(A, \leq)$ es una subclase $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ con una relación binaria $\leq$ que satisface:

1. *Refleja*: $x \leq x \Leftrightarrow (x, x) \in \mathcal{R}$.
2. *Transitiva*: Si $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

Ejemplo.

1. Relación de igualdad: Para todo conjunto A , la relación $\{(a, b) | a = b\}$ es un preorden.
2. Orden usual: En $\mathbb{E}$, la relación $\{(x, y) | x \leq y\}$ es un preorden.
3. Contraejemplo con desigualdad estricta: En $\mathbb{E}$, la relación $\{(x, y) | x < y\}$ no es un preorden, puesto que $x < x$.
4. Preorden en $\mathbb{C}$: Se define el preorden $z_1 \leq z_2$ ssi $|z_1| \leq |z_2|$.

Definición 38 (Elemento maximal y cota superior). Sea $(A, \leq)$ un preorden, se define:

1. $m \in A$ se llama elemento maximal en A si para todo $a \in A$, $m \leq a$, entonces $a \leq m$.
2. $a_0 \in A$ se llama cota superior para un subconjunto $B \subset A$ si para todo $b \in B$, $b \leq a_0$.

Proposición 21. Sea $(A, \leq)$ un preorden, si cumple que para $a, b \in A$,

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$$

entonces $(A, \leq)$ es un orden.

2.1.2. Orden parcial y buen orden

Del capítulo anterior es importante recordar lo siguiente:

i) Sea A una clase no vacía (o conjunto). Un *orden (parcial)* $(A, \leq)$ es una subclase $\mathcal{R}$ de $A \times A$ mas una relación binaria $\leq$, que satisface:

1. *Notación:* $x \leq y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R}$.
2. *Refleja:* $x \leq x$.
3. *Antisimétrica:* Si $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$.
4. *Transitiva:* Si $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$.

ii) Un orden parcial $\leq$ en A se dice *buen orden* (o que A está bien ordenado, o que A es ordinal), si todo subconjunto no vacío B de A , posee un primer elemento para $\leq$, es decir:

$$\exists x_0 \in B \text{ tq } \forall y \in B, x_0 \leq y$$

Luego:

1. Todo conjunto $(X, \leq)$ bien ordenado, se dice *ordinal*.
2. $(\mathbb{N}, \leq)$ es un ordinal, denotado ω .

Ejemplo. A continuación se verá que en los naturales impares, el orden: $n \leq_e m \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$, no es buen orden.

Desarrollando es posible notar que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{m}$ es equivalente a decir que $m \leq n$. Por otro lado, se sabe que $(\mathbb{N}, \leq)$ es un buen orden, por lo tanto todos los subconjuntos (en particular los impares) con el orden $\leq$ tienen primer elemento. Sea n_0 el primer elemento de los impares, quiere decir que $n_0 \leq n$ para todo n natural impar, luego $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}$, lo que implica que $m \leq_e n_0$, luego los naturales impares con el orden $\leq_e$ no tienen primer elemento, por lo tanto no son buen orden.

RECORDEMOS LA DEFINICIÓN DE IDEAL: Sea $(A, \leq)$ un orden parcial. Se dice que $S \subseteq A$ es ideal si verifica que:

$$s \in S \wedge y \in A \wedge y \leq x \Rightarrow y \in S$$

Proposición 22. Toda unión y toda intersección de ideales de $(A, \leq)$ es ideal en A .

Demostración. Página 37 de [3] ■

RECUERDE LA DEFINICIÓN DE INTERVALO INICIAL: En un conjunto $B \subseteq X$, $x \in X$, se define su *intervalo inicial* hasta x como:

$$S_B(x) := \{y \in B : y \leq x \wedge y \neq x\}$$

Ejemplo. Comparando las nociones de ideal e intervalo inicial, veamos que en $(X, \leq)$:

1. $X, \emptyset$ son ideales.
2. $\emptyset$ es intervalo inicial, pero X no es intervalo inicial.

Teniendo en cuenta la noción de intervalo inicial veremos el siguiente principio:

Teorema 9 (Principio de inducción transfinita (PIT)). Sea $(X, \leq)$ conjunto bien ordenado y $A \subseteq X$ no vacío tal que

$$\forall x \in X, (S_X(x) \subseteq A \Rightarrow x \in A)$$

Entonces $A = X$.

Demostración. Razonando por contradicción, suponiendo que $A \neq X$, entonces $X \setminus A$ es no vacío, luego como $X \setminus A$ es subconjunto de un buen orden posee un primer elemento m . Utilizando la hipótesis, el intervalo inicial hasta m cumple $S_X(m) \subseteq A$, y por ende $m \in A$, lo que lleva a contradicción, se concluye que $A = X$. ■

Comentario. ¿Qué se usa en la demostración? Se utiliza que X es bien ordenado.

Observación.

1. El PIT generaliza el ppio. de inducción presente en los naturales, donde $X = \mathbb{N}$.
2. En $X = \mathbb{N}$ se lee

$$\forall n + 1 \in \mathbb{N}, (\underbrace{\{0, 1, \dots, n, n + 1\}}_{\text{Intervalo inicial}} \subseteq A \Rightarrow n + 1 \in A)$$

3. PIT funciona sobre cualquier conjunto bien ordenado, por ejemplo $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ (pero lamentablemente $\leq_{\mathbb{R}}$ no es conocido).

2.1.3. Isomorfismo entre buenos órdenes

A continuación se introduce la noción de un morfismo entre órdenes, o sea una función que preserve propiedades del orden:

Definición 39 (Isomorfismo entre órdenes). Diremos que los conjuntos bien ordenados $(X_1, \leq_1)$ y $(X_2, \leq_2)$ son isomorfos si existe $f : X_1 \rightarrow X_2$ tal que

1. f es biyección de X_1 a X_2 .
2. f preserva el orden, o sea que

$$x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y)$$

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2n$, donde $n \leq m \Rightarrow 2n \leq 2m$ (usando los órdenes usuales).

Proposición 23 (Unicidad del isomorfismo). Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos bien ordenados, y si las funciones $f, g : (A, \leq_A) \rightarrow (B, \leq_B)$ son isomorfismos, entonces $f = g$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} \subseteq A$ conjunto definido por:

$$\mathcal{A} := \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$$

Ver que $\mathcal{A}$ es no vacío: Notar que si $a_0 \in A$ es el primer elemento de A (se sabe que existe por buen orden) con el orden $\leq_A$, como f, g son isomorfismos entonces para cualquier $f(a), g(a) \in B$ se cumple que $f(a_0) \leq_B f(a)$ y además $g(a_0) \leq_B g(a)$.

Ver que entonces $f(a_0) = g(a_0)$, para razonando hacia contradicción se supondrá que $f(a_0) \neq g(a_0)$, entonces $f(a_0) <_B g(a_0)$ con $g(a_0) \in B$, o bien $g(a_0) <_B f(a_0)$ con $f(a_0) \in B$, no simultáneo bajo el supuesto de que no se alcanza la igualdad, lo que es contradicción. Se concluye que $f(a_0) = g(a_0)$, y por ello $a \in \mathcal{A}$, siendo un conjunto no vacío.

Ver que $\mathcal{A} = A$: Buscando utilizar el principio de inducción transfinita, entonces tomando $a_0 <_A \bar{a}$ con algún $\bar{a} \in A$ se define el siguiente conjunto no vacío (a_0 trivialmente pertenece):

$$S_A(\bar{a}) := \underbrace{\{a \in A \mid a <_A \bar{a} \wedge f(a) = g(a)\}}_{\text{Suponiendo la contención}} \subseteq \mathcal{A}$$

A continuación se verá si acaso $\bar{a} \in \mathcal{A}$, vemos que $S_A(\bar{a})^c \subseteq A$, por lo tanto $(S_A(\bar{a})^c, \leq_A)$ es un conjunto bien ordenado y por ende posee primer elemento, notar que son dos los posibles casos, puesto que se niega la proposición que compone a $S_A(\bar{a})$.

$$\begin{aligned} & \neg (a <_A \bar{a} \wedge f(a) = g(a)) \\ &= \neg (a <_A \bar{a}) \vee \neg (f(a) = g(a)) \end{aligned}$$

1. $\bar{a}$ es el primer elemento de $S_A(\bar{a})^c$, además que los conjuntos

$$f(S_A(\bar{a})^c) \subseteq B \wedge g(S_A(\bar{a})^c) \subseteq B$$

son bien ordenados con el orden $\leq_B$, entonces $f(\bar{a}) <_B f(a)$ y $g(\bar{a}) <_B g(a)$ si $\bar{a} <_A a$.

Razonando por contradicción, se supondrá que $f(\bar{a}) \neq g(\bar{a})$, entonces

$$f(\bar{a}) <_B g(\bar{a}), \text{ o bien } g(\bar{a}) <_B f(\bar{a})$$

tomando la relación de orden de forma estricta puesto que estamos suponiendo que no se alcanza la igualdad. Debido a la definición de

$S_A(\bar{a})$ es directo afirmar que $f(S_A(\bar{a})) = g(S_A(\bar{a}))$, luego como f, g son biyectivas (basta con la inyectividad¹) entonces

$$\begin{aligned} \underbrace{f(S_A(\bar{a}))}_{=} \cap f(S_A(\bar{a})^c) &= \emptyset \\ \underbrace{g(S_A(\bar{a}))}_{=} \cap g(S_A(\bar{a})^c) &= \emptyset \\ \Rightarrow g(S_A(\bar{a})) \cap f(S_A(\bar{a})^c) &= \emptyset \\ \Rightarrow f(S_A(\bar{a})) \cap g(S_A(\bar{a})^c) &= \emptyset \end{aligned}$$

Utilizando lo anterior, tomando que $f(\bar{a}) <_B g(\bar{a})$ (viendo que $g(\bar{a}) <_B f(\bar{a})$ es análogo), donde $g(\bar{a})$ es el primer elemento de $g(S_A(\bar{a})^c)$, entonces

$$f(\bar{a}) \in g(S_A(\bar{a})) = f(S_A(\bar{a}))$$

entonces $\bar{a} \in S_A(\bar{a})$ lo que es contradicción, por lo tanto $f(\bar{a}) = g(\bar{a})$.

2. Suponiendo que existe algún a^* tal que $a_0 <_A a^* <_A \bar{a}$ y $f(a^*) \neq g(a^*)$, contradice que se haya supuesto la contención $S_A(\bar{a}) \subseteq \mathcal{A}$ que es parte de la hipótesis de la inducción transfinita, luego como no existe dicho a^* basta con trabajar el caso anterior para concluir.

Luego como $\bar{a} \in \mathcal{A}$, se concluye mediante el *principio de inducción transfinita* que $A = \mathcal{A}$, y como f, g son biyecciones entonces es posible concluir que $f(A) = g(A) = B$, queda demostrado entonces que $f = g$. ■

Proposición 24. El mapeo

$$\begin{aligned} M : (X, \leq) &\rightarrow (\{\text{intervalos iniciales en } X\}, \subseteq) \\ x &\mapsto M(x) = S_X(x) \end{aligned}$$

es isomorfismo entre X y la clase de intervalos iniciales de X .

Demostración. Para probar que es isomorfismo se verifican las dos condiciones:

1. *Verificar que se preserva el orden:* En efecto, si $x \leq y$, claramente $S_X(x) \subseteq S_X(y)$ ya que $\forall z$ tal que $z < x \leq y$ entonces $z < y$, luego se preserva el orden con la inclusión de los intervalos iniciales.
2. *Biyectividad:*
 - a) *Inyectividad:* Recuerde que si $x \neq y$, se tiene $S_X(x) \neq S_X(y)$, lo que prueba que es inyectiva (contrarrecíproca). En efecto, si $x < y$ entonces para $x \in S_X(y)$ (pues $x < y$) pero $x \notin S_X(x)$, teniendo un elemento al menos de diferencia entre dichos intervalos iniciales².
 - b) *Sobreyectividad:* La sobreyectividad es directa de que a cada $S_X(x)$ se le asocia x mediante la preimagen.

¹Ver anexo, propiedades de la intersección.

²El intervalo inicial no toma el "límite".

Concluyendo así la *bijectividad*. ■

Comentario. La proposición anterior asegura un isomorfismo mapeando desde un punto hacia un intervalo inicial hasta ese punto.

Corolario 9.1. La clase de ideales de X está bien ordenada con la inclusión.

Demostración. Basta notar que

$$\underbrace{\{\text{intervalos iniciales en } X\}}_{\text{Ordenados con la inclusión}} \sqcup \{X\} = \{\text{ideales de } X\}$$

Como los intervalos iniciales son bien ordenados para la inclusión, además como $\{X\}$ es el término maximal para la misma inclusión, la unión va a seguir siendo buen orden, así se concluye que los ideales son bien ordenados. ■

Teorema 10 (Comparabilidad de ordinales). Si W, X son conjuntos bien ordenados, una y solo una de las siguientes tres son ciertas:

1. W es isomorfo a X .
2. W es isomorfo a un ideal de X .
3. X es isomorfo a un ideal de W .

Demostración. Revisar el texto [3] de la bibliografía.

Ejemplo. 1. $f : \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n) = n - 1$ es isomorfismo.

2. $\{a, b, c\}$ con $a < b < c$ es isomorfo al ideal $\{0, 1, 2\}$ de $\mathbb{N}$.

3. $\{1, 2, \dots; 0\}$ no es isomorfo a $\mathbb{N}$ (el orden de los elementos importa).

4. $W = \mathbb{N}$ es isomorfo a $\{1, 2, 3, \dots\}$, ideal de $X = \{1, 2, 3, \dots; 0\}$ ($f_3(n) = n + 1$, ojo con el orden).

Teorema 11. La clase de todos los conjuntos bien ordenados está bien ordenada con el orden $W_1 \leq W_2 \Leftrightarrow W_1$ es isomorfo a un ideal de W_2 .

Demostración. Propuesta como ejercicio, pruebe que es orden total.

Si $\mathcal{C}$ es una clase no vacía de conjuntos bien ordenados, y si $W_2 \in \mathcal{C}$, cada $W_1 < W_2$ es isomorfo a un ideal A_1 de W_2 . Como la clase de ideales de W_2 está bien ordenada con la inclusión, existe primer elemento y concluimos. ■

Ejercicio 3. ¿El conjunto $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ con el orden presentado a qué es isomorfo?

2.1.4. Construcción del buen orden de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

A continuación se desarrollará el buen orden de los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ con el fin de poder aplicar lo ya estudiado y profundizar la noción adquirida hasta este punto.

Buen orden de $\mathbb{Z}$:

Notar que es posible reordenar el conjunto $\mathbb{Z}$ de la siguiente forma:

$$0, -1, 1, 2, -2, 3, -3, \dots, n, -n, \dots$$

lo que permite organizar un primer elemento como ocurre en $\mathbb{N}$ al arrojar $\pm\infty$ hacia el mismo lado del orden. Para lograr lo anterior, es fácil pensar en el siguiente orden en $\mathbb{Z}$:

$$x \leq_{\mathbb{Z}} y := \begin{cases} \text{si} & |x| = |y| \\ \text{o bien} & |x| < |y| \end{cases} \wedge x \leq y$$

Ver que $\leq_{\mathbb{Z}}$ es un orden parcial:

1. *Refleja*: Sea $x \in \mathbb{Z}$, luego $|x| = |x|$ y $x \leq x$, puesto que el orden usual tiene la propiedad refleja, lo que implica que $x \leq_{\mathbb{Z}} x$.
2. *Antisimétrica*: Sean $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces si:

$$x \leq_{\mathbb{Z}} y \wedge y \leq_{\mathbb{Z}} x \Rightarrow \left(\underbrace{(|x| < |y|)}_a \vee \underbrace{(|x| = |y| \wedge x \leq y)}_b \right) \wedge \left(\underbrace{(|y| < |x|)}_c \vee \underbrace{(|y| = |x| \wedge y \leq x)}_d \right)$$

Veamos cómo distribuyen estas proposiciones lógicas:

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

Pero como hay condiciones que no pueden darse simultáneamente puesto que son excluyentes, tales como por ejemplo a y c:

$$\Rightarrow (a \vee b) \wedge (c \vee d) = (b \wedge d)$$

$$\Rightarrow |x| = |y| \wedge x \leq y \wedge y \leq x$$

Luego, por antisimetría del orden usual

$$\Rightarrow x = y$$

Teniendo la antisimetría para el orden $\leq_{\mathbb{Z}}$.

3. *Transitiva*: Sean $x, y, z \in \mathbb{Z}$, donde:

$$x \leq_{\mathbb{Z}} y \wedge y \leq_{\mathbb{Z}} z \Rightarrow \left(\underbrace{(|x| < |y|)}_a \vee \underbrace{(|x| = |y| \wedge x \leq y)}_b \right) \wedge \left(\underbrace{(|y| < |z|)}_c \vee \underbrace{(|y| = |z| \wedge y \leq z)}_d \right)$$

De lo anterior se tienen 4 posibles casos que veremos a continuación:

$$a) |x| < |y| < |z| \Rightarrow |x| < |z| \Rightarrow x \leq_{\mathbb{Z}} z.$$

- b) $|x| < |y| = |z| \Rightarrow |x| < |z|$ y se concluye.
- c) $|x| = |y| < |z| \Rightarrow |x| < |z|$ y se concluye.
- d) $|x| = |y| = |z|$ y $x \leq y \leq z$, luego se tiene en particular que $x \leq z$, por lo tanto $x \leq_{\mathbb{Z}} z$.

Se concluye que $\leq_{\mathbb{Z}}$ tiene la transitividad

Se concluye que $\leq_{\mathbb{Z}}$ es un orden parcial en $\mathbb{Z}$. Ahora queda ver si todo $Z \subseteq \mathbb{Z}$ posee primer elemento para concluir que es buen orden.

Ver que existe el primer elemento para los subconjuntos: Para probar que todo subconjunto $B \subseteq \mathbb{Z}$ posee primer elemento, hay que estudiar 2 casos, debido a que es comprobable que 0 es el primer elemento de $\mathbb{Z}$, para ello se supone que con el orden $\leq_{\mathbb{Z}}$, entonces existe $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z \leq_{\mathbb{Z}} 0$, y se concluye que $z = 0$. Los casos son:

1. $0 \in B$.
2. $0 \notin B$

Caso 1: Se desea probar que: Si $0 \in B$, entonces 0 es el ínfimo de B. Sea $a \leq_{\mathbb{Z}} 0$, entonces

$$|a| = |0| = 0 \wedge a \leq 0$$

o bien

$$|a| < |0| = 0$$

pero del primer caso se tiene que $|a| = 0$ (def. de ínfimo), entonces $a = 0$, mientras que en el segundo caso, no existe $a \in \mathbb{Z}$ tal que $|a| < 0$. Se concluye que si $0 \in B$, entonces 0 es el primer elemento de B .

Caso 2: Sea $B \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $0 \notin B$, se tiene que $0 \in \mathbb{Z} \setminus B$ (el cero se encuentra en su complemento), luego es posible notar que existe al menos un intervalo inicial (siempre que hablemos de intervalo inicial, se hace referencia a los i.i. no vacíos) $S_{\mathbb{Z}}(m) \subseteq \mathbb{Z} \setminus B$, donde m es el sucesor inmediato del cero (-1), entonces es posible definir la clase no vacía de:

$$\mathfrak{S}_B := \{\text{Intervalos iniciales disjuntos con } B \subseteq \mathbb{Z}\}$$

1. *Ver que $\mathfrak{S}_B$ es un orden parcial con la inclusión ($\subseteq$):* Como $\subseteq$ es un orden conocido, se concluye.
2. *Ver que cualquier cadena $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{S}_B$ posee cota superior:* Se propone la siguiente cota:

$$C = \bigsqcup_{c \in \mathcal{C}} c$$

Luego, como la unión de intervalos iniciales sobre un conjunto con un orden total (pues son todos comparables y con la transitividad se

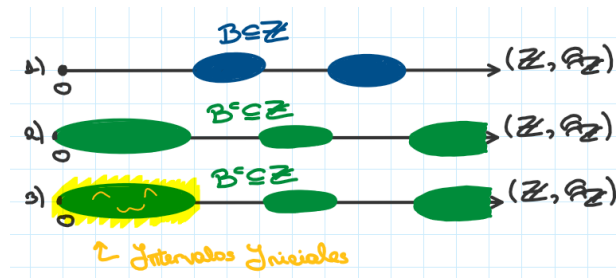


Figura 2.1: Conjunto $\mathbb{Z}$ bien ordenado, con un subconjunto $B \subseteq \mathbb{Z}$ cualquiera, tal que $0 \notin B$.

asegura la contención) es un intervalo inicial, se concluye que $C \in \mathcal{C} \subseteq \mathfrak{S}_B$, y evidentemente para cada cadena $\mathcal{C}$, para todos sus elementos c , C funciona como cota superior.

Luego, se concluye mediante el lema de Zorn que $\mathfrak{S}_B$ posee elemento maximal, se denotará por $S_X(b)$. Ver que b es mínimo en B :

1. *Ver que $b \in B$* : Razonando por contradicción, suponiendo que $b \notin B$, luego se descarta la situación en que existe un $a \in B$ tal que $a \leq_{\mathbb{Z}} b$, pues la clase de intervalos iniciales se construye basándose en el complemento de B . Por otro lado, como $b \notin B$, luego $S_X(b) \subseteq S_X(b) \sqcup \{b\}$, donde $S_X(b) \sqcup \{b\}$ es intervalo inicial, pues un intervalo inicial donde se une el sucesor inmediato sigue siendo intervalo inicial, pero como $b \notin B$ entonces $(S_X(b) \sqcup \{b\}) \in \mathfrak{S}_B$, lo que contradice la maximalidad de $S_X(b)$. Se concluye que $b \in B$.
2. *Veamos que b es mínimo*: Razonando por contradicción, suponiendo que b no es mínimo de B , osea que existe $a \in B$ tal que $a \leq_{\mathbb{Z}} b$, luego por definición de intervalo inicial $a \in S_B(b)$, lo cual es una contradicción, pues $S_B(b)$ y B son disjuntos. Se concluye que b es mínimo de B .

Se concluye que todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ posee primer elemento.

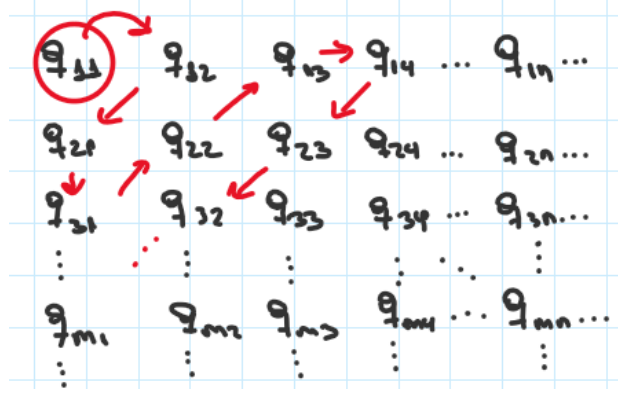
Buen orden de $\mathbb{Q}$:

Note que es posible ordenar el conjunto $\mathbb{Q}$ de la siguiente forma: Figura 2.2. Dónde se describe $\mathbb{Q}$ mediante un producto cartesiano, pues todo $q \in \mathbb{Q}$ se escribe de la forma $\frac{n}{m} = q$ donde $n \in (\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$ y $m \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \leq)$, donde $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ están con sus buenos órdenes.

Lo anterior se representa en la Figura 2.2, donde las filas son $\mathbb{Z}$ con su buen orden y las columnas son $\mathbb{N}$ con su buen orden (los índices de la figura denotan sólo la posición del elemento de $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ respectivamente.)

Sean $(n_i, m_i) \in \mathbb{Q}$ con escritos de la forma ya explicitada antes, donde $i \in \{1, 2\}$, se define el orden $\leq_{\mathbb{Q}}$ como:

$$(n_1, m_1) \leq_{\mathbb{Q}} (n_2, m_2) \Leftrightarrow (n_1 \leq_{\mathbb{Z}} n_2) \vee (n_1 = n_2 \wedge m_1 \leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}} m_2)$$

Figura 2.2: Buen orden de $\mathbb{Q}$.

Ver que $\leq_{\mathbb{Q}}$ es un orden parcial:

1. *Refleja*: Sea $q = (n, m) \in \mathbb{Q}$, luego $n \leq_{\mathbb{Z}} n$ y, o bien también se cumple que $n = n \wedge m \leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}} m$, luego se hereda la propiedad refleja de $\leq_{\mathbb{Z}}$, y de $\leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$, entonces $q = q$.
2. *Antisimétrica*: Sean $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$, entonces si:

$$q_1 \leq_{\mathbb{Q}} q_2 \quad \wedge \quad q_2 \leq_{\mathbb{Q}} q_1$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{(n_1 \leq_{\mathbb{Z}} n_2)}_a \vee \underbrace{(n_1 = n_2 \wedge m_1 \leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}} m_2)}_b \right) \wedge \left(\underbrace{(n_2 \leq_{\mathbb{Z}} n_1)}_c \vee \underbrace{(n_2 = n_1 \wedge m_2 \leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}} m_1)}_d \right)$$

Luego note como distribuyen las proposiciones lógicas:

$$(a \vee b) \wedge (c \vee d) = (a \wedge c) \vee (a \wedge d) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge d)$$

De lo anterior se tienen 3 posibles casos:

- a) $a \wedge c$: Se concluye por la antisimetría de $\leq_{\mathbb{Z}}$.
- b) $b \wedge d$: Se concluye por la antisimetría de $\leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$, o bien se podría usar la igualdad en $\mathbb{Z}$ para usar la antisimetría en $\mathbb{Z}$.
- c) $a \wedge d$ o bien $c \wedge b$: Se concluye porque al tener en b,d la igualdad $n_1 = n_2$, se puede volver al primer caso para concluir por antisimetría de $\leq_{\mathbb{Z}}$.

Se concluye la antisimetría.

3. *Transitividad*: Sean $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$ tales que: $q_1 \leq_{\mathbb{Q}} q_2$ y $q_2 \leq_{\mathbb{Q}} q_3$, entonces

$$\Rightarrow \left(\underbrace{(n_1 \leq_{\mathbb{Z}} n_2)}_a \vee \underbrace{(n_1 = n_2 \wedge m_1 \leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}} m_2)}_b \right) \wedge \left(\underbrace{(n_2 \leq_{\mathbb{Z}} n_3)}_c \vee \underbrace{(n_2 = n_3 \wedge m_2 \leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}} m_3)}_d \right)$$

Luego las proposiciones lógicas distribuyen como ya se señaló en la demostración de la antisimetría, entonces hay casos:

- a) $a \wedge c$: Se concluye por la transitividad de $\leq_{\mathbb{Z}}$.
- b) $b \wedge d$: Se concluye por la transitividad de $\leq_{\mathbb{N} \setminus \{0\}}$, o bien, se podría usar la igualdad en $\mathbb{Z}$ para usar la transitividad en $\mathbb{Z}$.
- c) $a \wedge d$ o bien $c \wedge b$: Se concluye porque al tener en b,d la igualdad $n_1 = n_2$, se puede volver al primer caso para concluir por transitividad de $\leq_{\mathbb{Z}}$.

Se concluye que $\leq_{\mathbb{Q}}$ es un orden parcial.

Ver el primer elemento para los subconjuntos: Para esta demostración, se tienen dos casos (análogo al caso en $(\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}})$). Sea $B \subseteq \mathbb{Q}$

1. $0 \in B$.
2. $0 \notin B$

Caso 1: Se desea probar que: Si $0 \in B$, entonces 0 es el ínfimo de B. Sea $p = (n_p, m_p) \leq_{\mathbb{Q}} 0$, entonces

$$n_p \leq_{\mathbb{N}} 0 \Rightarrow n_p = 0$$

o bien

$$n_p = 0 \wedge m_p \leq m_0$$

pero del primer caso se tiene que $p = \frac{n_p}{m_p}$ con $n_p = 0$, entonces se concluye por def. de ínfimo. En el segundo caso se concluye porque $n_p = 0$ directamente.

Caso 2: Utilizando la misma idea de la demostración utilizada para el buen orden de $\mathbb{Z}$, considerando $B \subseteq \mathbb{Q}$, se toma la clase $\mathfrak{S}_B$ no vacía de los intervalos iniciales, dicha clase es un orden parcial con la inclusión y el candidato a cota superior en la cadena es la unión (análogo).

Finalmente *se concluye mediante lema de Zorn* que la clase de los ideales basada en el conjunto B, posee elemento maximal, lo denotamos $S_X(b)$. Veamos que b es mínimo en B :

1. *Veamos que $b \in B$:* Razonando por contradicción, suponemos que $b \notin B$, luego se descarta la situación en que existe un $a \in B$ tal que $a \leq_{\mathbb{Q}} b$, pues la clase de intervalos iniciales se construye basándose en el complemento de B . Por otro lado, como $b \notin B$, luego $S_X(b) \subseteq S_X(b) \sqcup \{b\}$, donde $S_X(b) \sqcup \{b\}$ es intervalo inicial, pues un intervalo inicial donde se une el sucesor inmediato sigue siendo intervalo inicial, pero como $b \notin B$ entonces $(S_X(b) \sqcup \{b\}) \in \mathfrak{S}_B$, lo que contradice la maximalidad de $S_X(b)$. Se concluye que $b \in B$.
2. *Veamos que b es mínimo:* Razonando por contradicción, suponemos que b no es mínimo de B , osea que existe $a \in B$ tal que $a \leq_{\mathbb{Q}} b$, luego por definición de intervalo inicial $a \in S_B(b)$, lo cual es una contradicción, pues $S_B(b)$ y B son disjuntos. Se concluye que b es mínimo de B .

Se concluye que todo subconjunto de $\mathbb{Q}$ posee primer elemento. Entonces $\mathbb{Q}$ es bien ordenado con $\leq_{\mathbb{Q}}$.

Buscando generalizar se propone la siguiente definición, que formaliza la idea detrás de las construcciones anteriormente presentadas.

Definición 40 (Orden lexicográfico). Se define el *orden lexicográfico* en un producto $A \times B$ de dos conjuntos $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$, donde como:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (a_1 \leq_A a_2) \vee (a_1 = a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2)$$

Ejercicio 4. Demuestre que el orden lexicográfico de un producto de buenos órdenes es un buen orden.

Comentario. Note que es posible definir $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ fácilmente como producto cartesiano de cosas bien ordenadas, de hecho una definición muy rigurosa usando herramientas del álgebra, se puede realizar mediante el producto cartesiano a partir del conjunto de los números naturales y utilizando la relación de equivalencia para obtener conjuntos cocientes.

2.2. Cardinales

Definición 41 (Conjuntos de igual cardinal). Dos conjuntos A, B se diran de igual cardinal si existe una función $f : A \rightarrow B$ biyectiva. Se denota $|A| = |B|$.

Es importante notar la siguiente proposición, se propone intentar la demostración.

Proposición 25. En la clase universal U , tener igual cardinal es una relación de equivalencia, osea que cumple lo siguiente:

1. Refleja: $|A| = |A|$
2. Simétrica: Si $|A| = |B|$, entonces $|B| = |A|$.
3. Transitiva: Si $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$, entonces $|A| = |C|$.

Demostración. Veamos la relación de equivalencia por definición:

- *Reflexiva:* Sea A un conjunto, entonces $id_A : A \rightarrow A$ es una biyección de A en sí mismo, luego por la definición de la igualdad del cardinal se concluye que $|A| = |A|$.
- *Simetría:* Sean dos conjuntos A, B con $|A| = |B|$, es decir, existe una biyección $f : A \rightarrow B$. Luego, la inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ existe y es biyección de B a A , con lo que se concluye que $|B| = |A|$.
- *Trasitiva:* Sean los conjuntos A, B, C tales que $|A| = |B|$ y $|B| = |C|$, es decir que existen las biyecciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$, luego la composición $g \circ f : A \rightarrow C$ existe y es biyección de A a C , con lo que se concluye que $|A| = |C|$.

Se concluye que tener igual cardinal es una relación de equivalencia. ■

Definición 42 (Cardinal de un conjunto). Sea $[A]$ la clase de equivalencia de un conjunto A definida por

$$[A] := \{B \text{ es conjunto} \mid \exists f : A \rightarrow B \text{ biyectiva}\}$$

A la clase anterior se le denomina el cardinal de A .

Comentario. Note que $[A]$ podría no ser conjunto, peor aún, no se puede escoger siempre un elemento de $[A]$.

Solución: Trabajar siempre con conjuntos, y no mencionar la clase $[A]$.

Observación. Los cardinales y los ordinales difieren, un ejemplo de ello es:

$$\begin{aligned} A &:= \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \\ B &:= \{1, 2, 3, \dots, 0\} \end{aligned}$$

donde es posible notar que poseen igual cardinal ($f(n) = n$ es biyección), pero son ordinales diferentes (no son isomorfos), pues el orden importa.

Notación. Sea X conjunto, se denota:

$$2^X := \{f : X \rightarrow \{0, 1\}, f \text{ es función}\} = \mathcal{F}(X, \{0, 1\})$$

Más general, $A^B := \mathcal{F}(B, A)$ funciones desde B a A .

Teorema 12. Se cumple que

$$|2^X| = |\mathcal{P}(X)|$$

Demostración. La idea de la demostración es simple, para cada $A \subseteq X$, sea $\mathbb{1}_A(x)$ la función indicatriz del conjunto A, es decir, 1 si $x \in A$ y 0 si no es el caso. Sea la función

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{P}(X) &\rightarrow 2^X \\ A \subseteq X &\mapsto \mathcal{F}(A) = \{f \mid f : A \rightarrow \{0, 1\} \text{ es función}\} \subseteq 2^X \end{aligned}$$

considerando $\mathcal{F}(A) = \mathbb{1}_A$. Veamos que $\mathcal{F}$ es una biyección.

- i) *Inyectividad:* Si $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{A'} \Rightarrow A = A'$. Supongamos que $A \neq A'$, podemos suponer que existe $x \in A$ tal que $x \notin A'$. Para ese x $1 = \mathbb{1}_A(x) \neq \mathbb{1}_{A'}(x) = 0$, contradicción. Luego $\mathcal{F}$ es inyectiva.
- ii) *Sobreyectividad:* Veamos que en $\mathcal{F}$ a cada $f \in 2^X$, $A := f^{-1}(\{1\})$ es tal que $f = \mathbb{1}_A = \mathcal{F}(A)$.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es una biyección, se concluye que $|2^X| = |\mathcal{P}(X)|$. ■

Definición 43. $|A| \leq |B|$ si existe $f : A \rightarrow B$ función inyectiva. Si no existe biyección^a entre A y B, diremos $|A| < |B|$ o $|A| \neq |B|$.

^aOsea no debe existir una sobreyección entre A y B

Ejemplo. 1. $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ porque $f(n) = n$ es inyectiva (inyección, embedido).

2. Más general, si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.

3. $|\mathbb{Z}| \leq |\mathbb{N}|$ porque $f(0) = 0, f(1) = 1, f(-1) = 2, f(2) = 3, f(-2) = 4, \dots$, etc. es inyección.

Proposición 26. Si existe una función sobreyectiva $f : A \rightarrow B$, entonces $|B| \leq |A|$.

Demostración. Como f es sobreyectiva, ■

Teorema 13 (Teorema fundamental de Cantor). Para todo conjunto X, $|X| < |2^X|$.

Demostración. Teniendo en mente que $|2^X| = |\mathcal{P}(X)|$.

i) *Inyectividad:* Sea la función:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : X &\rightarrow 2^X \\ a \in X &\mapsto \mathcal{F}(a) = \mathbb{1}_{\{a\}} \in 2^X \end{aligned}$$

La inyección para ver que $|X| \leq |2^X|$ es directa, pues si $\mathbb{1}_{\{a\}} = \mathbb{1}_{\{a'\}} \Rightarrow a = a'$. Supongamos (por contrarrecíproca) que $a \neq a'$, luego basta ver que $(a, 1) \notin \mathbb{1}_{\{a'\}}$, entonces $\mathbb{1}_{\{a\}} \neq \mathbb{1}_{\{a'\}}$, concluyendo.

- ii) *No sobreyectividad*: Para lo que sigue, se considera $\mathcal{P}(X)$ en lugar de 2^X . Sea una función cualquiera

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : \quad X &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ a \in X &\mapsto \mathcal{G}(a) \in \mathcal{P}(X) \end{aligned}$$

Probemos que $\mathcal{G} : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ no puede ser sobreyectiva: Sea $B \subseteq X$ definida por

$$B := \{x \in X \mid \underbrace{x \notin \mathcal{G}(x)}_{\text{Note que } \mathcal{G}(x) \subset X}\} \in \mathcal{P}(X)$$

A continuación probemos que B no puede ser imagen por $\mathcal{G}$ de ningún elemento de X . Razonamos por contradicción, para ello supongamos que existe $a \in X$ tal que $\mathcal{G}(a) = B$, de se tienen dos casos:

- i) $a \in B = \mathcal{G}(a)$, pero al estar en B , de la definición se tiene que $a \notin \mathcal{G}(a)$, contradicción.
- ii) En el segundo caso, como $a \notin B$, se tiene que $a \in \mathcal{G}(a) = B$, lo que nos lleva a contradicción.

Finalmente se concluye la no existencia de la sobreyectividad, teniendo que no puede darse la igualdad de cardinales.

■

El siguiente corolario es muy importante, ya que es la aplicación del teorema a un conjunto muy usado en la matemática y en la computación: $\mathbb{N}$.

Corolario 13.1 (Teorema fundamental de Cantor en $\mathbb{N}$). El conjunto $\mathbb{N}$ cumple que $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$.

Demostración. La demostración es directa, pues basta con tomar $X = \mathbb{N}$ al teorema anterior. ■

Definición 44 (Cardinal finito). Diremos que A es finito si

$$|A| < |\mathbb{N}|$$

Definición 45 (Cardinal numerable). Diremos que A es numerable si

$$|A| \leq |\mathbb{N}|$$

Teorema 14. El cardinal α es finito si y sólo si $\alpha \in \mathbb{N}$.

Observación. $\mathbb{N}$ es cardinal no finito, puesto que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{N}|$, lo que es contradictorio, no obstante $\mathbb{N}$ es numerable, pues $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{N}|$

Corolario 14.1. $\aleph_0$ es el primer cardinal no finito.

Demostración. Si α es cardinal no finito, entonces $\alpha \geq |\aleph_0|$, esto es, existe una inyección de $\aleph_0$ en A (el conjunto con cardinal α). Por otro lado como $\aleph_0$ no es finito, se concluye. ■

Ejercicio 5. Probar que A tiene cardinal infinito si existe $B \subset A$ tal que los cardinales de A y B son los mismos.

2.2.1. Hipótesis del continuo (CH)

Entre $|\aleph_0|$ y $2^{|\aleph_0|}$ bi hay ningún otro cardinal diferente, esto es, si $|\aleph_0| \leq \alpha \leq 2^{|\aleph_0|}$, entonces

$$\alpha = |\aleph_0| \vee \alpha = 2^{|\aleph_0|}$$

luego con esto en mente es importante saber que:

- Gödel demostró que si (ZF) es consistente, entonces también (ZF) + (CH) es consistente.
- Cohen demostró que si (ZF) es consistente, entonces (ZF) + no (CH) también es consistente.

En otras palabras, (CH) es independiente de los axiomas de la teoría de conjuntos. El mundo escogió vivir pensando que (CH) es cierta.

Teorema 15 (Cantor). Se cumple que

$$\underbrace{|\mathbb{R}|}_{c:=} = |\aleph_0^{\aleph_0}| = \underbrace{|\mathcal{P}(\aleph_0)|}_{=:2^{|\aleph_0|}}$$

Ejercicio 6. La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Ejercicio 7. Los polinomios reales a coeficientes enteros de grado menor que n (n fijo), es un conjunto numerable.

Ejercicio 8. Si A, B son numerables $A \times B$ también lo son.

2.2.2. Aritmética de cardinales

Definición 46. Dados dos conjuntos A, B con $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$:

1. $\alpha + \beta := |A \sqcup B|$ con A y B conjuntos disjuntos.
2. $\alpha\beta := |A \times B|$.
3. $\alpha^\beta := |A^B|$.

Teorema 16 (Cantor-Bernstein-Schröder). Si α y β son cardinales tal que $\alpha \leq \beta$ y $\beta \leq \alpha$, entonces $\alpha = \beta$.

Demostración. El esquema de demostración se divide principalmente en dos partes, la parte (a) en definir una partición para los conjuntos A, B y la parte (b), donde se prueba la existencia de una función biyectiva entre A y B utilizando las particiones de la parte anterior.

- (a) Se definen de forma recursiva las siguientes colecciones de conjuntos no vacíos:

$$\{\tilde{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \wedge \{\tilde{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

según:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_0 &= A \\ \tilde{B}_0 &= B \\ \tilde{A}_{n+1} &= g(\tilde{B}_n), \forall n \in \mathbb{N} \\ \tilde{B}_{n+1} &= f(\tilde{A}_n), \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

Veamos que las colecciones $\{\tilde{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\tilde{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son monótonas decrecientes (encajonados), para ello razonamos por inducción:

1. *Caso base:* Sabemos que $\tilde{A}_0 = A$ y que $\tilde{B}_0 = B$, luego tendremos que como por propiedad de la imagen a través de f, g se tiene el siguiente caso base:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 &= f(\tilde{A}_0) \subseteq \tilde{B}_0 \\ \tilde{A}_1 &= g(\tilde{B}_0) \subseteq \tilde{A}_0\end{aligned}$$

2. *Hipótesis inductiva:* Supondremos cierto para algún $n \in \mathbb{N}$ que:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n &\subseteq \tilde{A}_{n-1} \\ \tilde{B}_n &\subseteq \tilde{B}_{n-1}\end{aligned}$$

3. *Paso inductivo:* Usando la hipótesis inductiva, tendremos que:

$$\begin{aligned}g(\tilde{B}_n) &\subseteq g(\tilde{B}_{n-1}) \\ \Rightarrow \tilde{A}_{n+1} &\subseteq \tilde{A}_n \\ f(\tilde{A}_n) &\subseteq f(\tilde{A}_{n-1}) \\ \Rightarrow \tilde{B}_{n+1} &\subseteq \tilde{B}_n\end{aligned}$$

luego, por inducción se concluye entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\tilde{A}_n \subseteq \tilde{A}_{n-1}$ y $\tilde{B}_n \subseteq \tilde{B}_{n-1}$ (la monotonía que se utilizará más adelante).

A continuación se definen las particiones $\{A_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \infty)}, \{B_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \infty)}$ de A, B respectivamente, como:

$$\begin{aligned}A_n &= \tilde{A}_n \setminus \tilde{A}_{n+1} = \tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n+1}^c \\ A_\infty &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \\ B_n &= \tilde{B}_n \setminus \tilde{B}_{n+1} = \tilde{B}_n \cap \tilde{B}_{n+1}^c \\ B_\infty &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{B}_n\end{aligned}$$

Veamos que efectivamente son particiones, veamos la *disjunción*:

1. Sean $A_n, A_m \in \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, conjuntos diferentes, por definición son de la forma:

$$\begin{aligned} A_n &= \tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n+1}^c \\ A_m &= \tilde{A}_m \cap \tilde{A}_{m+1}^c \end{aligned}$$

Deseamos ver que sean disjuntos, luego sin pérdida de generalidad suponemos que $n < m$ (desigualdad estricta en $\mathbb{N}$, pues tomamos conjuntos diferentes), luego $m \in \{n+1, :\}^3$, entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n &\supseteq \tilde{A}_{n+1} \supseteq \tilde{A}_m \supseteq \tilde{A}_{m+1} \\ \tilde{A}_n^c &\supseteq \tilde{A}_{n+1}^c \subseteq \tilde{A}_m^c \subseteq \tilde{A}_{m+1}^c \end{aligned}$$

Ahora veamos la intersección disjunta:

$$\begin{aligned} A_n \cap A_m &= (\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n+1}^c) \cap (\tilde{A}_m \cap \tilde{A}_{m+1}^c) \\ &= \tilde{A}_m \cap \tilde{A}_{n+1}^c \\ &\subseteq \tilde{A}_m \cap \tilde{A}_m^c \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. Por otro lado, tomando A_m con $m \in \mathbb{N}$ y A_∞ previamente definido, entonces:

$$\begin{aligned} A_n \cap A_\infty &= (\tilde{A}_m \cap \tilde{A}_{m+1}^c) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \right) \\ &= (\tilde{A}_m \cap \underbrace{\tilde{A}_{m+1}^c}_a) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m+1\}} \tilde{A}_n \right) \cap \underbrace{(\tilde{A}_{m+1})}_b \\ &= \emptyset, \text{ puesto que } a \text{ y } b \text{ son disjuntos.} \end{aligned}$$

3. Sean $B_n, B_m \in \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, conjuntos diferentes, por definición son de la forma:

$$\begin{aligned} B_n &= \tilde{B}_n \cap \tilde{B}_{n+1}^c \\ B_m &= \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_{m+1}^c \end{aligned}$$

Deseamos ver que sean disjuntos, luego sin pérdida de generalidad suponemos que $n < m$ (desigualdad estricta en $\mathbb{N}$, pues tomamos conjuntos diferentes), luego $m \in \{n+1, :\}^4$, entonces:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_n &\supseteq \tilde{B}_{n+1} \supseteq \tilde{B}_m \supseteq \tilde{B}_{m+1} \\ \tilde{B}_n^c &\supseteq \tilde{B}_{n+1}^c \subseteq \tilde{B}_m^c \subseteq \tilde{B}_{m+1}^c \end{aligned}$$

³Se utiliza ":" para denotar que están presentes todos los elementos posteriores a $n+1$.

⁴Se utiliza ":" para denotar que están presentes todos los elementos posteriores a $n+1$.

Ahora veamos la intersección disjunta:

$$\begin{aligned}
 B_n \cap B_m &= (\tilde{B}_n \cap \tilde{B}_{n+1}^c) \cap (\tilde{B}_m \cap \tilde{B}_{m+1}^c) \\
 &= \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_{n+1}^c \\
 &\subseteq \tilde{B}_m \cap \tilde{B}_m^c \\
 &= \emptyset
 \end{aligned}$$

4. Por otro lado, tomando A_m con $m \in \mathbb{N}$ y A_∞ previamente definido, entonces:

$$\begin{aligned}
 B_n \cap B_\infty &= (\tilde{B}_m \cap \tilde{B}_{m+1}^c) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{B}_n \right) \\
 &= (\tilde{B}_m \cap \underbrace{\tilde{B}_{m+1}^c}_a) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{m+1\}} \tilde{B}_n \right) \cap \underbrace{(\tilde{B}_{m+1})}_b \\
 &= \emptyset, \text{ puesto que } a \text{ y } b \text{ son disjuntos.}
 \end{aligned}$$

A continuación veremos que la unión de los conjuntos de las colecciones $\{A_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \infty)}$, $\{B_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \infty)}$ son A, B respectivamente, para ello veamos la doble inclusión. Definimos las uniones de los elementos de las colecciones $\{A_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \{\infty\})}$, $\{B_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \{\infty\})}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &:= \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \sqcup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \right) \\
 &= \underbrace{\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n+1}^c) \right)}_{(b)} \sqcup \underbrace{\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \right)}_{(a)} \\
 \mathcal{B} &:= \left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \sqcup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{B}_n \right) \\
 &= \underbrace{\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (\tilde{B}_n \cap \tilde{B}_{n+1}^c) \right)}_{(b)} \sqcup \underbrace{\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{B}_n \right)}_{(a)}
 \end{aligned}$$

1. Probemos la primera inclusión: $\mathcal{A} \subseteq A$:

Luego tomando un elemento arbitrario $a \in \mathcal{A}$, entonces $a \in A_\infty$, o bien $a \in A_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

- Si $a \in A_\infty$, entonces $a \in \tilde{A}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces en particular $a \in \tilde{A}_n \subseteq \tilde{A}_0 = A$.
- Por otro lado, si $a \in A_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \in (\tilde{A}_n \subseteq \tilde{A}_{n+1}) \subseteq \tilde{A}_n \subseteq \tilde{A}_0 = A$.

Concluyendo que si $a \in \mathcal{A}$, entonces $a \in A$.

2. Veamos ahora que $A \subseteq \mathcal{A}$:

Sea $a \in A$, luego como $\tilde{A}_0 = A$, entonces como $\{\tilde{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección monótona decreciente, existe $\tilde{A}_n$ para $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in \tilde{A}_n$, luego como $\tilde{A}_n \setminus \tilde{A}_{n+1} = A_n$, entonces veamos que hay dos casos:

a) Si $a \in \tilde{A}_n$ y $a \notin \tilde{A}_{n+1}$, luego $a \in A_n$ teniendo que entonces que

$$a \in \bigsqcup_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \{\infty\})} A_n \subseteq \mathcal{A}$$

b) Si $a \in \tilde{A}_n$ y $a \in \tilde{A}_{n+1}$, puede derivar en dos casos, primero que para algún $m > n$, $a \in \tilde{A}_m$ y $a \notin \tilde{A}_{m+1}$, lo que se concluye según lo visto anteriormente, mientras que si no existe $m > n$ tal que $a \in \tilde{A}_m$ y $a \notin \tilde{A}_{m+1}$, entonces $a \in \tilde{A}_n \forall n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} a \in A_\infty &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n \\ &\subseteq \mathcal{A} \end{aligned}$$

Concluyendo que si $a \in A$, entonces $a \in \mathcal{A}$.

Análogamente para B :

1. Probemos la primera inclusión: $\mathcal{B} \subseteq B$:

Luego tomando un elemento arbitrario $b \in \mathcal{B}$, entonces $b \in B_\infty$, o bien $b \in B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

a) Si $b \in B_\infty$, entonces $b \in \tilde{B}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces en particular $b \in \tilde{B}_n \subseteq \tilde{B}_0 = B$.

b) Por otro lado, si $b \in B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $b \in (\tilde{B}_n \subseteq \tilde{B}_{n+1}) \subseteq \tilde{B}_n \subseteq \tilde{B}_0 = B$.

Concluyendo que si $b \in \mathcal{B}$, entonces $b \in B$.

2. Veamos ahora que $B \subseteq \mathcal{B}$:

Sea $b \in B$, luego como $\tilde{B}_0 = B$, entonces como $\{\tilde{B}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una colección monótona decreciente, existe $\tilde{B}_n$ para $n \in \mathbb{N}$ tal que $b \in \tilde{B}_n$, luego como $\tilde{B}_n \setminus \tilde{B}_{n+1} = B_n$, entonces veamos que hay dos casos:

a) Si $b \in \tilde{B}_n$ y $b \notin \tilde{B}_{n+1}$, luego $b \in B_n$ teniendo que entonces que

$$b \in \bigsqcup_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \{\infty\})} B_n \subseteq \mathcal{B}$$

b) Si $b \in \tilde{B}_n$ y $b \in \tilde{B}_{n+1}$, puede derivar en dos casos, primero que para algún $m > n$, $a \in \tilde{B}_m$ y $b \notin \tilde{B}_{m+1}$, lo que se concluye según lo visto anteriormente, mientras que si no existe $m > n$

tal que $b \in \tilde{B}_m$ y $b \notin \tilde{B}_{m+1}$, entonces $b \in \tilde{B}_n \forall n \in \mathbb{N}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} b \in B_\infty &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{B}_n \\ &\subseteq \mathcal{B} \end{aligned}$$

Concluyendo que si $b \in B$, entonces $b \in \mathcal{B}$.

Entonces se concluye que $A = \mathcal{A}$ y $B = \mathcal{B}$, luego se concluye que $\{A_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \{\infty\})}$ y $\{B_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \{\infty\})}$ son particiones de A y B respectivamente.

.....

(b) Se define la siguiente función:

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & , \text{si } a \in A_{2n} \text{ ó } a \in A_\infty \\ g^{-1}(a) & , \text{si } a \in A_{2n+1} \end{cases}$$

Veamos que está bien definida, para ello con el fin de no sobrecargar la notación digamos que el dominio en el que actúa f es A_{par} y así mismo para g^{-1} con A_{impar} , entonces:

1. ***h está bien definida:*** Como $A_n \cap A_m = \emptyset$, osea no se superponen f, g puesto que $A_{par} \cap A_{impar} = \emptyset$. Por otro lado f es función por lo que tiene una única imagen, mientras que como g es inyectiva, $g^{-1}(a)$ es única, por lo tanto es función.

2. ***h es inyectiva:***

Suponiendo que $a \neq b$, tenemos 3 casos:

a) $a \in A_{par}$ y $b \in A_{par}$, entonces $h(a) = f(a)$ y $h(b) = f(b)$ puesto que f es una función inyectiva:

$$\begin{aligned} f(a) &\neq f(b) \\ \Rightarrow h(a) &\neq h(b) \end{aligned}$$

b) $a \in A_{impar}$ y $b \in A_{impar}$, entonces $h(a) = g^{-1}(a)$ y $h(b) = g^{-1}(b)$, supongamos que $g^{-1}(a) = g^{-1}(b)$, entonces

$$\begin{aligned} g \circ g^{-1}(a) &= g \circ g^{-1}(b), \text{ usamos inyectividad} \\ \Rightarrow a &= b, \text{ lo que es contradicción} \end{aligned}$$

entonces $g^{-1}(a) \neq g^{-1}(b)$.

c) $a \in A_{par}$ y $b \in A_{impar}$, entonces $h(a) = f(a)$ y $h(b) = g^{-1}(b)$, luego como $a \in A_{par}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \in A_{2n}$, o bien $a \in A_\infty$, entonces veamos que $f(a) \in f(A_{2n}) \subseteq B_{2n+1}$.

Notemos que para n par o infinito:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \tilde{A}_n \setminus \tilde{A}_{n+1} \\
 &= \tilde{A}_n \cap \tilde{A}_{n+1}^c, \text{ luego tomando preimagen mediante } f \\
 &= f^{-1}(\tilde{B}_{n+1}) \cap f^{-1}(\tilde{B}_{n+2})^c \\
 &= f^{-1}(\tilde{B}_{n+1} \cap \tilde{B}_{n+2}^c) \\
 &= f^{-1}(B_{n+1}) \\
 &\Rightarrow f(A_n) \subseteq f(f^{-1}(B_{n+1})) = B_{n+1} \\
 &\Rightarrow f(a) \in f(A_{2n}) \subseteq B_{2n+1}
 \end{aligned}$$

Veamos que $g^{-1}(b) \notin B_{2n+1}$, razonando hacia contradicción:

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(b) \in B_{2n+1} &\Rightarrow b \in g(B_{2n+1}) = A_{2n+2} \\
 &\Rightarrow b \in A_{par}, \text{ lo que es una contradicción, pues } b \in A_{impar} \\
 &\Rightarrow g^{-1}(b) \notin B_{impar}
 \end{aligned}$$

Luego se concluye que h es inyectiva.

3. ***h es sobreyectiva:***

Veamos que $f(A) = B$:

a) Veamos la imagen de A_∞ :

$$\begin{aligned}
 f(A_\infty) &= f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n\right) \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(\tilde{A}_n) \\
 &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{B}_n \\
 &= B_\infty
 \end{aligned}$$

b) Veamos la imagen de A_{2n+1} que es a través de g^{-1} :

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(A_{2n+1}) &= g^{-1}(\tilde{A}_{2n+1} \cap \tilde{A}_{2n+2}^c) \\
 &= g^{-1}(\tilde{A}_{2n+1}) \cap g^{-1}(\tilde{A}_{2n+2}^c) \\
 &= g^{-1}(\tilde{A}_{2n+1}) \cap g^{-1}(\tilde{A}_{2n+2})^c
 \end{aligned}$$

Donde además, según la definición de g dada anteriormente se tiene que:

$$\begin{aligned}
 g(\tilde{B}_n) &= A_{n+1}, \text{ aplicando } g(\cdot) \\
 &\Rightarrow g^{-1}[g(\tilde{B}_n)] = g^{-1}(A_{n+1}), \text{ usando inyectividad de } g \\
 &\Rightarrow \tilde{B}_n = g^{-1}(A_{n+1})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(A_{2n+1}) &= g^{-1}(\tilde{A}_{2n+1}) \cap g^{-1}(\tilde{A}_{2n+2})^c \\
 &= \tilde{B}_{2n} \cap \tilde{B}_{2n+1}^c \\
 &= B_{2n}
 \end{aligned}$$

c) Veamos la imagen de A_{2n} , que es a través de f :

$$\begin{aligned} f(A_{2n}) &= f(\tilde{A}_{2n} \setminus \tilde{A}_{2n+1}), \text{ usando que } f \text{ es inyectiva} \\ &= f(\tilde{A}_{2n}) \setminus f(\tilde{A}_{2n+1}) \\ &= \tilde{B}_{2n+1} \setminus \tilde{B}_{2n+2} \\ &= B_{2n+1} \end{aligned}$$

d) Finalmente, como $\{A_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \infty)}$ y $\{B_n\}_{n \in (\mathbb{N} \sqcup \infty)}$ son particiones de A y B , entonces separamos los dominios para construir la partición de B y luego utilizando lo visto en (a), (b) y (c) concluir:

$$\begin{aligned} h(A) &= h(A_{par*}) \sqcup h(A_{impar}) \sqcup h(A_\infty) \\ &= f(A_{par*}) \sqcup g^{-1}(A_{impar}) \sqcup f(A_\infty) \\ &= B_{impar} \sqcup B_{par} \sqcup B_\infty \\ &= B \end{aligned}$$

Concluyendo así que $h : A \rightarrow B$ es una función sobreyectiva.

Finalmente, como h es una función bien definida, además es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente se tiene que es una biyección entre A y B , concluyendo finalmente que $\alpha = |A| = |B| = \beta$ teniendo el teorema. ■

Comentario. Note que el teorema anterior dice que existen funciones inyectivas:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ g : B &\rightarrow A \end{aligned}$$

donde $|A| = \alpha$ y $|B| = \beta$, donde tener la sobreyectividad o probar que una es inversa de la otra puede volverse muy difícil o imposible.

A continuación veremos dos propiedades importantes del *álgebra de cardinales infinitos*, que además son un buen ejercicio.

Proposición 27. Sea α un cardinal infinito, entonces $\alpha + \alpha = \alpha$

Demostración. Sea A un conjunto con $|A| = \alpha$, la demostración se dividirá en dos partes:

- *Parte 1:* Demostraremos que $A = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ con $|A_\lambda| = |\mathbb{N}|$ para todo $\lambda \in \Lambda$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, concluyendo que $\alpha = |\mathbb{N}| \cdot |\Lambda|$.
- *Parte 2:* Considerando C_1 el conjunto de los naturales pares y C_2 el conjunto de los naturales impares, usando el hecho que $\mathbb{N} \times I = (C_1 \times I) \cup (C_2 \times I)$ para concluir la demostración.

Desarrollo parte 1:

Buscaremos usar el *Lema de Zorn*, para ello definimos la siguiente clase:

$$\mathcal{F} = \{\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{P}(A) \mid |A_i| = |\mathbb{N}| \forall \lambda \in \Lambda, A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j\}$$

verifiquemos las hipótesis necesarias para el lema de Zorn:

i) *Mostraremos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$:*

Como α es cardinal infinito, podemos decir que $|A| = \alpha \geq |\mathbb{N}|$, luego existe $B \subseteq A$ tal que $|B| = |\mathbb{N}|$, esto se puede hacer puesto que existe una función inyectiva $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, luego basta considerar $f(\mathbb{N}) = B \subseteq A$ que será numerable. Luego $\{B\} \in \mathcal{F}$, teniendo así que $\mathcal{F}$ es no vacío.

ii) *Mostremos que todas las cadenas son acotadas:*

Consideremos $(\mathcal{F}, \subseteq)$, sea $\mathcal{C}$ cadena en $\mathcal{F}$. Consideremos como candidato a cota superior a la familia:

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{C}} \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

Veremos que $\mathcal{A}$ es cota superior de $\mathcal{C}$, pues es la unión de elementos de $\mathcal{C}$. Ahora veremos que $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, para ello hay que verificar las condiciones necesarias de $\mathcal{F}$:

1. Veamos que los elementos de $\mathcal{A}$ son numerables, para ello, sea $B \in \mathcal{A}$ (B cualquiera), veamos que $|B| = |\mathbb{N}|$: Como

$$B \in \mathcal{A} = \bigsqcup_{\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{C}} \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

entonces existe $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \in \mathcal{C}$ tal que $B \in \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, luego $|B| = |\mathbb{N}|$.

2. Veamos que los elementos de $\mathcal{A}$ son disjuntos de a pares, para ello sean $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$, entonces existen colecciones tales que:

$$B_1 \in \{A_i\}_{i \in I} \wedge B_2 \in \{A_j\}_{j \in J}$$

A continuación, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \{A_j\}_{j \in J}$, luego $B_1, B_2 \in \{A_j\}_{j \in J}$, donde $\{A_j\}_{j \in J} \in \mathcal{F}$, entonces $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Por lo anterior, concluimos que $\mathcal{A} \in \mathcal{F}$, por lo tanto se verifica que las cadenas de $\mathcal{F}$ poseen cota superior.

Se concluye por lema de Zorn que existe $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} = \mathcal{A} \in \mathcal{F}$ maximal.

¿Cómo es $A \setminus \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$? Tenemos 2 opciones:

1. Tiene cardinal finito.
2. Tiene cardinal infinito.

Descartemos (2), razonando por contradicción, como $A \setminus \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ tiene cardinal ∞ , entonces existe $B \subseteq \left(A \setminus \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)$ numerable. Luego $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \sqcup \{B\} \in \mathcal{F}$ ($B \cap A_\lambda = \emptyset$), lo que contradice la maximalidad de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Veamos ahora el caso (1), consideremos $\mu \in \Lambda$ fijo, definamos:

$$\tilde{A}_\mu = \begin{cases} A_\lambda & , \text{si } \lambda \neq \mu \\ A_\mu \sqcup \underbrace{\left(A \setminus \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)}_{\text{Elementos finitos que sobraron.}} & , \text{si } \mu = \lambda \end{cases}$$

La familia $\{\tilde{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ cumple las condiciones, pues todos sus elementos son numerables, además que, en particular si a un elemento de la familia le añado una cantidad finita de elementos, éstos siguen siendo numerables, además sus elementos siguen siendo disjuntos de a pares.

Además por construcción:

$$A = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda$$

Finalmente, como se tiene una unión disjunta de conjuntos numerables, es posible sumar lo siguiente:

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{\lambda \in \Lambda} |\tilde{A}_\lambda| \\ &= |\tilde{A}_\lambda| \cdot |\Lambda| \text{ para algún } \lambda. \end{aligned}$$

Comentario. También es posible definir la función

$$f : A \rightarrow \mathbb{N} \times \Lambda$$

donde $\forall \lambda \in \Lambda$, $\tilde{A}_\lambda = \{a_\lambda(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, osea se pueden indexar por $\mathbb{N}$ a los elementos de la colección, pues son numerables. Luego probar que f es una biyección.

Desarrollo parte 2:

Como $\mathbb{N} \times \Lambda = (C_1 \times \Lambda) \sqcup (C_2 \times \Lambda)$ (unión disjunta), entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= |\mathbb{N} \times \Lambda| = |C_1 \times \Lambda| + |C_2 \times \Lambda| \\ &= |C_1| \cdot |\Lambda| + |C_2| \cdot |\Lambda| \\ &= |\mathbb{N}| \cdot |\Lambda| + |\mathbb{N}| \cdot |\Lambda| \\ &= |\mathbb{N}| \cdot |\Lambda| + |\mathbb{N}| \cdot |\Lambda| \\ &= \alpha + \alpha \end{aligned}$$

■

Proposición 28. Sea α un cardinal infinito, entonces $\alpha \cdot \alpha = \alpha$

Demostración. Sea A un conjunto con cardinal α , veremos que $|A| = |A^2|$. La demostración se dividirá en cuatro partes:

- *Parte 1:* Justificar la existencia de un conjunto $N \subseteq A$ infinito numerable.
- *Parte 2:* Considerando el conjunto

$$\mathcal{F} = \{(M, g) | N \subseteq M \wedge g : M \rightarrow M^2 \text{ es una biyección}\}$$

con el orden

$$(M, g) \leq (K, h) \Leftrightarrow M \subseteq K \wedge g(m) = h(m) \forall m \in M$$

veremos que $\mathcal{F}$ posee elemento maximal. Dicho elemento será llamado (B, g) .

- *Parte 3:* Sea $C = A \setminus B$. Se probará que si $|C| \leq |B|$, entonces $|A| = |A^2|$.
- *Parte 4:* Si $|B| \leq |C|$, entonces existe $D \subseteq C$ con $|D| = |B|$. Se probará que $|(B \sqcup D)^2 \setminus B^2| = |D|$ para construir una biyección entre $(B \sqcup D)$ y $(B \sqcup D)^2$ que extiende a g .

Desarrollo parte 1:

Realizando lo mismo que en la demostración de la proposición anterior, como $\aleph_0$ es el primer cardinal infinito, entonces $\aleph_0 \leq |A|$, así mismo entonces existe $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ función inyectiva luego basta con considerar $f(\mathbb{N}) \subseteq A$ como el conjunto infinito numerable buscado.

Desarrollo parte 2:

Usaremos el lema de Zorn para probar que $\mathcal{F}$ posee elemento maximal. Veamos las hipótesis del lema de Zorn:

i.- *Veamos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$:*

Sea N el conjunto infinito numerable encontrado en la parte anterior, sabemos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| \cdot |\mathbb{N}|$, luego como $|N| = |\mathbb{N}|$, entonces

■

Proposición 29. Si α, β, γ son cardinales, entonces $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$

Demostración. Sean los conjuntos A, B, C tales que $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ y $\gamma = |C|$, luego definimos las funciones:

$$\begin{aligned} f : \quad (A^B)^C &\rightarrow A^{B \times C} \\ \{\{\{a_b\}_{b \in B}\}_c\}_{c \in C} &\mapsto \{a_{b,c}\}_{b \in B \wedge c \in C} \\ g : \quad A^{B \times C} &\rightarrow (A^B)^C \\ \{a_{b,c}\}_{b \in B \wedge c \in C} &\mapsto \{\{\{a_b\}_{b \in B}\}_c\}_{c \in C} \end{aligned}$$

■ *f es inyectiva:*

Suponiendo que para $x_1, x_2 \in (A^B)^C$ sea $x_1 \neq x_2$, donde:

$$x_1 = \{\{\{a_b\}_{b \in B}\}_c\}_{c \in C} \neq \{\{\{\bar{a}_b\}_{b \in B}\}_c\}_{c \in C} = x_2$$

esto implica que $\exists c \in C, \exists b \in B$ tales que:

$$f(x_1) = \{a_{b,c}\}_{b \in B \wedge c \in C} \neq \{\bar{a}_{b,c}\}_{b \in B \wedge c \in C} = f(x_2)$$

se concluye que f es inyectiva.

■ *g es inyectiva:*

Suponiendo que para $x_1, x_2 \in A^{B \times C}$ con $x_1 \neq x_2$, donde:

$$x_1 = a_{b,c} \neq \bar{a}_{b,c} = x_2$$

esto implica que $\exists (b, c) \in B \times C$, tales que:

$$g(x_1) = a_{b,c} \neq \bar{a}_{b,c} = g(x_2)$$

se concluye que g es inyectiva.

Existencia de h biyectiva:

Finalmente, por el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder se concluye la existencia de alguna biyección h , lo que nos permite concluir que $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$. ■

2.2.3. Conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor se construye iterativamente a partir del intervalo $[0, 1]$, dividiéndolo en 3 partes y luego sacando el intervalo de en medio, osea luego de la primera iteración $[0, 1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Siguiendo con la idea de la iteración, a continuación se presenta un ejemplo de su funcionamiento para generar intuición:

- *Primera iteración:* Sacando $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, queda:

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \sqcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

- *Segunda iteración:* Sacando $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ y $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, queda:

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \sqcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \sqcup \left[\frac{2}{4}, \frac{7}{9}\right] \sqcup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

- *n-ésima iteración:* Se realiza el mismo procedimiento.

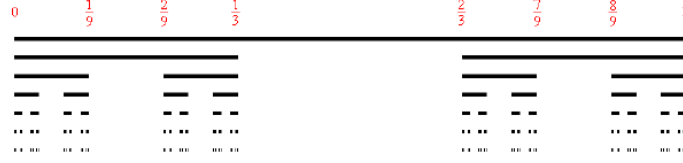


Figura 2.3: Conjunto de Cantor

Luego se define el conjunto de Cantor como:

$$\mathcal{C} = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}} \right)$$

donde se quitan los intervalos de la forma $\left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right)$

Definición 47 (Conjunto de Cantor, en base 3). Sea el conjunto $\mathcal{C}$, luego sus elementos se pueden escribir en base de 3 como

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_k \in \{0, 2\}$$

Proposición 30. El conjunto de cantor es no numerable.

Demostración. Para demostrar que el conjunto de Cantor tiene cardinal no numerable, basta con probar que hay una biyección entre el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ y $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, éste último debido a que tiene cardinal de $2^{\mathbb{N}}$. Para lo anterior se define la función

$$\begin{aligned} f: \quad \mathcal{C} &\rightarrow \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \\ \underbrace{x}_{= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}} &\mapsto \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Además tenemos que los elementos de $\mathcal{C}$ los podemos expresar en base 3, osea que

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_k \in \{0, 2\}$$

Veamos entonces la biyectividad:

i) *Inyectividad:* Sean x y $\tilde{x}$, de la forma:

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_k \in \{0, 2\}, \quad \tilde{x} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\tilde{a}_k}{3^k} \text{ con } \tilde{a}_k \in \{0, 2\}$$

Ahora supongamos que $f(x) = f(\tilde{x})$, osea que $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\tilde{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, por lo tanto $a_k = \tilde{a}_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\tilde{a}_k}{3^k} = \tilde{x}$$

Concluyendo la inyectividad de la función.

ii) *Sobreyectividad*: Sea una sucesión $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, luego podemos definir

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k} \text{ con } a_k \in \{0, 2\}$$

luego, por definición de $\mathcal{C}$, $x \in \mathcal{C}$, luego la función es sobreyectiva.

Luego $\mathcal{C}$ tiene el mismo cardinal de $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$, se concluye que $\mathcal{C}$ es no numerable. ■

Parte II

Topología general

Capítulo 3

Espacios topológicos

3.1. Definición de topología

La definición de topología es una generalización de algunas propiedades de intervalo abierto en la recta real, propiedades independientes de otras que están presentes en $\mathbb{R}$ como lo son la suma, el orden y la distancia (métrica).

Definición 48 (Topología). Una topología sobre un conjunto X , es una familia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, que verifica lo siguiente:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{T}$ (Intersección finita).
3. Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$ (Unión arbitraria).

Luego a los elementos de $\mathcal{T}$ se le llaman **abiertos**, y al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama espacio topológico.

Observación (Sobre la definición de topología). La intersección debe ser finita, a continuación se muestra un caso donde la intersección numerable de abiertos no genera otro abierto.

Contraejemplo: Sea $A_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, luego tomando la intersección numerable para la familia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tiene que intersectan $\{0\}$, lo cual no es un abierto en $\mathbb{R}$, por lo tanto hay un caso donde no hay clausura para intersecciones numerables.

Ejemplo. Sea $X = \{a, b, c\}$ con a, b, c diferentes, veamos que las diferentes topologías que puede tener X son:

- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1. $\{\emptyset, X\}$ | 4. $\{\emptyset, \{c\}, X\}$ |
| 2. $\{\emptyset, \{a\}, X\}$ | 5. $\{\emptyset, \{a, b\}, X\}$ |
| 3. $\{\emptyset, \{b\}, X\}$ | 6. $\{\emptyset, \{a, c\}, X\}$ |

- | | |
|--|--|
| 7. $\{\emptyset, \{b, c\}, X\}$ | 19. $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, X\}$ |
| 8. $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ | 20. $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ |
| 9. $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ | 21. $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ |
| 10. $\{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$ | 22. $\{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ |
| 11. $\{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, X\}$ | 23. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ |
| 12. $\{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, X\}$ | 24. $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$ |
| 13. $\{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, X\}$ | 25. $\{\emptyset, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ |
| 14. $\{\emptyset, \{a, b\}, \{c\}, X\}$ | 26. $\{\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ |
| 15. $\{\emptyset, \{a, c\}, \{b\}, X\}$ | 27. $\{\emptyset, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ |
| 16. $\{\emptyset, \{b, c\}, \{a\}, X\}$ | 28. $\{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}$ |
| 17. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ | 29. $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ |
| 18. $\{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}$ | |

Proposición 31 (Unión e intersección de topologías).

1. Si $\{\mathcal{T}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de topologías sobre X , entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ también es una topología en X (la más pequeña que incluye a cada $\mathcal{T}_\lambda$).
2. Si $\{\mathcal{T}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de topologías sobre X , entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$ no es necesariamente una topología.

Demostración. A continuación se prueba que la intersección de elementos de la colección $\{\mathcal{T}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una topología verificando la definición.

1. Es directo afirmar que $\forall \lambda \in \Lambda, X, \emptyset \in \mathcal{T}_\lambda$, entonces $X, \emptyset \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$.
2. Sean $A, B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$, entonces $\forall \lambda \in \Lambda, A, B \in \mathcal{T}_\lambda$ luego como $\mathcal{T}_\lambda$ es topología, $A \cap B \in \mathcal{T}_\lambda$, concluyendo que $A \cap B \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$.
3. Sea $\{A_{\lambda\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$, entonces $\forall \lambda \in \Lambda, \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}_\lambda$, luego se tiene que $\forall \lambda \in \Lambda, \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}_\lambda$, concluyendo que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$.

Se concluye que la intersección arbitraria de topologías es topología. ■

Ejemplo. Algunos ejemplos de topologías fundamentales:

1. Sea X conjunto, luego se define la topología $\mathcal{T}_{trivial} = \{\emptyset, X\}$, a dicha topología se le dice topología indiscreta o trivial.

- Se tiene que $X, \emptyset \in \mathcal{T}$, además todas las posibles uniones e intersecciones son $X, \emptyset \in \mathcal{T}$, por lo que se concluye que dicha colección de conjuntos es topología.

2. Sea X conjunto, luego se define la topología $\mathcal{T}_{discreta} = \mathcal{P}(X)$, a dicha topología se le dice topología discreta o de las partes.

Veamos que cumple la definición de topología:

- Es fácil ver que $X, \emptyset \subseteq X$, por lo tanto se encuentran en $\mathcal{P}(X)$.
- Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$, luego $A \cap B \in \mathcal{P}(X)$.
- Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos de X , por ende pertenecientes a $\mathcal{P}(X)$, luego $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subseteq X$, por lo tanto también se encuentra en $\mathcal{P}(X)$.

3. Sea X un conjunto infinito, luego a $\mathcal{T}_{cofinita} = \{\emptyset\} \sqcup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es finito}\}$ se le dice la topología cofinita.

Veamos que la topología cofinita es topología:

- Veamos que X está en la topología, pues $X \setminus X = \emptyset$, osea que el complemento de X es finito, por lo tanto $X \in \mathcal{T}$, por otro lado también $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- Sean $A, B \in \mathcal{T}$, luego veamos si la intersección se encuentra en la topología, para ello hay que notar que $(A \cap B)^c = A^c \sqcup B^c$, donde A^c y B^c son conjuntos finitos y como la unión de dos conjuntos finitos es finita, luego la intersección posee complemento finito, por lo que se concluye que $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos de X con complemento finito, luego $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ es finita, pues $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \subseteq A_\mu^c, \forall \mu \in \Lambda$ (A_μ^c es finito), por lo tanto se concluye que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

4. Sea X un conjunto infinito no numerable (o no contable), luego a $\mathcal{T}_{conumerable} = \{\emptyset\} \sqcup \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ es numerable}\}$ se le dice la topología conumerable (o cocontable).

Nota: Cuando dice que $X \setminus A$ sea numerable, se refiere a finito o infinito numerable (o a lo más numerable).

- Es directo que $X, \emptyset \in \mathcal{T}$, pues ocurre lo mismo que en la topología cofinita.
- Sean $A, B \in \mathcal{T}$, osea que sus complementos son numerables, veamos como actúa el complemento de su intersección: $(A \cap B)^c = A^c \sqcup B^c$ que es numerable, pues unión numerable de conjuntos numerables sigue siendo numerable, por lo tanto $A \cap B \in \mathcal{T}$.

- Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de subconjuntos de X con complemento numerable, $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ es numerable, pues $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \subseteq A_\mu^c, \forall \mu \in \Lambda$, por lo tanto se concluye que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Nota: Siguiendo la idea anterior de las topologías cofinita y connumerable, ¿existe la topología coinfinita?.

5. Sea $X = \{a, b\}$, luego a $\mathcal{T}_{Sierpinski} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ se le dice la topología de Sierpinski.

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.
- Las posibles intersecciones serían $X, \{a\}, \emptyset \in \mathcal{T}$.
- Las posibles uniones serían $X, \{a\}, \emptyset \in \mathcal{T}$.

Nota: En caso de $X = \{a\}$, la topología de Sierpinski coincide con la topología discreta y trivial.

Nota: La importancia de ésta topología radica en su potencia como contraejemplo a ciertas nociones que se abordan más adelante.

6. Sea X un conjunto y $A \subseteq X$, luego a $\mathcal{T}_A = \{\emptyset\} \sqcup \{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ se le llama la topología A -inclusión.

Sea $A \subseteq X$ fijo, luego:

- Como $A \subseteq X$, $X \in \mathcal{T}$, por otro lado también $\emptyset \in \mathcal{T}$.
- Sean $U, V \in \mathcal{T}$, veamos si la intersección se encuentra en la topología, para ello es importante notar que:

$$A \subseteq U \cap V \subseteq U, B \subseteq X$$

Puesto que $A \subseteq U, V$ (simultáneamente), por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}$.

- Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de conjuntos que contienen a A , es directo que $A \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, por lo que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Nota: En particular es posible recuperar otras topologías ya vistas, considerando ciertos casos para A :

- a) Considerando $A = \emptyset$ se tiene la topología discreta.
 - Todos los subconjuntos U de X cumplen que $\emptyset \subseteq U$.
- b) Considerando $A=X$ se tiene la topología trivial.
 - Solo X cumple que $X \subseteq X$.

7. Sea X un conjunto y $A \subseteq X$, luego a $\mathcal{T}^A = \{X\} \sqcup \{B \subseteq X : A \cap B = \emptyset\}$ se le llama la topología A -exclusión.

Sea $A \subseteq X$ fijo, luego:

- Como $\emptyset \cap A = \emptyset$ para cualquier A , se tiene que $\emptyset \in \mathcal{T}$, por otro lado $X \in \mathcal{T}$.
- Sean $U, V \in \mathcal{T}$, luego es posible ver que $(U \cap V) \cap A = \emptyset$, por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{T}$.
- Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de conjuntos que verifica que $A_\lambda \cap A = \emptyset \forall \lambda \in \Lambda$, por lo tanto $(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap A = \emptyset$, luego $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Nota: En particular es posible recuperar otras topologías ya vistas, considerando ciertos casos para A :

- a) Considerando $A = \emptyset$ se tiene la topología trivial.
- b) Considerando $A=X$ se tiene la topología discreta.

8. Las métricas inducen una topología métrica.

Más adelante se estudiará la llamada topología métrica en profundidad, donde se aborda la topología métrica.

A continuación se da nombre a la topología usualmente utilizada en los reales, donde se recuperan los abiertos usuales en $\mathbb{R}$:

Definición 49 (Topología usual/canónica en $\mathbb{R}$). Se define la topología usual en $\mathbb{R}$ como

$$A \in \mathcal{T}_c \Leftrightarrow \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A$$

.....

Notación. De aquí en adelante, se denotará por $\mathcal{T}_c$ a la topología canónica o usual en $\mathbb{R}$.

A continuación se verá que la definición entregada para la *topología usual*, es efectivamente una topología.

Demostración. Veamos que $\mathcal{T}_c$ es topología:

- Notar que $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{T}_c$, pues es posible incluir un intervalo en $\mathbb{R}$, mientras que por vacuidad se concluye para $\emptyset$.
- (Unión) Puesto que para una familia arbitraria $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}_c$, x se encuentra en los intervalos A_λ , luego es fácil ver que si $x \in A_\lambda$, entonces

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset A_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

- (Intersección) Si $x \in A \cap B$, entonces se encuentra en A y en B . Para A se tiene $(x - \varepsilon_A, x + \varepsilon_A) \subseteq A$, y por analogía para B se tiene $(x - \varepsilon_B, x + \varepsilon_B) \subseteq B$. Luego, tomando $\varepsilon := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$, se tendrá que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \cap B$.



Definición 50 (Comparación de topologías). Dadas dos topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ dos topologías sobre X , se dice que $\mathcal{T}_1$ es menos fina que $\mathcal{T}_2$, si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ o $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, se dice que las topologías son comparables.

Ejemplo.

1. Sea X un conjunto cualquiera, para toda topología $\mathcal{T}$ en X se cumple que $\{\emptyset, X\} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$
 - Es fácil verificar que para cualquier topología $\mathcal{T}$ se cumple que $\{X, \emptyset\} \subseteq \mathcal{T}$, pues es parte del punto (1) de la definición de topología.
 - Luego, como cualquier conjunto perteneciente a la topología, es subconjunto de X , se tiene que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$, pues una topología en X es una colección de subconjuntos de X .
2. Sea el conjunto $X = \mathbb{R}$, luego $\mathcal{T}_{\text{cofinita}} \subseteq \mathcal{T}_c$ y $\mathcal{T}_{\text{cofinita}} \subseteq \mathcal{T}_{\text{conumerable}}$, pero $\mathcal{T}_{\text{conumerable}}$ y $\mathcal{T}_c$ no son comparables.
 - Es fácil ver que todo conjunto perteneciente a la topología cofinita pertenece a la topología conumerable sobre cualquier conjunto X .
 - **Nota:** El resto queda pendiente.

A continuación se definen dos topologías en $X = \mathbb{R}$ que son menos finas que la topología canónica ya definida:

Definición 51 (Topología infinita a la derecha/izquierda). En $X = \mathbb{R}$, las siguientes son topologías que cumplen:

1. $\mathcal{T}_+ := \{A \subseteq \mathbb{R} | \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } (x - \varepsilon, \infty) \subseteq A\}.$
2. $\mathcal{T}_- := \{A \subseteq \mathbb{R} | \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } (-\infty, x + \varepsilon) \subseteq A\}.$

Proposición 32. $\mathcal{T}_+, \mathcal{T}_- \subseteq \mathcal{T}_c$ y además $\mathcal{T}_+ \cap \mathcal{T}_- = \{\mathbb{R}, \emptyset\}.$

Definición 52 (Topología generada o inducida por una colección). Sea X un conjunto no vacío y una colección de subconjuntos de X $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Se denota por $\sigma(\mathcal{A})$ a la topología inducida por $\mathcal{A}$, es decir la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{A}$:

$$\sigma(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_X} \mathcal{T}_X$$

Proposición 33. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, luego $\sigma(\mathcal{A})$ es la topología menos fina (más pequeña) que contiene a $\mathcal{A}$

Ejemplo.

1. Si $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ es topología en X , $\sigma(\mathcal{T}) = \mathcal{T}$.
2. Si $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{0\}\}$ en $X = \{0, 1\}$, entonces sólo $\{\emptyset, \{0\}, X\}$ y $\mathcal{P}(X)$ son las topologías que contienen a $\mathcal{A}$. Luego

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{0\}, X\}$$

Nota: En el caso anterior se genera la topología de Sierpinsky.

3. $\sigma(\mathcal{T}_+ \sqcup \mathcal{T}_-) = \mathcal{T}_c$.

3.1.1. Topología en espacios métricos y normados

Definición 53 (Métrica/Distancia). Dado X un conjunto y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función, diremos que es una distancia o métrica si se cumple que para cualquier $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0 \wedge (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

El par (X, d) se denomina espacio métrico.

Ejemplo.

1. $X = \mathbb{R}^d$ con $d(x, y) := |x - y|$.

- Sabemos que $|x - y| \geq 0$ y además:

$$|x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$$

- Es directo verificar que

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$$

- Finalmente, la desigualdad triangular se hereda desde el valor absoluto, pues:

$$|x - y| \leq |x - z| + |y - z| \Leftrightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

2. Sea X un conjunto cualquiera con $d(x, y) := 0$ si $x = y$, y $d(x, y) := 1$ si $x \neq y$, es un espacio métrico.

- Pendiente.

3. Cualquier espacio vectorial normado.

- Pendiente.

Veamos que un caso particular de *espacio métrico* lo da un *espacio vectorial normado*.

Definición 54 (Norma). Si X es un e.v sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, luego una norma sobre X es una función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para todo $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\|x\| \geq 0 \wedge (\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Proposición 34. Una norma $\|\cdot\|$ induce una distancia dada por

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Proposición 35. Todo espacio métrico posee una topología asociada, denominada topología métrica, definida como:

$$\mathcal{T}_d := \{A \subseteq X \mid \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B_d(x, \varepsilon) \subseteq A\}$$

donde $B_d(x, \varepsilon) := \{y \in d(x, y) < \varepsilon\}$.

El siguiente ejemplo corresponde a un espacio muy importante en el análisis real y funcional:

Espacio de las funciones continuas.

Ejemplo (Espacio de las funciones continuas). Sea $X = C([0, 1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[0, 1]$. Para $f \in X$, definimos la norma infinita, o norma del supremo, como

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$$

Entonces $(X, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado.

Comentario. El supremo definido en $[0, 1]$ es en realidad un máximo, puesto que en un compacto, las funciones continuas alcanzan sus máximos y mínimos.

La métrica asociada a la norma $\|\cdot\|_\infty$ viene dada por

$$d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty$$

La topología $\mathcal{T}_\infty$ asociada a esta métrica se denomina topología de la convergencia uniforme.

3.1.2. Topología del subespacio

Definición 55 (Sub-espacio topológico). Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Si $Y \subseteq X$, entonces la colección

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}_X\}$$

es una topología sobre Y , denominada topología del subespacio o topología relativa.

Demostración. Veamos que se define una topología:

1. Como $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$, luego como $Y \cap X = Y$ y $\emptyset \cap X$, entonces $\emptyset, Y \in \mathcal{T}_Y$.
2. Sean $A, B \in \mathcal{T}_X$, luego $(A \cap Y), (B \cap Y) \in \mathcal{T}_Y$, y veamos que

$$(A \cap B) \cap Y = (A \cap Y) \cap (B \cap Y)$$

por lo tanto $((A \cap Y) \cap (B \cap Y)) \in \mathcal{T}_Y$.

3. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}_X$, donde $A_\lambda \cap Y \in \mathcal{T}_Y$, y como

$$\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) \cap Y = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap Y)$$

concluyendo entonces

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap Y) \in \mathcal{T}_Y$$

Se concluye que $\mathcal{T}_Y$ es una topología sobre el conjunto Y . ■

Proposición 36. Sea $Y \subseteq X$. Si U es un conjunto abierto en la topología del subespacio sobre Y e Y es abierto sobre la topología sobre X , entonces U es abierto en la topología sobre X .

3.2. Conjuntos abiertos y cerrados

Definición 56 (Conjuntos cerrados). En $(X, \mathcal{T})$, un conjunto $A \subseteq X$ se dice cerrado, si su complemento $X - A$ es abierto. Se denotará por $\mathcal{C}$ a la familia de conjuntos cerrados en $(X, \mathcal{T})$.

El concepto de conjunto cerrado es dual al de la noción de conjunto abierto, y una topología puede especificarse del mismo modo a través de la familia de sus conjuntos cerrados $\mathcal{C}$, sencillamente a través del proceso de complementación.

Lema 2 (Familia de cerrados). En $(X, \mathcal{T})$, la familia de cerrados $\mathcal{C}$ verifica:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{C}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{C}$, entonces $A \sqcup B \in \mathcal{C}$ (Unión finita).
3. Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{C}$, entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{C}$ (Intersección arbitraria).

Demostración.

- Es directo, pues el conjunto X y $\emptyset$ son complementos mútuos.
- (2) y (3) es trivial utilizando las leyes de De Morgan a la definición de topología.

■

Comentario. Debido a lo anterior, es posible caracterizar una topología a partir del complemento de los elementos de $\mathcal{C}$, no obstante, la propiedad de ser abierto o cerrado es independiente la una de la otra, pues un conjunto puede ser simultáneamente abierto y cerrado, abierto y no cerrado, no abierto y cerrado, o simplemente ninguna de las dos propiedades.

Ejemplo. Algunos ejemplos de colecciones de conjuntos cerrados que coinciden con topologías son:

1. Sea X conjunto bajo la topología trivial, luego se define la colección $\mathcal{C} = \{\emptyset, X\}$, que coincide con la topología trivial
 - Pues $X^c = \emptyset$ y $\emptyset^c = X$,
2. Sea X conjunto bajo la topología discreta, luego se define la colección $\mathcal{C} = \mathcal{P}(X)$, que coincide con la topología discreta.
 - Pues para cualquier conjunto $U \in \mathcal{P}(X)$, se tiene que $U^c \in \mathcal{P}(X)$ (y viceversa), luego coincide que todos los abiertos también son cerrados.

En dichas colecciones, todos los conjuntos son abiertos y cerrados simultáneamente.

3.3. Base y subbase de una topología

3.3.1. Base de una topología, definición y caracterizaciones

Hay topologías que poseen demasiados abiertos y a veces es difícil especificarlos todos. Por ello, se introduce el siguiente concepto.

Definición 57 (Base de una topología). En $(X, \mathcal{T})$, una familia $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una base de $\mathcal{T}$, si para todo $U \in \mathcal{T}$ y para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}$, tal que $x \in B \subseteq U$. Los elementos de $\mathcal{B}$ se llaman elementos/abierto básicos/basales.

Lema 3 (Caracterización de base). $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ ssi todo abierto puede escribirse como unión de abiertos básicos.¹

Demostración. Se muestra la equivalencia con la definición:

- $\Rightarrow$ Sea $A \in \mathcal{T}$. Luego, por hipótesis, para todo $x \in A$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ que verifica que $x \in B_x \subseteq A$. Luego evidentemente $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, osea que cualquier abierto de la topología es unión de abiertos basales.
- $\Leftarrow$ Sea $A \in \mathcal{T}$ y $x \in A$, luego existe $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}$ tal que $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$. Así, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $B_{\lambda_0} \subseteq A$.

■

Comentario. Como cualquier abierto se puede expresar como la unión de abiertos básicos, va a ser posible en muchas ocasiones trabajar únicamente con estos últimos, lo cual simplificará el trabajo en ciertos casos de interés.

El siguiente teorema presenta una caracterización muy útil para la definición de base de una topología:

Teorema 17 (Caracterización de base). Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B}$ es base de alguna topología $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sobre el conjunto X , si y solo si verifica:

1. $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
2. Para cada $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

En dicho caso, $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{U \subseteq X : \exists \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B} : U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\}$

Demostración. Probamos la equivalencia por doble implicancia:

- *Desarrollando $\Rightarrow$:*
Suponiendo que $\mathcal{B}$ es base de abiertos (por definición) de la topología $\mathcal{T}$, veamos que entonces verifica las condiciones de la proposición:
- (a) Notando que $X \in \mathcal{T}$, entonces existe $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = X$$

¹Para algunos autores, este lema actúa como la definición de base.

- (b) Sean $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, puesto que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ entonces $B_1, B_2 \in \mathcal{T}$, al ser abiertos luego es posible afirmar que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Utilizando la definición de base entonces existe $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = B_1 \cap B_2$$

Entonces, para todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_0$ y $B_0 \subseteq B_1 \cap B_2$.

■ *Desarrollando $\Leftarrow$:*

Sea X un conjunto, se define el siguiente candidato a ser topología:

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X \mid \forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B}, \text{ tq } x \in B \subset A\} \cup \{\emptyset\}$$

viendo que $\mathcal{T}$ efectivamente es una topología, para ello se verifica la definición.

- i.- Ya que está explícito, es directo afirmar que $\emptyset \in \mathcal{T}$. Sea $X = A$, por (a), se tiene que

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \{x \in X \mid \exists \mu \in \Lambda \text{ tq } B_\mu \in \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \wedge x \in B_\mu\}$$

luego por la definición de la unión $\forall x \in X, \exists B_\mu \in \{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $B_\mu \subseteq X$, concluyendo.

- ii.- *Veamos la intersección finita:* Sean $A, B \in \mathcal{T}$, luego por (b) se tiene que:

$$\forall x \in A \cap B \neq \emptyset, \exists \overline{B} \in \mathcal{B} \text{ tq } \overline{B} \subseteq A \cap B$$

Luego por la definición de $\mathcal{T}$, como existe $\overline{B} \subseteq A \cap B$, se concluye que $A \cap B \in \mathcal{T}$.

- iii.- *Veamos la unión arbitraria:* Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$. Veamos que

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \in X \mid \exists \mu \in \Lambda \text{ tq } A_\mu \in \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \wedge x \in A_\mu\}$$

Como $\forall \lambda \in \Lambda, A_\lambda \in \mathcal{T}$, entonces por se tiene $\forall x \in A_\lambda, \exists B_x^\lambda \subseteq A_\lambda$ tal que, $B_x^\lambda \in \mathcal{B}$, y $x \in B_x^\lambda$. Finalmente tomando en particular un $\mu \in \Lambda$ (fijo) y un $x \in A_\mu$, se tiene que:

$$B_x^\mu \subseteq A_\mu \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

concluyendo por la def. de $\mathcal{T}$ que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathcal{T}$.

Se concluye que $\mathcal{T}$ es topología en X . Se concluye que $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ por su definición. Ahora basta con probar que para cualquier $\mathcal{B}$ tal que verifica las condiciones (a), (b) y $\mathcal{T} := \{A \subseteq X | \forall x \in A, \exists B \in \mathcal{B}, \text{ tq } x \in B \subseteq A\} \sqcup \{\emptyset\}$, es entonces base de $\mathcal{T}$. Sea algún abierto $A \in \mathcal{T}$, entonces $\forall x \in A, \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq A$, veamos la doble contención:

$$\text{i.- } \bigsqcup_{x \in A} B_x \subseteq A.$$

$$\text{ii.- } \bigsqcup_{x \in A} B_x = \{x \in A | \exists B_x \subseteq A \text{ tq } x \in B_x\} =: \beta, \text{ como } \forall x \in A, \{x\} \subseteq B_x$$

$$A = \bigsqcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \beta$$

Se concluye entonces que $\forall A \in \mathcal{T}$, hay una subcolección de $\mathcal{B}$, que lo forma mediante unión arbitraria, se concluye entonces que $\mathcal{B}$ es base. ■

Comentario (Muy útil). Antes de entrar en ejemplos particulares que ayuden a comprender la definición de base, hay que hacer una consideración general. Como todo abierto debe ponerse como unión de abiertos básicos, si se pretende que un subconjunto $\mathcal{B}$ de una topología $\mathcal{T}$ sea base de abiertos, es claro que todos los subconjuntos unitarios que sean abiertos deben pertenecer a $\mathcal{B}$. Además, si algún punto pertenece únicamente al abierto X entonces el conjunto total (X) debe ser un elemento de $\mathcal{B}$. Por último, notemos que el conjunto vacío siempre puede expresarse como unión vacía de elementos de $\mathcal{B}$, y por lo tanto no tiene necesidad de pertenecer a ninguna base:

$$\emptyset = \bigsqcup_{i \in \emptyset} B_i$$

Ejemplo. Algunos ejemplo de bases de topología son:

1. Una topología $\mathcal{T}$ es base de sí misma.

- Es fácil ver que se cumple debido al lema de caracterización de base.

Nota: Esto no aporta gran cosa, pues lo interesante de las bases es obtener siempre una base minimal, es decir, contenida en cualquier otra base de la misma topología $\mathcal{T}$.

2. Sobre el conjunto X , $\mathcal{B}_{trivial} = \{X\}$ es base de la topología trivial.

- Es posible escribir de la forma $X = \bigsqcup_{B \in \mathcal{B}} B$, por otro lado, el vacío siempre utiliza el siguiente argumento² (presentado en el comentario anterior):

$$\emptyset = \bigsqcup_{\substack{i \in \emptyset \\ \text{Indexado por un conjunto vacío.}}} B_i$$

3. Sobre el conjunto X , $\mathcal{B}_{discreta} = \{\{x\} : x \in X\}$ (el conjunto de los singletons) es base de la topología discreta.

- Se puede escribir cualquier A subconjunto de X como $A = \bigsqcup_{\{x\} \in A \subseteq X} \{x\}$.

Basta con tomar la colección de singletons $(\{x\})_A$ que se encuentran en A para generar a A mediante la unión.

- a) En particular sobre el conjunto $\mathbb{R}$, se tiene que $\mathcal{B} = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$ es base de la topología discreta sobre $\mathbb{R}$
- b) **Observación:** Note que hay al menos dos bases posibles para generar la topología discreta en $\mathbb{R}$.

4. Sea un conjunto $A \subset X$, luego sea $\mathcal{B}_A = \{A \sqcup \{x\} : x \in X\}$ es base de la topología $\mathcal{T}_A$ (A -inclusión).

- Pendiente.

5. Sea un conjunto $A \subset X$, luego sea $\mathcal{B}^A = \{\{x\} : x \in X \setminus A\} \sqcup \{X\}$ es base de la topología $\mathcal{T}^A$ (A -exclusión).

- Pendiente.

6. Sea el conjunto $\mathbb{R}$ luego es posible definir la topología usual mediante las siguientes bases:

- a) $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\}$.
- b) $\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} \wedge a < b\}$. Osea, cualquier intervalo $(x, y) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$ con $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$, con $a_n \rightarrow x$ y $b_n \rightarrow y$. Note que $\mathcal{B}$ es numerable. Lo que más adelante será muy importante.

- **Observación:** Este es otro caso en el que es posible definir la misma topología a partir de dos bases diferentes.

²El argumento de que $\emptyset = \bigsqcup_{i \in \emptyset} B_i$, es suficiente para todas las bases.

7. Sea $\mathcal{B}$ una base para la topología en X , entonces para $Y \subseteq X$, entonces la colección:

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y | B \in \mathcal{B}\}$$

define una base para la topología del subespacio sobre Y .

- Dado un abierto U en la topología sobre X , toman un punto $y \in U \cap Y$, es posible elegir un elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $y \in B \subseteq U$, entonces $y \in (B \cap Y) \subseteq (U \cap Y)$, concluyendo que $\mathcal{B}_Y$ es base para la topología del subespacio sobre Y .

Como es posible notar, una misma topología puede ser generada a través de diferentes bases, lo que lleva a la siguiente definición:

Definición 58 (Bases equivalentes). Dos bases de topología sobre X , $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, se dicen equivalentes si generan la misma topología.

Comentario. Se pueden comparar topologías sobre X conociendo sólo sus bases. Intuitivamente, cuanto más pequeños sean los elementos de la base, mayores serán las topologías generadas.

El siguiente teorema permite comparar topologías mediante sus bases:

Teorema 18 (Topologías y bases comparables). Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases para las topologías $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ sobre el conjunto X , respectivamente. Entonces $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ si y sólo si para cada $B_2 \in \mathcal{B}_2$ y cada $x \in B_2$, existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$, tal que $x \in B_1 \subseteq B_2$.

3.3.2. Topología en el espacio producto

Una utilidad muy importante de la noción de *base* es la de describir una topología en el conjunto $X \times Y$.

Definición 59 (Base de la topología en $X \times Y$). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. La topología producto sobre $X \times Y$ es la topología que tiene como base la colección $\mathcal{B}$ de todos los conjuntos de la forma $U \times V$ donde $U \in \mathcal{T}_X$ y $V \in \mathcal{T}_Y$.

Demostración. Veamos que la definición anterior es una base:

1. Como $X \in \mathcal{T}_X$ e $Y \in \mathcal{T}_Y$, entonces $X \times Y \in \mathcal{B}$ por lo que es trivial verificar entonces que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$.
2. Sean $U_1 \times V_1, U_2 \times V_2 \in \mathcal{B}$ no disjuntos, veamos que ocurre para $x \in (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$, tenemos que:

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

luego como $(U_1 \cap U_2) \in \mathcal{T}_X$ y $(V_1 \cap V_2) \in \mathcal{T}_Y$, entonces existen $U_3 \in \mathcal{T}_X$ y $V_3 \in \mathcal{T}_Y$ tal que $U_3 \subseteq (U_1 \cap U_2)$ y $V_3 \subseteq (V_1 \cap V_2)$, luego

$$(U_3 \times V_3) \subseteq (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$

Se concluye que $\mathcal{B}$ es base para una topología sobre $X \times Y$. ■

La colección $\mathcal{B}$ es base, y es fácil comprobar que no es topología, pues no verifica la condición de la unión.

Teorema 19. Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio topológico $(X, \mathcal{T}_X)$ y $\mathcal{C}$ una base del espacio topológico $(Y, \mathcal{T}_Y)$, entonces

$$\mathcal{D} := \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \wedge C \in \mathcal{C}\}$$

es una base para la topología en $X \times Y$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{D}$ es base:

1. Como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases, entonces:

$$\bigsqcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \wedge \bigsqcup_{C \in \mathcal{C}} C = Y$$

Luego la unión de elementos de $\mathcal{D}$ es:

$$\bigsqcup_{B \times C \text{ tq } B \in \mathcal{B} \wedge C \in \mathcal{C}} (B \times C) = X \times Y$$

2. Se propone verificar. ■

Ejemplo. Considerando la topología usual de $\mathbb{R}$. El producto de esta topología consigo misma se denomina topología usual de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. La base de dichos conjuntos son todos los productos de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$.

Topologías en $\mathbb{R}^2$:

Utilizando los teoremas anteriores se estudiarán las siguientes topologías sobre $\mathbb{R}^2$:

1. La topología canónica o inducida por la distancia/métrica usual con su respectiva base:

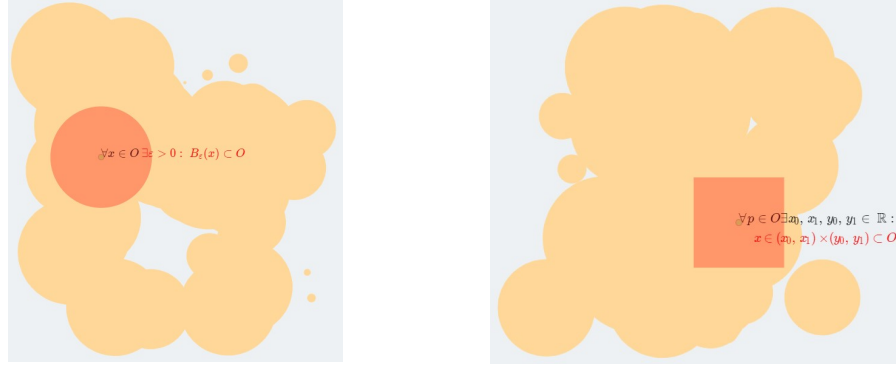
$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &:= \{A \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B_d(x, \varepsilon) \subseteq A\} \\ \mathcal{B}_1 &:= \{B((x, y), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge \varepsilon > 0\} \end{aligned}$$

2. La topología producto generada por el producto de las topologías usuales, con su respectiva base:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &:= \sigma(\{A \times B \mid A, B \in (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{usual})\}) \\ \mathcal{B}_2 &:= \{B(x, \varepsilon_1) \times B(y, \varepsilon_2) \subseteq \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge \varepsilon_{1,2} > 0\} \end{aligned}$$

Gráficamente, los abiertos se ven como se muestra en las siguientes figuras, donde cada elemento pertenece a un abierto basal:

Se puede observar que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$, para ello realizaremos una doble contención en lo que utilizaremos a sus bases para concluir.



(a) Forma de los abiertos basales en la topología métrica. (b) Forma de los abiertos basales en la topología producto.

Figura 3.1: Bases de la topología canónica en $\mathbb{R}^2$.

($\subseteq$) Sea $B(x_0, \varepsilon_1) \times B(y_0, \varepsilon_2) \in \mathcal{B}_2$ algún abierto basal de $\mathcal{T}_2$ (la topología producto), veamos que para todo $(x, y) \in B(x_0, \varepsilon_1) \times B(y_0, \varepsilon_2)$, existe $B((x, y), \varepsilon_3) \in \mathcal{B}_1$ tal que $x \in B((x, y), \varepsilon_3) \subseteq B(x_0, \varepsilon_1) \times B(y_0, \varepsilon_2)$.

Puesto que $x \in B_1(x_0, \varepsilon_1)$ e $y \in B_2(y_0, \varepsilon_2)$ (bolas en $\mathbb{R}$), luego existen $B_1(x, \bar{\varepsilon}_1), B_2(y, \bar{\varepsilon}_2)$ tales que:

$$x \in B_1(x, \bar{\varepsilon}_1) \subseteq B(x_0, \varepsilon_1) \wedge y \in B_2(y, \bar{\varepsilon}_2) \subseteq B(y_0, \varepsilon_2)$$

con $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2 > 0$.

Luego tomando $\varepsilon_3 = \min\{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2\}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} (x, y) \in B_3((x, y), \varepsilon_3) &\subseteq B_1(x, \bar{\varepsilon}_1) \times B_2(y, \bar{\varepsilon}_2) \\ &\subseteq B(x_0, \varepsilon_1) \times B(y_0, \varepsilon_2) \end{aligned}$$

Donde $B_3((x, y), \varepsilon_3) \in \mathcal{B}_1$, luego como se consideró un punto (x, y) arbitrario de un abierto de $\mathcal{B}_2$ arbitrario, se concluye que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.

($\supseteq$) Sea $B((x_0, y_0), \varepsilon_0) \in \mathcal{B}_1$ algún abierto basal de $\mathcal{T}_1$ (la topología canónica/métrica), veamos que para todo $(x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon_0)$, existe un abierto basal $B_1(x, \varepsilon_1) \times B_2(y, \varepsilon_2) \in \mathcal{B}_2$ tal que:

$$(x, y) \in B_1(x, \varepsilon_1) \times B_2(y, \varepsilon_2) \subseteq B((x_0, y_0), \varepsilon_0)$$

Para comenzar, tomando cualquier $(x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon_0)$, luego existe una bola $B((x, y), \varepsilon)$ tal que:

$$(x, y) \in B((x, y), \varepsilon) \subseteq B((x_0, y_0), \varepsilon_0)$$

Luego, tomamos $0 < \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} < \varepsilon$, entonces $B(x, \bar{\varepsilon}) \times B(y, \bar{\varepsilon}) \subseteq B((x, y), \varepsilon)$, que gráficamente se ve de la forma:

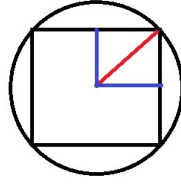


Figura 3.2: Caja contenida en una bola $B(x, \bar{\varepsilon}) \times B(y, \bar{\varepsilon}) \subseteq B((x, y), \varepsilon)$. En rojo se indica la tolerancia ε , en azul la tolerancia $\bar{\varepsilon}$.

Luego como $B(x, \bar{\varepsilon}) \times B(y, \bar{\varepsilon}) \in \mathcal{B}_2$, se concluye que $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$

Finalmente, por doble inclusión se concluye que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

3.3.3. Sub-base de una topología

También, a veces es útil disponer de la siguiente noción de subbase.

Definición 60 (Sub-base de una topología). Una familia de conjuntos $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una subbase para alguna topología sobre X , si la familia de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ es una base para una topología sobre X .

Lema 4 (Caracterización de subbase.). Todo $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup_{S \in \mathcal{S}} S = X$ es subbase para alguna topología sobre X .

Lema 5 (Caracterización de subbase mediante *topología generada*). Se dice que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es subbase de $\mathcal{T}$ si $\mathcal{T} = \sigma(\mathcal{S})$, o sea $\mathcal{S}$ es el generador de $\mathcal{T}$, o dicho de otro modo, $\mathcal{T}$ es la menor topología que contiene a $\mathcal{S}$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de subbases son:

1. Toda topología es subbase de si misma.
2. $\mathcal{S} = \{(-\infty, a), (b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para la topología usual sobre $\mathbb{R}$.
3. $\mathcal{S} = \{(-\infty, a], [b, \infty) : a, b \in \mathbb{R}\}$ es subbase para la topología discreta sobre $\mathbb{R}$.
4. En $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S} := \{\text{rectas}\}$ son tales que $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{T}_{dis}$ (la topología discreta de $\mathbb{R}^2$).
5. En $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{S} := \{\text{rectas horizontales}\}$, entonces $\sigma(\mathcal{S}) = \{\mathbb{R} \times B \mid B \subseteq \mathbb{R}\}$ (la topología de las franjas horizontales).

3.3.4. Topología en el espacio producto (continuación)

También es posible utilizar la noción de sub-base para recrear la topología sobre un conjunto $X \times Y$, veamos a continuación la construcción:

Definición 61 (Proyecciones). Sean $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ definida por $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ definida por $\pi_2(x, y) = y$. Las aplicaciones π_1 y π_2 se denominan proyecciones de $X \times Y$ sobre su primer y segundo factor, respectivamente.

Se puede observar que si $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ son conjuntos abiertos en las topologías sobre X e Y respectivamente, luego se definen:

$$\begin{aligned}\pi_1^{-1}(U) &= U \times Y \\ \pi_2^{-1}(V) &= X \times V\end{aligned}$$

que son abiertos en $X \times Y$. La intersección de estos dos conjuntos es de la forma $U \times V$, lo que lleva a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 20. La colección:

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(U) | U \in \mathcal{T}_X\} \sqcup \{\pi_2^{-1}(V) | V \in \mathcal{T}_Y\}$$

es una sub-base para la topología producto sobre $X \times Y$.

3.4. Espacios de Fréchet y Hausdorff

¿Es posible decir que tan separados se encuentran dos puntos $x, y \in X$ sin las herramientas de los espacios métricos (distancia)? Sí, con la noción de topología es posible clasificar a diferentes niveles la separación entre dos puntos, dichas categorías son los llamados **axiomas de separación**, el propósito principal de los axiomas de separación es el de hacer los puntos y conjuntos de un espacio topológicamente distinguibles.

Axioma (Separación T_1). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice de Fréchet o T_1 , si para cada par de puntos $x \neq y$, existe $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Axioma (Separación T_2). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice de Hausdorff o T_2 , si existen dos abiertos disjuntos $U, V \in \mathcal{T}$, tales que $x \in U$ e $y \in V$. Se suele decir que U y V separan a x e y .

Lema 6. Si $(X, \mathcal{T})$ es T_2 , entonces es T_1 .

Demostración. La topología $\mathcal{T}$ es T_2 , por lo tanto para todo $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos $U, V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ y $y \in V$. Luego es directo que se verifica la existencia de un abierto en la topología tal que $x \in U$ e $y \notin U$, por lo que se verifica también el axioma T_1 . ■

Comentario. En las definiciones anteriores, es posible reemplazar los abiertos por abiertos básicos.

Proposición 37.

1. Cualquier topología más fina que una topología T_1 , es T_1 .
2. Cualquier topología más fina que una topología T_2 , es T_2 .

Demostración. 1. Sea un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ que verifica T_1 , luego sea $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{T}}$, donde se dice que $\overline{\mathcal{T}}$ es una topología más fina que $\mathcal{T}$, osea que $\overline{\mathcal{T}}$ posee todos los abiertos de $\mathcal{T}$, así mismo posee los abiertos necesarios para cumplir la definición de T_1 .

2. El mismo argumento de (1).

■

3.5. Entornos y localidad

Los entornos constituyen la manera más natural de describir topologías, pues esta herramienta indica como funcionan las cosas cerca de cada punto, es decir, se trata de dar una descripción local de las propiedades.

3.5.1. Entornos y sistemas de entornos

Se entenderá por entorno de el punto x a cualquier conjunto que contiene a cualquier abierto al que pertenezca x , lo que a continuación se define:

Definición 62 (Entorno/vecindad y sistema de entornos/vecindades). En entorno de un punto x en $(X, \mathcal{T})$, es un subconjunto $N \subset X$ tal que existe un abierto $U \in \mathcal{T}$, que verifica que $x \in U \subseteq N$. En esta definición, puede cambiarte el abierto por un abierto básico. La familia $\mathcal{N}_x$ de todos los entornos de x se llama sistema de entornos de x .

Ejemplo. 1. En $R[n]$, $N = B(x, \varepsilon)$ y $N = \overline{B}(x, \varepsilon)$ son vecindades del punto x , pues $A = B(x, \varepsilon)$ está contenido en dichos conjuntos.

2. En $X = \{0, 1\}$ con la topología de

Teorema 21. El sistema de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ verifica las siguientes propiedades:

1. Para cada $N \in \mathcal{N}_x$, $x \in N$.
2. Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$.
3. Si $N \in \mathcal{N}$ y $N \subseteq M$, entonces $M \in \mathcal{N}_x$.
4. Para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $M \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \in \mathcal{N}_y$ para cada $y \in M$.

5. $U \in \mathcal{T}$ si y sólo si U es entorno de cada uno de sus puntos.

Demostración.

1. Es directo de la definición de entorno, pues x pertenece a todos sus entornos N .
2. Si $x \in N_1$ y $x \in N_2$, entonces $x \in N_1 \cap N_2$, por lo tanto $N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$.
3. Si $x \in N \subseteq M$, luego $x \in M$, por lo tanto M es entorno de x .
4. Pendiente.
5. Pendiente.

■

Comentario. Del teorema anterior, se tiene que si a cada x se le asigna una familia no vacía de subconjuntos M_x , verificando los puntos (1) a (4), y se usa (5) para definir el concepto de conjunto abierto, se obtiene una topología $\mathcal{T}$ sobre X , para la que $M_x = \mathcal{N}_x$ en cada punto.

Ejemplo. En los ejemplos vistos anteriormente se tiene:

1. En $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$, para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{\text{trivial}} = \{X\}$.
 - Es fácil ver que el único abierto en la topología es X , por lo tanto, para cualquier $x \in X$, la única vecindad existente es X .
2. En $(X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$, para todo $x \in X$, es $\mathcal{N}_x^{\text{discreta}} = \{N \subseteq X : x \in N\}$.
 - En la topología discreta, se recupera la definición "pura" de entorno, de los subconjuntos de X que contienen al elemento x .

3.5.2. Bases de entornos

No son necesarios todas las colecciones de conjuntos de los entornos de un punto para obtener una buena descripción del sistema de entornos, basta con una familia más pequeña:

Definición 63 (Base de vecindades/entornos o base local). Una base de entornos de x en $(X, \mathcal{T})$ es una familia $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ tal que, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq N$. En cuanto se ha elegido una base de entornos de un punto, sus elementos se llaman entornos básicos.

La familia $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ se llama sistema fundamental de entornos.

Ejemplo. Continuando con los ejemplos previos, se tiene:

1. En $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$, para todo $x \in X$, es $\mathcal{B}_x^{\text{trivial}} = \{X\}$.

- Pendiente.
- 2. En $(X, \mathcal{T}_{\text{discreta}})$, para todo $x \in X$, es $\mathcal{B}_x^{\text{discreta}} = \{\{x\}\}$.
- Pendiente.

Teorema 22. Sea $(X, \mathcal{T})$ y $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ un sistema fundamental de entornos. Se verifica:

1. Para caad $B \in \mathcal{B}_x$, es $x \in B$.
2. Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$, existe $B_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
3. Para cada $B \in \mathcal{B}_x$, existe $B_0 \in \mathcal{B}_x$, tal que para cada $y \in B_0$, existe $B_y \in \mathcal{B}_y$ tal que $B_y \subseteq B$.
4. $U \in \mathcal{T}$ si y sólo si para cada $x \in U$, existe $B \in \mathcal{B}_x$, tal que $B \subseteq U$.

Además, una forma natural de construir bases locales es mediante el siguiente lema:

Lema 7. En $(X, \mathcal{T})$, $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x \cap \mathcal{T}$ es una base local en x .

3.5.3. Topologías y sistemas de entornos

Teorema 23 (Criterio de Hausdorff). Sean $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ topologías sobre X y $\{\mathcal{B}_x^1\}_{x \in X}$, $\{\mathcal{B}_x^2\}_{x \in X}$ sistemas fundamentales de entornos asociados. Entonces $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $B_1 \in \mathcal{B}_x^1$ existe $B_2 \in \mathcal{B}_x^2$ tal que $B_2 \subseteq B_1$.

Corolario 23.1. $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow$ para cada $x \in X$, se tiene $\mathcal{N}_x^1 \subseteq \mathcal{N}_x^2$.

Comentario. La única diferencia entre las nociones de base local y base de topología es que las bases de entornos no constan necesariamente de conjuntos abiertos.

Proposición 38. Sea $(X, \mathcal{T})$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$. Entonces, $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$ si y sólo si, para cada $x \in X$, la familia $\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} | x \in B\}$ es una base local en x .

Observación. En las definiciones de $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$, se pueden reemplazar los abiertos por entornos o entornos básicos.

3.6. Axiomas de numerabilidad

Axioma (Primer axioma de numerabilidad (PAN)). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si cada punto en X posee una base de vecindades numerable, se dice que $(X, \mathcal{T})$ satisface el primer axioma de numerabilidad o que es primero contable.

Ejemplo. A continuación se muestran algunos espacios topológicos que satisfacen el PAN y algunos contraejemplos de espacios que no.

1. El espacio $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$ verifica el PAN, al elegir para todo $x \in X$, $\beta_x = \{X\}$.
2. El espacio $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ verifica el PAN, al elegir para todo $x \in X$, $\beta_x = \{\{x\}\}$.
3. El espacio $(X = \{a, b\}, \mathcal{T}_{\text{sier}})$ verifica el PAN, basta con escoger $\beta_a = \{\{a\}\}$ y $\beta_b = \{X\}$.
4. Los espacios $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{conum}})$ no satisfacen el PAN.
5. Importante: El espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ verifica el PAN, para cada $x \in \mathbb{R}$ basta con elegir $\beta_x = \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}\}$.

Proposición 39. Todo espacio métrico es primero contable.

Demostración. Sea (X, d) un espacio métrico dotado con la topología τ_d , luego para cada $x \in X$ se elige la base de vecindades $\beta_x \{ \text{Int}(B(x, \frac{1}{n})) | n \in \mathbb{N} \}$. ■

Proposición 40. Si $(X, \mathcal{T})$ es primero contable, entonces cada punto tiene una base de vecindades numerable y encajonada.

Axioma (Segundo axioma de numerabilidad (SAN)). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $\mathcal{T}$ posee alguna base $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ numerable, se dice que $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad o que es segundo contable.

Ejemplo.

1. El espacio $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$ satisface el SAN, basta con elegir $\mathcal{B} = \{X\}$.
2. El espacio $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ satisface el SAN ssi X es numerable, en dicho caso basta con tomar $\mathcal{B} = \{\{x\} | x \in X\}$.
3. Los espacios $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ y $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{conum}})$ no satisfacen el PAN, luego, tampoco satisfacen el SAN.
4. El espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$

Proposición 41. $(X, \mathcal{T})$ es segundo contable ssi $\mathcal{T}$ posee una sub-base numerable.

Proposición 42. Si $(X, \mathcal{T})$ es segundo contable, entonces $\forall x \in X$ existe una base de vecindades numerable (primero contable).

Comentario. La recíproca no se tiene necesariamente, osea que se primero contable no necesariamente implica ser segundo contable.

Demostración.

1. Sea $x \in X$, luego sea $V_x \subseteq X$ una vecindad cualquiera de x , entonces existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq V_x$, luego como A es abierto, existe $B \in \mathcal{B}$ donde B es alguna base para la topología $\mathcal{T}$, tal que $x \in B \subseteq A \subseteq V_x$, luego se concluye que toda vecindad de x contiene un abierto basal de $\mathcal{B}$.
2. Como se sabe que $\mathcal{T}$ es segundo contable, entonces basta con considerar alguna base numerable denotada por $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$, utilizando lo concluido en (1) entonces, para toda vecindad de x , existe algún $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ tal que $x \in B \subseteq V_x$, concluyendo que en un espacio topológico segundo contable, toda vecindad contiene un abierto basal de la base numerable.
3. Sea $\mathcal{N}_x$ la colección de todas las vecindades de x , debido a (2), se puede caracterizar según $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_x &= \{V_x \subseteq X \mid \exists A \in \mathcal{T}, \text{ tq } x \in A \subseteq V_x\} \\ &= \{V_x \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}} \text{ tq } x \in B \subseteq V_x\}\end{aligned}$$

Luego es directo que definiendo el subconjunto de $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{\mathbb{N}}^x &:= \{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}} \mid x \in B\} \\ &\subseteq \mathcal{N}_x\end{aligned}$$

- a) Como $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}^x \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ (por la definición es trivial), se concluye que $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}^x$ es numerable.
- b) Por otro lado, como para cualquier $V_x \in \mathcal{N}_x$, luego existe $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ tal que $x \in B \subseteq V_x$, entonces $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}^x$, concluyendo que $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}^x$ es base de vecindades.

Concluyendo la existencia de la base de vecindades numerable. ■

3.7. Interior, adherencia y frontera de un conjunto

Definición 64 (Interior de un conjunto). Dado un conjunto $A \subseteq X$, su interior, denotado como $\text{int}(A)$ es el mayor abierto contenido en A , o bien, la unión de todos los abiertos contenidos en A .

Ejemplo. 1. En $\mathbb{R}^d$, con la topología canónica se tiene que: $\text{int}(B(x_0, r)) = B(x_0, r)$.

Proposición 43. A continuación se presentan 7 propiedades que verifica el interior.

1. $x \in \text{int}(A) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{N}_x \text{ tq } V \subseteq A \Leftrightarrow A \in \mathcal{N}_x$.
2. A es abierto ssi $A = \text{int}(A)$.
3. $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$.
4. $A \subseteq B \Rightarrow \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$.
5. $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$; $\text{int}(X) = X$.
6. $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$.
7. $\text{int}(A) \sqcup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \sqcup B)$.

Definición 65 (Adherencia de un conjunto). Dado un conjunto $A \subseteq X$, su cerradura o adherencia, denotado $\text{adh}(A)$ o $\overline{A}$, es el menor cerrado que contiene a A , o bien, la intersección de todos los cerrados conteniendo a A .

Proposición 44. A continuación se presentan 8 propiedades que verifica la adherencia.

1. $\text{int}(A) \subseteq A \subseteq \text{adh}(A)$.
2. $x \in \text{adh}(A) \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_x, V \cap A \neq \emptyset$.
3. A es cerrado ssi $A = \text{adh}(A)$.
4. $\text{adh}(\text{adh}(A)) = \text{adh}(A)$.
5. $A \subseteq B \Rightarrow \text{adh}(A) \subseteq \text{adh}(B)$.
6. $\text{adh}(\emptyset) = \emptyset$; $\text{adh}(X) = X$.
7. $\text{adh}(A \cap B) \subseteq \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$.
8. $\text{adh}(A) \sqcup \text{adh}(B) = \text{adh}(A \sqcup B)$.

Proposición 45. Además, el interior y la adherencia por medio del complemento de conjuntos, posee las siguientes propiedades:

1. $(\text{adh}(A))^c = \text{int}(A^c)$.
2. $(\text{int}(A))^c = \text{adh}(A^c)$.
3. $\text{adh}(A) = (\text{int}(A^c))^c$.
4. $\text{int}(A) = (\text{adh}(A^c))^c$.

A continuación se verá un buen ejercicio, que entrega la noción de adherencia como un operador que satisface 4 puntos, los que serán llamados *axiomas de Kuratowsky*:

Operador cerradura

Axioma (Kuratowsky). Sea $X \neq \emptyset$. Una función $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ se llama **operador de cerradura**, si satisface los **axiomas de Kuratowsky**

K1.- $c(\emptyset) = \emptyset$.

K2.- $\forall A \in \mathcal{P}(X), A \subset c(A)$.

K3.- $\forall A \in \mathcal{P}(X), c(c(A)) \subset c(A)$ (*idempotente*).

K4.- $\forall A, B \in \mathcal{P}(X), c(A \sqcup B) = c(A) \sqcup c(B)$.

Proposición 46. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, entonces la función definida por $c(A) = \text{Adh}(A)$ es un operador cerrado

Demostración. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Veamos que $c(A) = X \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{T}, A \cap B = \emptyset} B$ satisface los axiomas.

i) $c(\emptyset) = X \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{T}, \emptyset \cap B = \emptyset} B$, luego basta notar que $X \cap \emptyset = \emptyset$, entonces:

$$c(\emptyset) = X \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{T}, \emptyset \cap B = \emptyset} B = X \setminus X = \emptyset$$

ii)

iii)

iv)

■

Proposición 47. Si $c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ satisface K1-K4, entonces la familia

$$\mathcal{T} = \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{P}(X) \wedge c(F) = F\}$$

es una topología en X .

Definición 66 (Frontera de un conjunto). Dado un conjunto $A \subseteq X$, su frontera denotada $fr(A)$, es el conjunto:

$$fr(A) := \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A)$$

Ejemplo. En $\mathbb{R}^d$, $fr(B(x_0, r)) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid |y - x_0| = r\}$.

Proposición 48. A continuación se presentan 4 propiedades que verifica la frontera.

1. $x \in fr(A) \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{N}_x, V \cap A \neq \emptyset \text{ y } V \cap A^c \neq \emptyset.$
2. $fr(A) = adh(A) \cap adh(A^c).$
3. $adh(A) = A \sqcup fr(A).$
4. $int(A) = adh(A) \setminus fr(A).$

Definición 67 (Conjunto denso). Dado un conjunto $D \subseteq X$, diremos que D es denso en X si $adh(D) = X$, o bien, para cualquier $A \in \mathcal{T}$, $A \cap D \neq \emptyset$.

- Ejemplo.*
1. En $\mathbb{R}$ con la topología habitual, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.
 2. En $\mathbb{R}$ con la topología discreta, si D es denso en $\mathbb{R}$, entonces $D = \mathbb{R}$.
Si $x \in \mathbb{R}$, $\{x\}$ es abierto. Como D es denso, $D \cap \{x\} \neq \emptyset$, luego $x \in D$.
 3. Intente hallar los densos de $\mathbb{R}$ con la topología grosera.

Capítulo 4

Continuidad de funciones y topología inducida

4.1. Continuidad

Definición 68 (Función continua). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Diremos que $f : X \rightarrow Y$ es continua en $\bar{x} \in X$ si

$$\forall W \in \mathcal{N}_{f(\bar{x})}, \exists V \in \mathcal{N}_{\bar{x}} \text{ tq } f(V) \subseteq W$$

Diremos que f es continua en X si lo es en cada punto de X .

Teorema 24 (Caracterización de función continua). Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Diremos que $f : X \rightarrow Y$ es continua si la pre-imagen de todo abierto de $\mathcal{T}_Y$ es un abierto de $\mathcal{T}_X$.

Demostración.

- $(\Rightarrow)$ Supongamos que f es una función continua y sea $B \in \mathcal{T}_Y$. Probemos que $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$, es decir, es vecindad de todos sus puntos.
Sea $x \in f^{-1}(B)$, luego $f(x) \in B$. Como B es abierto, es vecindad de $f(x)$.
Usando que f es continua, existe $A \in \mathcal{N}_x$ tal que $f(A) \subseteq B$. Es decir, $A \subseteq f^{-1}(B)$.
Como A es vecindad de x , $f^{-1}(B)$ también lo es. Esto es, $f^{-1}(B)$ es vecindad de todos sus puntos.
- $(\Leftarrow)$ Supongamos $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ para cualquier $B \in \mathcal{T}_Y$. Probemos que f es continua en $\bar{x} \in X$ arbitrario.
Sea $\bar{x} \in X$ y W vecindad de $f(\bar{x})$. Luego, existe B abierto en $\mathcal{T}_Y$ tal que $f(\bar{x}) \in B \subseteq W$.
Luego, $\bar{x} \in f^{-1}(B)$, que es abierto en $\mathcal{T}_X$ por hipótesis, y es vecindad de $\bar{x}$.
Sea $A := f^{-1}(B)$ vecindad de $\bar{x}$. Entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B \subseteq W$ (compruébelo), lo que prueba el resultado.

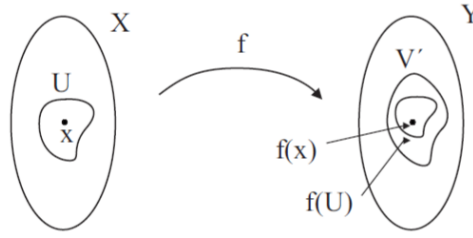


Figura 4.1: Función continua entre dos espacios

Ejemplo. Algunos ejemplos de funciones continuas son:

1. Para cualquier espacio topológico de llegada $(Y, \mathcal{T}_Y)$ y toda función $f, f : (X, \mathcal{T}_{discreta}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua.
2. Para cualquier espacio topológico de salida $(X, \mathcal{T}_X)$ y toda función $f, f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_{trivial})$ es continua.
3. Toda aplicación constante $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua.
4. Si $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una función continua y se consideran las topologías $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}'_X$ y $\mathcal{T}'_Y \subseteq \mathcal{T}_Y$, también es continua la aplicación $f : (X, \mathcal{T}'_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}'_Y)$.
5. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es dada por $f(x) := \|x\|$, $f^{-1}((1, 2)) = \{1 < \|x\| < 2\} = B(0, 2) \setminus \overline{B}(0, 1)$.

Observación. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua. Si se agranda $\mathcal{T}_X$ o achica $\mathcal{T}_Y$, la función sigue siendo continua.

Corolario 24.1 (Continuidad mediante cerrados). La función $f : X \rightarrow Y$ es continua, si y solo si, la preimagen de todo cerrado en Y es cerrado en X .

Proposición 49. La composición de funciones cumple:

1. Si $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua en $\bar{x} \in X$, y $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ es continua en $\bar{y} = f(\bar{x})$, entonces $g \circ f$ es continua en $\bar{x}$.
2. Si $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es continua en X , y $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ es continua en Y , entonces $g \circ f$ es continua en X .

Demostración. 1. Sea $W \in \mathcal{N}_{\bar{z}}$, con $\bar{z} = g(f(\bar{x})) = g(\bar{y})$, se debe probar que existe $U \in \mathcal{T}_X$ tal que $g(f(U)) \subseteq W$.
Como g es continua en $\bar{y}$, existe $V \in \mathcal{N}_{\bar{y}}$ tal que $g(V) \subseteq W$.
Como f es continua en $\bar{x}$, existe $U \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ tal que $f(U) \subseteq V$. Luego, existe $U \in \mathcal{T}_X$ tal que $g(f(U)) \subseteq W$.

2. Verificar para todos los $x \in X$ y para todos los $y \in Y$.

4.2. Topologías directas e inversas mediante funciones

Definición 69 (Topología inversa). Sea $f : X \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$, con $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacio topológico. Entonces:

$$\mathcal{T} := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{T}_Y\}$$

es topología, denotada topología inversa inducida por f .

Observación. La topología inversa es la topología menos fina (más chica) que hace que f sea continua.

Veamos que la topología inducida por una función continua es efectivamente una topología:

Demostración. ■ *Conjunto completo y el vacío:* Propuesto.

- *Intersección finita:* Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$, donde $A_1 = f^{-1}(B_1)$ y $A_2 = f^{-1}(B_2)$ para ciertos $B_1, B_2 \in \mathcal{T}_Y$. Entonces $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}_Y$ y se tiene que

$$A_1 \cap A_2 = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \cap B_2)$$

concluyendo que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$.

- *Unión arbitraria:* Propuesto.

- *La menos fina que hace a f continua:* Claramente f es continua, pues por definición $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$, para $B \in \mathcal{T}_Y$. Además si $\overline{\mathcal{T}}$ es otra topología en X que hace a f continua, entonces $f^{-1}(B) \in \overline{\mathcal{T}}$ para cada $B \in \mathcal{T}_Y$. Luego $\mathcal{T} \subseteq \overline{\mathcal{T}}$. ■

Proposición 50. Sea $F : (Z, \mathcal{T}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$, donde $\mathcal{T}_X = \sigma(f_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ es la topología inducida por la familia de funciones $f_\lambda : X \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. F es continua si y sólo si $f_\alpha \circ F$ es continua para todo $\lambda \in \Lambda$.

Definición 70 (Topología directa). Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ una función continua con $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio topológico. Entonces:

$$\mathcal{T} := \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X\}$$

es topología, denotada topología directa inducida por f .

Observación. La topología directa es la topología más fina (más grande) que hace que f sea continua.

Demostración. Ahora veremos que efectivamente es una topología:

- *Conjunto completo y el vacío:*

1. Tenemos que $f(\emptyset) = \emptyset \subseteq Y$, lo que implica que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \subseteq X$, luego como $\emptyset \in \mathcal{T}_X$, se concluye que $\emptyset \in \mathcal{T}_Y$.
2. Sea $f(X) = U \subseteq Y$, entonces $f^{-1}(U) = f^{-1}(f(X)) = X$ y $X \in \mathcal{T}$, lo anterior implica $f(x) = U \in \mathcal{T}_Y$. Veamos que por otro lado, $[f^{-1}(U)]^c = X^c = \emptyset$ y además que $f^{-1}(U^c) = [f^{-1}(U)]^c$ (propiedad de la preimagen), lo que implica que $f^{-1}(U^c) = \emptyset$. Luego como $U \sqcup U^c = Y$, entonces

$$f^{-1}(U \sqcup U^c) = f^{-1}(U) \sqcup f^{-1}(U^c) = X \sqcup \emptyset = X$$

Entonces $f^{-1}(Y) = X$, concluyendo que $Y \in \mathcal{T}_Y$.

- *Intersección finita:* Sean $A, B \in \mathcal{T}_Y$, entonces $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) &\in \mathcal{T}_X \\ \Rightarrow f^{-1}(A \cap B) &\in \mathcal{T}_X \\ \Rightarrow A \cap B &\in \mathcal{T}_Y \end{aligned}$$

- *Unión arbitraria:* Sean $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$. Entonces $f^{-1}(A_\lambda) \in \mathcal{T}_X$. Luego:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda) \in \mathcal{T}_X$$

Se concluye que la unión arbitraria se encuentra en $\mathcal{T}$.

- *La más fina que hace a f continua:* Claramente para cada $B \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ por definición, luego f es continua. Además si $\overline{\mathcal{T}}$ es otra topología en Y que hace a f continua, entonces $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$ para cada $B \in \overline{\mathcal{T}}$. Luego $B \in \mathcal{T}$, esto es que $\overline{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$.

■

Comentario. Ésta topología tiene aplicaciones muy importantes, entre ellas está presente en el estudio de las superficies de Riemann.

Proposición 51. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ donde $\mathcal{T}_Y$ es la topología directa (o final), además $g : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ con $(Z, \mathcal{T}_Z)$ espacio topológico. Entonces $g \circ f$ es continua ssi g es continua.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $g \circ f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ es continua, entonces para cualquier $C \in \mathcal{T}_Z$ se tiene que $(g \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{T}_X$. Sabemos que como preimagen se cumple que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, usando lo anterior entonces:

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{-1}(C) &= f^{-1} \circ g^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{T}_X \\ &\Rightarrow g^{-1}(C) \in \mathcal{T}_Y \end{aligned}$$

Concluyendo que g es continua.

($\Leftarrow$) Supongamos que g es continua, entonces para todo $C \in \mathcal{T}_Z$, $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in \mathcal{T}_X$, entonces $(g \circ f)^{-1} \in \mathcal{T}_X$, concluyendo que $g \circ f$ es continua. ■

Proposición 52. Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow Y$ función sobreyectiva, donde $\mathcal{T}_Y$ es la topología directa (o final) sobre Y mediante f . Sea $\mathcal{T}^*$ una topología que hace a f una función abierta y continua, entonces $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}^*$

Demostración. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua gracias a que f induce la topología sobre $\mathcal{T}_Y$. Sea $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}^*)$ una aplicación abierta y continua. Razonando mediante doble inclusión:

- ($\subseteq$) Sea $A \in \mathcal{T}^*$, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$ puesto que es $\mathcal{T}_X - \mathcal{T}^*$ continua, notando que A cumple la condición para estar en $\mathcal{T}_Y$, como A es arbitrario se concluye.
- ($\supseteq$) Sea $A \in \mathcal{T}_Y$, entonces $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X$ puesto que es $\mathcal{T}_X - \mathcal{T}_Y$ continua, luego utilizando la sobreyectividad (hay inversa por la derecha) entonces $f \circ f^{-1}(A) = A \in \mathcal{T}^*$, concluyendo. ■

4.2.1. Topología cuociente

Definición 71 (Topología cuociente). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\sim$ una relación de equivalencia sobre X .

Denotemos por $X \setminus \sim := \{[x] | x \in X\}$ al espacio cuociente (o de clases de equivalencia). Tenemos que la función:

$$\begin{aligned} [\cdot] : (X, \mathcal{T}) &\rightarrow X \setminus \sim \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

induce sobre $X \setminus \sim$ una topología directa (llama topología cuociente), denotada por $\mathcal{T} \setminus \sim$.

Tendremos que $B \in \mathcal{T} \setminus \sim$ (un subconjunto de clases de equivalencias) ssi $[\cdot]^{-1}(B) \in \mathcal{T}$. Esto es:

$$\{x \in X | [x] \in B\} \in \mathcal{T}$$

Proposición 53. Sea el espacio $X \setminus \sim$ dotado de la topología directa asociada a $[\cdot]$. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua tal que $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$, entonces la función:

$$\begin{aligned} \hat{f} : X \setminus \sim &\rightarrow Y \\ [x] &\mapsto \hat{f}([x]) = f(x) \end{aligned}$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Notemos que $[\cdot]$ es una función continua pues induce una topología directa en $X \setminus \sim$ y f es una función continua por hipótesis, concluyendo por la proposición 51 que $\hat{f}$ es continua. ■

Definición 72 (Topología traza o del sub-espacio). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, y sea $Z \subseteq X$. Luego la inyección:

$$I_Z : Z \rightarrow (X, \mathcal{T}), \quad I_Z(x) = x$$

induce en Z la siguiente topología inversa (denominada topología traza de X sobre Z)

$$\mathcal{T}|_Z := \{I_Z^{-1}(A) | A \in \mathcal{T}\} \\ \{Z \cap A | A \in \mathcal{T}\}$$

A $(Z, \mathcal{T}|_Z)$ se le llama sub-espacio topológico de $(X, \mathcal{T})$.

Observación. Hay que tener cuidado, pues $Z \cap A$ es abierto en Z , pero no necesariamente en X .

Ejemplo. Se tiene que $(-a, a) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$ es abierto en $Z = [0, \infty)$, pero no en $\mathbb{R}$ con la topología canónica.

Observación. Las vecindades de $z \in Z$ son de la forma $V \cap Z$, con $V \in \mathcal{N}_x(\mathcal{T})$ y algún $x \in X$.

4.3. Topología inversa inducida por una familia de funciones

Motivación: Sea X un conjunto y $f_\lambda : X \rightarrow (X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ una familia de funciones para $\lambda \in \Lambda$, con $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ espacios topológicos.

Sea $X = \prod X_\lambda$ y las funciones $f_\lambda := \pi_\lambda : X \rightarrow X_\lambda$, se quiere inducir una topología inversa sobre X que haga a cada f_λ continua.

Una respuesta fácil: Si a X se le dota de la topología discreta $\mathcal{T} := \mathcal{P}(X)$, que hace continuas a todas las funciones f_λ trivialmente, sin embargo ésta topología es muy grande, queremos optimizar el tamaño de la topología sobre X .

Una construcción alternativa: Si ahora tomamos las topologías

$$\sigma_\lambda := \{f_\lambda^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{T}_\lambda\}$$

y definimos una topología como la unión de las preimágenes de todas las topologías $\mathcal{T}_\lambda$:

$$\mathcal{T} := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \sigma_\lambda$$

Donde $\mathcal{T}$ no necesariamente es topología, pues la unión de topologías no es necesariamente una topología.

Una respuesta: La solución al problema es utilizar una base de abiertos y generar la topología desde allí. Tomemos como familia generadora:

$$\mathcal{B} := \{f_\lambda^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{T}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

y definimos la topología inducida por las f_λ como la generada por la familia $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} := \sigma(\mathcal{B}) = \bigcap_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*$$

Ejercicio 9. 1. Probar que $\mathcal{T}$ es efectivamente una topología, que hace a cada f_λ continua, y es la menos fina que hace esto.

2. Mostrar que todo elemento en $\mathcal{T}$ se escribe como la unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$.

3. ¿Es $\mathcal{B}$ una base de abiertos en $\mathcal{T}$?

4.3.1. Topología inversa a partir de una familia de semi-normas $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

Sea $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio que deseamos dotar de una topología que denotaremos por $\mathcal{T}$, dicha topología la definiremos a partir de una familia de

seminormas. Sea $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la familia de seminormas dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_k : (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathcal{T}) &\rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{T}_k) \\ f &\mapsto \rho_k(f) := \sup_x |f^{(k)}(x)| \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{T}_k$ corresponde a la topología traza o del subconjunto heredada a partir del espacio topológico usual $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$. Veamos que para que cada ρ_k sea continua, se debe cumplir que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \rho_k^{-1}(A_k) \in \mathcal{T} \text{ tq } A_k \in \mathcal{T}_k$$

Osea que todas las preimágenes de cada $\mathcal{T}_k$, mediante ρ_k respectivamente deben estar en la topología $\mathcal{T}$. Definiremos la colección:

$$\mathcal{S} := \{\rho_k^{-1}(A_k) | \exists k \in \mathbb{N} \text{ tq } A_k \in \mathcal{T}_k\}$$

Dónde la colección $\mathcal{S}$ será utilizada como sub-base para generar $\mathcal{T}$, por lo tanto trivialmente $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, asegurando que estén presentes los conjuntos abiertos necesarios para hacer continuas a las seminormas anteriores, luego por definición tendremos que generaremos $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} := \sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\bar{\mathcal{T}} \supseteq \mathcal{S}} \bar{\mathcal{T}}$$

Oséa que $\mathcal{T}$ será la intersección de todas las topologías que contienen a $\mathcal{S}$, teniendo que $\mathcal{T}$ es topología, puesto que la intersección de topologías es una topología.

4.3.2. Topología producto

Sea $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de espacios topológicos, y sea $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ su espacio producto al que se desea dotar de alguna topología.

La familia de proyecciones canónicas donde para $\mu \in \Lambda$ fijo se tiene la función:

$$\begin{aligned} \pi_\mu : X &\rightarrow X_\mu \\ x &\mapsto \Pi_\mu(x) = x_\mu \end{aligned}$$

induce en X una topología llamada *topología producto* denotada por $\bigotimes_\lambda \mathcal{T}_\lambda$, que es la menos fina que hace a cada π_λ continua.

Definición 73 (Cilindro). Un cilindro C en $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es un conjunto de la forma

$$C = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \subseteq X$$

donde cada $C_\lambda \subseteq X_\lambda$ pero el número de λ 's tal que $C_\lambda \neq X_\lambda$ es finito.

Se dirá que C es abierto si cada C_λ lo es en su topología $\mathcal{T}_\lambda$ respectiva. Además note que todo cilindro es de la forma (ver figura)

$$C = \bigcap_{\lambda \in I, I \subseteq \Lambda \text{ finito}} \pi_\lambda^{-1}(C_\lambda)$$

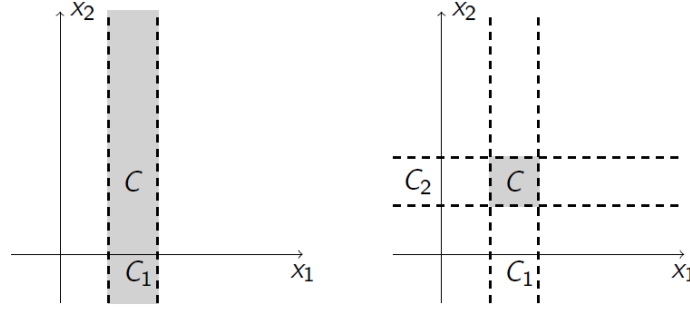


Figura 4.2: A la izquierda, un cilindro abierto a una coordenada fija en C_1 . A la derecha, un cilindro abierto con dos coordenadas fijas.

Ejemplo. Un ejemplo de cilindro puede ser con $I = \{1, 4\}$ como el conjunto donde $C_\lambda \neq X_\lambda$, teniendo

$$C = X_0 \times C_1 \times \cdots \times C_4 \times X_5 \times \cdots$$

Teorema 25. La familia de cilindros abiertos es una base de abiertos para la topología producto $\bigotimes_\lambda \mathcal{T}_\lambda$. Esto es, A es abierto en $\bigotimes_\lambda \mathcal{T}_\lambda$ ssi

$$\forall x \in A, \exists C \text{ cilindro abierto tq } x \in C \subseteq A$$

Observación. En dimensión finita, el producto infinito de abiertos $C_\lambda \neq X_\lambda$ no necesariamente es abierto. Por eso los cilindros tienen un número finito de coordenadas diferentes a X_λ .

Demostración. ■ $(\Rightarrow)$ Sea A abierto en $\mathcal{T}$. Entonces A es unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{B}$, que son de la forma

$$B_\lambda := \pi_\lambda^{-1}(C_\lambda), \quad C_\lambda \text{ es abierto en } X_\lambda$$

Claramente B_λ es un uni-cilindro (solamente a una coordenada fija λ se le asigna C_λ). Sea $x \in A$. Entonces x está en particular en una intersección finita de elementos $B_1, \dots, B_n$ en $\mathcal{B}$, está a su vez contenida en A . Luego, está en cada uno de ellos.

Escribiendo $B_j := \pi_j^{-1}(C_j)$, tenemos

$$x \in \bigcap_{j=1}^n B_j = \bigcap_{j=1}^n \pi_j^{-1}(C_j) =: C$$

que es un cilindro, contenido en A , que es lo que queríamos probar.

- ($\Leftarrow$) Probaremos que A es vecindad de todos sus puntos. Sea $x \in A$. Entonces existe C cilindro abierto tal que $x \in X \subseteq C$. Pero C es abierto, porque es elemento de $\mathcal{B}$. Esto prueba que A es vecindad de sus puntos, ie. abierto.



Observación. Es muy importante tener un control seguro de cómo trabajar con la topología producto vía los cilindros abiertos, pues serán relevantes a la hora de probar que el producto de compactos es compacto. Esto requiere tiempo y trabajo duro, así creatividad para imaginar los objetos infinito-dimensionales que estamos trabajando. Este control tan preciso de la topología producto no se conocía hasta que Tychonoff demostró su teorema vía el uso de cilindros.

Capítulo 5

Separación y convergencia

5.1. Separación

5.1.1. Axiomas de separación

A continuación vamos a introducir nociones importantes que permiten entender cuándo una topología permite distinguir entre puntos (recordar que las topologías son colecciones de abiertos, solamente). La siguiente descripción es estándar en la literatura, aunque hay variaciones específicas que consideran definiciones intermedias.

Axioma (T_0). Diremos que $(X, \mathcal{T})$ es T_0 o espacio de Kolmogorov si para todo $x \neq y$, o bien existe vecindad V de x con $y \notin V$, o bien existe vecindad W de y con $x \notin W$.

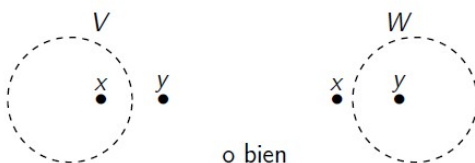


Figura 5.1: Separación T_0

Ejemplo.

1. Casi cualquier $(X, \mathcal{T})$ es T_0 , pero X de dos o más elementos con la topología trivial $\{X, \emptyset\}$, no lo es.
2. $X = \{0, 1\}$ con la topología $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ es T_0 , pues $\{0\}$ es una vecindad de 0 que no contiene a 1.

Proposición 54 (Caracterización de T_0). Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. X es T_0 .

2. Para cada par de puntos distintos x, y existe un abierto A que contiene únicamente a x o y .
3. Para cada par de puntos distintos $x \neq y$, $\text{adh}(\{x\}) \neq \text{adh}(\{y\})$.

Ejercicio 10. Para $X = \{a, b, c\}$ (de tres elementos diferentes), encuentre las topologías en X que lo hacen T_0 .

Axioma (T_1). Diremos que $(X, \mathcal{T})$ es T_1 o espacio de Frechet si para todo $x \neq y$ existen vecindades V de x y W de y tales que $y \notin V$ y $x \notin W$.

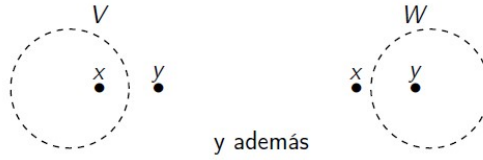


Figura 5.2: Separación T_1

Ejemplo.

1. X con la topología discreta e claramente T_1 .
2. $X = \{0, 1\}$ con $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ no es T_1 , pues 1 sólo posee a X como vecindad, que no le separa del 0.

Proposición 55. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es T_1 .
2. Todo singleton es cerrado.
3. Todo singleton es la intersección de sus vecindades.

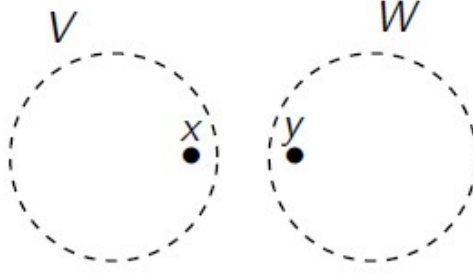
Ejercicio 11. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T_1 .

Axioma (T_2). Diremos que $(X, \mathcal{T})$ es T_2 , o espacio de Hausdorff, o separado, si para todo $x \neq y$ existen vecindades disjuntas $V \in \mathcal{N}_x$, $W \in \mathcal{N}_y$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ con la topología canónica, se tiene que si $x \neq y$, considerando como radios $r := \frac{1}{4}|x - y|$, entonces $V = B(x, r)$ y $W = B(y, r)$ satisfacen lo pedido, concluyendo que el espacio es T_2 .

Ejercicio 12. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T_2 .

A continuación se presenta algunas equivalencias interesantes a que un espacio topológico sea T_2 :

Figura 5.3: Separación T_2

Proposición 56. Son equivalentes los siguientes enunciados:

1. X es T_2 o de Hausdorff.
2. Para $x \in X$ e $x \neq y$ existe $V \in \mathcal{N}_x$ con $y \notin \text{adh}(V)$.
3. Para todo $x \in X$ se cumple que:

$$\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} \{\text{adh}(V)\} = \{x\}$$

4. La diagonal $D := \{(x, x) | x \in X\}$ es cerrada en el espacio topológico $(X \times X, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T})$.

Demostración.

1 $\rightarrow$ 2 Propuesto.

2 $\rightarrow$ 3 Por doble inclusión:

($\supseteq$) Si $V \in \mathcal{N}_x$, entonces $x \in V \subseteq \text{adh}(V)$. Luego $x \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} \{\text{adh}(V)\}$, por lo que se concluye que:

$$\{x\} \subseteq \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} \{\text{adh}(V)\}$$

($\subseteq$) Razonando hacia contradicción, supongamos que si $y \in \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} \{\text{adh}(V)\}$ es distinto de x , por hipótesis existe $V \in \mathcal{N}_x$ tal que $y \notin \text{adh}(V)$, contradicción, concluyendo que no hay elementos diferentes de x en $\bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} \{\text{adh}(V)\}$.

3 $\rightarrow$ 4 Se buscará probar que D^c es abierto. Sea $(x, y) \in D^c$, es decir $x \neq y$.

Utilizando la hipótesis (oséa 3) $y \notin \bigcap_{V \in \mathcal{N}_x} \{\text{adh}(V)\}$.

Luego, para cierto $V \in \mathcal{N}_x$, $y \notin \text{adh}(V)$. Sean A abierto tal que $x \in A \subseteq V$, y $B := (\text{adh}(V))^c$ abierto con $y \in B$. Entonces $A \times B$ es abierto contenido en D^c , y $(x, y) \in A \times B$, luego D^c es la unión de todos los abiertos creados de esta forma, concluyendo que D^c es abierto.

- 3 $\rightarrow$ 4 Si $x \neq y$ entonces el elementos $(x, y) \notin D$. Como D es cerrado entonces D^c es abierto en $X \times X$. Luego, existen A, B abiertos en $\mathcal{T}$ tales que $x, y \in A \times B \subseteq D^c$.
Consecuentemente $x \in A$ e $y \in B$, y $A \times B = \emptyset$ porque si no lo fuese $A \times B$ intersectaría la diagonal D .

■

Proposición 57. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_2 , entonces $Y \subseteq X$ con la topología traza es un espacio topológico T_2 .

Proposición 58. El espacio $(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \bigotimes \mathcal{T}_\lambda)$ es T_2 (bajo la topología producto) ssi cada $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ es T_2 .

Demostración.

($\Leftarrow$) Sean $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ espacios topológicos T_2 y sea $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, con la topología $\mathcal{T} := \bigotimes \mathcal{T}_\lambda$.

Sean $x \neq y$ en X , luego existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \neq y_\lambda$. Como X_λ es T_2 , existen conjuntos abiertos A_λ y B_λ disjuntos que contienen a x_λ e y_λ respectivamente (y los separan).

El resultado final, se obtiene considerando los cilindros abiertos:

$$C_A := A_\lambda \times \prod_{\mu \neq \lambda} X_\mu$$

$$C_B := B_\lambda \times \prod_{\mu \neq \lambda} X_\mu$$

que contienen a x e y respectivamente, dichos abtos. son disjuntos.

($\Rightarrow$) Propuesto.

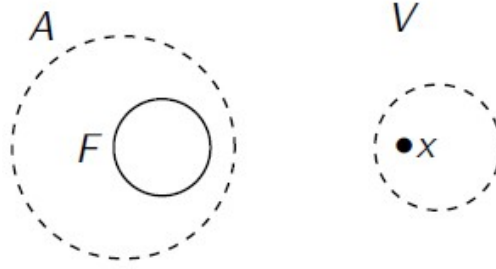
■

Axioma (T_3). Diremos que $(X, \mathcal{T})$ es T_r , o espacio de Tychonoff, o regular, si es T_1 y además, para todo cerrado F y $x \notin F$, existen abiertos A y vecindad $V \in \mathcal{N}_x$ tales que $V \cap A = \emptyset$ y $F \subseteq A$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ con la topología canónica, se tiene que si $x \neq y$, si $F = \overline{B}(x_0, r)$ es cerrado y $x \notin F$, además considerando como radio $d := \frac{1}{4}|x - y|$, entonces $A = B(x_0, 1, 1r)$ y $V = B(x_0, 0, 1r)$ satisfacen lo pedido, concluyendo que el espacio es T_3 .

Ejercicio 13.

1. Si $(X, \mathcal{T})$ es T_3 , entonces es T_2 .
2. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T_3 .

Figura 5.4: Separación T_3

Axioma (T_4). Diremos que $(X, \mathcal{T})$ es T_4 o normal, si es T_1 y para cualquier par de cerrados disjuntos F_1, F_2 , existen abiertos disjuntos U_1, U_2 , tal que $F_i \subseteq U_i$ con $i \in \{1, 2\}$.

Figura 5.5: Separación T_4

Ejercicio 14.

1. Mostrar que T_4 implica T_3 .
2. Para $X = \{a, b, c\}$ de tres elementos diferentes, encuentre las topologías en X que lo hacen T_4 .

5.1.2. Teorema de Urysohn

Teorema 26 (Urysohn). El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_4 (normal) ssi es T_1 y verifica lo siguiente:

- Para todo cerrado F y abierto A tales que $F \subseteq A$, existe $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ continua entre la topología $\mathcal{T}$ sobre X y la topología traza de la topología canónica de $\mathbb{R}$ sobre $[0, 1]$, tal que:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= 1, \forall x \in F \\ \mu(x) &= 0, \forall x \notin A\end{aligned}$$

Demostración.

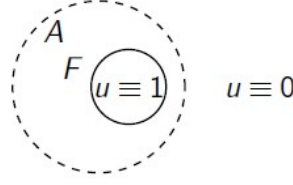


Figura 5.6: Separación mediante una función de Urysohn

($\Leftarrow$) Suponiendo que $(X, \mathcal{T})$ es T_1 y que existe una función de Urysohn u . El objetivo es probar que et es T_4 .

Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados disjuntos, debemos hallar abiertos U_1, U_2 disjuntos, donde $F_i \subseteq U_i$, $i \in \{1, 2\}$. Luego, como los conjuntos cerrados son disjuntos, luego $F_1 \subseteq F_2^c$, donde denotaremos $F := F_1$ y $A := F_2^c$.

Sea $u : X \rightarrow [0, 1]$ continua, la función de Urysohn asociada a F y A , con $u|_F = 1$ y $u|_{A^c} = 0$.

Definimos $U_1 := u^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ y $U_2 := u^{-1}([0, \frac{1}{2}))$, notemos que U_1 y U_2 son disjuntos, pues no puede ser que $u(x) > \frac{1}{2}$ y $u(x) < \frac{1}{2}$ al mismo tiempo. Notemos también que $F_1 = F \subseteq U_1$, pues $F \subseteq u^{-1}(\{1\})$. Asimismo, $F_2 \subseteq U_2$.

Como $[0, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, 1]$ son abiertos para la topología traza de la topología canónica en $\mathbb{R}$ sobre $[0, 1]$, se tiene que U_1 y U_2 son abiertos en X y se concluye.

($\Rightarrow$) Propuesto. ■

Corolario 26.1. Todo espacio métrico es normal.

A continuación se verá un espacio que no sea T_2 o Hausdorff:

Ejemplo. A continuación se verá un espacio topológico que no es T_2 o de Hausdorff, sea $X = [0, 1]$ con la base de vecindades (abiertas) $(\beta_x)_{x \in [0, 1]}$ siguiente:

$$x \in (0, 1) \Rightarrow \beta_x := \{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [0, 1]\}_{\varepsilon > 0}$$

Si $x = 0, 1$, tomamos:

$$\beta_0 = b_1 := \{[0, \varepsilon) \sqcup (1 - \varepsilon, 1]\}_{\varepsilon > 0}$$

X con la topología generada, no es T_2 , porque no es posible separar al 0 del 1. (En realidad X es muy similar a un círculo, pero no es igual).

Si X no es T_2 , entonces es posible que el límite de sucesiones no sea único, a continuación se estudiará éste problema.

5.1.3. Teorema de extensión de Tietze

Una consecuencia inmediata del *Teorema de Urysohn* es el *Teorema de extensión de Tietze*, que se ocupa en resolver el problema de extender una función continua con valores reales, definida sobre un subespacio de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, a una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 27 (Tietze). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico normal (T_4) y A un subespacio cerrado de X .

1. Cualquier aplicación continua $f : A \rightarrow [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $[a, b]$.
2. Cualquier aplicación continua $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación de todo X en $\mathbb{R}$.

Proposición 59. El Teorema de extensión de Tietze implica el Teorema de Urysohn.

5.2. Convergencia

5.2.1. Conjuntos dirigidos y redes

El concepto de convergencia es de importancia fundamental en el Análisis. Muchas de las nociones de continuidad, derivabilidad, integral de Riemann,... se definen en términos de límites. Se necesita definir el concepto de límite en espacios topológicos.

Las sucesiones no son adecuadas, resulta que en espacios topológicos arbitrarios, las sucesiones no son buenas herramientas para medir la convergencia, en cierta forma, se necesita una generalización del concepto de sucesión, para trabajar espacios más generales. Aquí aparece el concepto de *red*, que naturalmente generaliza el de sucesión.

1. Las redes fueron introducidas por Moore y Smith en 1922.
2. Los filtros, como una teoría formal, fueron definidos por Cartan en 1936.

Definición 74 (Conjunto dirigido). Sea $(\Lambda, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado^a. Diremos que Λ es conjunto dirigido si para cada $\alpha, \beta \in \Lambda$, existe $\gamma \in \Lambda$ con $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Definición 75 (Cofinal). Un subconjunto $B \subseteq \Lambda$ se dice cofinal si para todo $\alpha \in \Lambda$, existe $\beta \in B$ con $\alpha \leq \beta$ (una sub-sucesión^a).

^aAlgunos autores definen conjunto dirigido dejando de lado la antisimetría, esto quiere decir que no necesariamente se necesita que sea un orden parcial.

Ejemplo. Algunos ejemplos de conjuntos dirigidos son:

1. Todo conjunto formado por un único elemento es un conjunto dirigido.
2. Todo conjunto con un buen orden es un conjunto dirigido (con dicho buen orden).
3. $(\mathbb{Z}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}, \leq)$ son conjuntos dirigidos (con el orden usual).
4. $(\mathbb{N}, \leq)$ es un conjunto dirigido, y $2\mathbb{N}$ es cofinal en $\mathbb{N}$.
5. $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto dirigido, pero $(-\infty, 0]$ no es cofinal en $\mathbb{R}$.
6. Todo conjunto cofinal es conjunto dirigido (ejercicio propuesto).
7. **IMPORTANTE:**

Las vecindades de un punto como conjunto dirigido:

Sea $(X, \mathcal{T})$ y $x \in X$ dado. Entonces $\Lambda = \mathcal{N}_x$ con el orden $V \leq W \Leftrightarrow W \subseteq V$ (inclusión inversa) es conjunto dirigido. Es claro que el anterior es un orden, pero no es total porque no todos los conjuntos están relacionados.

Si $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_x$, entonces $W := (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{N}_x$ y cumple $V_1 \leq W$ y $V_2 \leq W$.

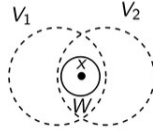


Figura 5.7: Ilustración del conjunto de vecindades como conjunto dirigido.

Ahora es posible introducir el concepto de red, que generaliza la idea de sucesión, puede introducirse utilizando conjuntos dirigidos en sustitución de $\mathbb{N}$ como conjunto de índices.

Definición 76 (Red). Sea X un conjunto y $(\Lambda, \leq)$ un conjunto dirigido. Una red es una función $x : \Lambda \rightarrow X$.

Notación. $x = x(\lambda) = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Observación. Si $\Lambda = \mathbb{N}$, se recupera la definición de sucesión.

Ejemplo. 1. Cualquier función $f : (\mathbb{R}, \leq) \rightarrow \mathbb{R}$ es una red.

2. En $(\Lambda, \leq) = (\mathcal{P}(X_0), \subseteq)$, para $A \subseteq X_0$, $x_A := \mathbb{1}_A$ es una red con valores en $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R})$.
3. En el conjunto $\{0, 1\}$ con la topología de Sierpinski, $\Lambda = \mathcal{N}_1$, entonces $x_V = 1$ para $V \in \mathcal{N}_1$ es red a valores en X .

Proposición 60. Si $x : \Lambda \rightarrow X$ es una red y $f : X \rightarrow Y$ es una función, luego, la aplicación obtenida por composición $f \circ x : \Lambda \rightarrow Y$ es una red en Y .

Definición 77 (Convergencia de una red). Sea $(X, \mathcal{T})$. Diremos que la red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq X$ converge a $\bar{x} \in X$ si:

$$\forall V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}, \exists \lambda_0 \in \Lambda \text{ tq } \lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in V$$

Ejemplo. 1. Sea $x_\lambda = \bar{x}$ para todo $\lambda \in \Lambda$, llamada como la red constante, converge a $\bar{x}$.

2. En $X = \{0, 1\}$ con la topología de Sierpinski. Sea $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, X\}$, tomemos $\Lambda = \mathcal{N}_0 = \{\{0\}, X\}$ con la inclusión inversa, y sea la red $x_V = 0$ para $V \in \mathcal{N}_0$.

Veamos que la red $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_0}$ converge a ambos, 0 y 1:

En efecto, $V = X$ es la única vecindad de $\bar{x} = 1$. Tomando $\lambda_0 = \{0\}$, luego $V = \{0\} \geq \lambda_0$, se tiene que $0 = x_V \in V = X$

Por otro lado, si $\bar{x} = 0$, luego $V = \{0\}, X$ son vecindades de 0. Tomando $\lambda_0 = \{0\}$, $\lambda = \lambda_0$, en ambos casos de V uno tiene $0 = x_V \in V$.

3. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$ y $\Lambda = \beta_x$ una base de entornos fijada para x . La relación $U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$ dirige Λ . Si se define $x(\lambda) = x_\lambda \in N$, para cada $N \in \mathcal{N}_x$, se obtiene una red en X , que converge a x .

Observación. Si X no es Hausdorff, el límite puede no ser único.

Teorema 28 (Unicidad del límite). Si $(X, \mathcal{T})$ es T_2 (Hausdorff), entonces toda red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ convergente posee un único límite.

Demostración. Razonando hacia contradicción, supongamos que $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a $\bar{x}$ y a $\hat{x}$ simultáneamente (diferentes). Como X es T_2 (Hausdorff), existen vecindades disjuntas V y W de $\bar{x}$ y $\hat{x}$, respectivamente.

Por otro lado, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in V$. Además, existe $\lambda_1 \in \Lambda$ tal que si $\lambda \geq \lambda_1$, $x_\lambda \in W$.

Como Λ es un conjunto dirigido, existe $\lambda_2 \in \Lambda$ tal que $\lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_0$. En particular, para $\lambda \geq \lambda_2$, $x_\lambda \in V \cap W$, contradicción. ■

5.2.2. Caracterizaciones mediante redes

Teorema 29 (Adherencia mediante redes). Sea un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $A \subseteq X$, entonces $x \in \text{adh}(A)$ ssi existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A$ con $x_\lambda \rightarrow x$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $x \in \text{adh}(A)$. Luego para cualquier $V \in \mathcal{N}_x$, $V \cap A \neq \emptyset$. Para cada $V \in \mathcal{N}_x$, ordenando con la inclusión inversa, sea $x_V \in V \cap A \subseteq A$.

Lyegi, $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_x}$ es red y converge a x , pues para cada $W \in \mathcal{N}_x$, existe $V_0 := W \in \mathcal{N}_x$ tal que para $V \subseteq V_0$, $x_V \in W$.

($\Leftarrow$) Sea $(x_V)_{V \in \mathcal{N}_x}$ es red y converge a x , pues para cada $W \in \mathcal{N}_x$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que, si $\lambda \geq \lambda_0$, entonces $x_\lambda \in W$. Luego $V \cap A \neq \emptyset$. ■

Teorema 30 (Continuidad mediante redes). Si $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ son espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ es una función, entonces f es continua en $\bar{x} \in X$ ssi

$$\forall x_\lambda \rightarrow \bar{x}, f(x_\lambda) \rightarrow f(\bar{x})$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que f es continua en $\bar{x}$, y sea $x_\lambda \rightarrow \bar{x}$.

Veamos que $f(x_\lambda) \rightarrow f(\bar{x})$.

Sea $W \in \mathcal{N}_{f(\bar{x})}$. Por continuidad, existe $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ tal que $f(V) \subseteq W$.

Como $x_\lambda \rightarrow \bar{x}$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para $\lambda \geq \lambda_0$, $x_\lambda \in V$. Luego para $\lambda \geq \lambda_0$, $f(x_\lambda) \in f(V) \subseteq W$.

($\Leftarrow$) Razonando por contradicción, supongamos que f no es continua en $\bar{x}$. Luego, existe una vecindad $W \in \mathcal{N}_{f(\bar{x})}$ que para cualquier $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$, satisface que $f(V) \not\subseteq W$. ■

5.2.3. Filtros

La definición de filtro está fuertemente motivada por las propiedades fundamentales de los sistemas de entornos, es decir:

1. Los entornos son siempre no vacíos.
2. La intersección de dos entornos de un punto es un entorno del punto.
3. Un conjunto que contiene a un entorno de un punto es un entorno de dicho punto.

A continuación se retoman las definiciones necesarias a partir de la noción de filtro:

Definición 78 (Filtro). En filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X es una familia no vacío de subconjuntos no vacíos de X que verifica:

1. Si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$.
2. Si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subseteq G$, entonces $G \in \mathcal{F}$.

Observación. Para cualquier filtro sobre X , se tiene que dicho $X \in \mathcal{F}$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de filtros son:

1. Para cada conjunto X , luego $\mathcal{F} := \{X\}$ es filtro, conocido como el filtro indiscreto o trivial.
2. Dado X conjunto y $a \in X$, luego $\mathcal{F}_a := \{U \subseteq X | a \in U\}$ es el filtro principal en a .
3. Dado X conjunto y $A \subseteq X$, luego $\mathcal{F}_A := \{U \subseteq X | A \subseteq U\}$ es el filtro principal en A .
4. Dado X conjunto infinito, luego $\mathcal{F}_{\text{cof}} := \{A \subseteq X | X \setminus A \text{ es finito}\}$ es el filtro cofinito.
5. Dado X conjunto infinito, luego $\mathcal{F}_{\text{conum}} := \{A \subseteq X | X \setminus A \text{ es numerable}\}$ es el filtro conumerable.
6. Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $x \in X$, luego $\mathcal{N}_x$ es el filtro de entornos de x .
7. Dado X un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ nunca es un filtro sobre X . Es fácil ver ésto pues $\mathcal{P}(X)$ no cumple la PIF.

Definición 79 (Base de un filtro). Una subcolección de un filtro $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ es una base del filtro $\mathcal{F}$ si para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $G \subseteq F$.

Lema 8 (Caracterización de base de un filtro). Una familia no vacía de conjuntos no vacíos $\mathcal{G}$ es una base para algún filtro sobre X si y sólo si verifica:

- Para $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, existe $G_3 \in \mathcal{G}$ tal que $G_3 \subseteq G_1 \cap G_2$

y entonces $\mathcal{F} := \{F \subseteq X | \exists G \in \mathcal{G} : G \subseteq F\}$ es un filtro generado a partir de $\mathcal{G}$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de bases de filtro son:

1. Dado X un conjunto y $a \in X$, luego $\mathcal{G}_a := \{\{a\}\}$ es base del filtro principal $\mathcal{F}_a$.
2. Dado X un conjunto y $A \subseteq X$, luego $\mathcal{G}_A := \{A\}$ es base del filtro principal $\mathcal{F}_A$.
3. Todo filtro es claramente base de si mismo.
4. La colección $\mathcal{G} := \{(a, \infty) | a \in \mathbb{R}\}$ es base de un filtro sobre $\mathbb{R}$ llamado *filtro de Frechet sobre $\mathbb{R}$* .
5. La colección $\mathcal{G}_0 := \{(a, b) | a < 0 < b\}$ es base de un filtro sobre $\mathbb{R}$ que corresponde a las vecindades del ceto $\mathcal{N}_0$.

Definición 80 (Filtro fijo y filtro libre). Un filtro $\mathcal{F}$ sobre el conjunto X se llama fijo si $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$ y se dice libre en caso contrario.

Ejemplo. 1. Los filtros principales y los filtros de entornos son filtros fijos.
2. El filtro de Frechet sobre $\mathbb{R}$ y los cofinitos son filtros libres.

Definición 81 (Convergencia y punto de acumulación de un filtro). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X . Se dice que:

1. $\mathcal{F}$ converge a x y se denota $\mathcal{F} \rightarrow x$, si $\mathcal{N}_x \subseteq \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ tiene a x como punto de acumulación, y se denota como $\mathcal{F} \sim x$, si para cada $F \in \mathcal{F}$ y cada $N \in \mathcal{N}_x$ se tiene que $F \cap N \neq \emptyset$.

Ejemplo. Algunos ejemplos de convergencia de filtros son:

1. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ con el filtro indiscreto $\mathcal{F}$. Entonces, para cada $x \in X$, $\mathcal{F} \sim x$ y además $\mathcal{F} \rightarrow x$ ssi $\mathcal{N}_x\{X\}$.
2. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, sea $A \neq \emptyset$ y sea $\mathcal{F}_A$ el filtro principal asociado a A . Entonces, $\mathcal{F} \sim x$ ssi $x \in \text{adh}(A)$. También $\mathcal{F} \rightarrow x$ ssi para cada $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U$ es $A \subseteq U$.
3. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el filtro de los entornos de x denotado por $\mathcal{N}_x$ converge a x .
4. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$, todo filtro converge a cualquier punto del espacio. Recordar que $\mathcal{T}_{\text{trivial}} = \{X, \emptyset\}$.
5. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$, $\mathcal{F}_{\text{cof}}$ converge a todo punto del espacio.

Muchas aplicaciones de la convergencia de filtros pueden ser realizadas de forma elegante mediante ultrafiltros, para ello, se recordará la definición de dicha noción:

Definición 82 (Ultrafiltro). Un filtro $\mathcal{H}$ sobre X es un ultrafiltro si no existe un filtro estrictamente más fino que él.

Ejemplo. Algunos ejemplos de ultrafiltros son:

1. El filtro principal en un punto es un ultrafiltro.
2. Si A posee más de un punto, el filtro principal $\mathcal{F}_A$ no es un ultrafiltro. De hecho, para cada $a \in A$, $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{F}_a$, lo que prueba que no hay un único ultrafiltro que contiene a un filtro dado.

3. Los filtros cofinito y conumerable no son ultrafiltro.

Teorema 31. El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es T_2 ssi los filtros sobre X poseen límites únicos.

Lema 9. Si $\mathcal{H}$ es un ultrafiltro en $(X, \mathcal{T})$, luego $\mathcal{H} \sim x$ ssi $\mathcal{H} \rightarrow x$.

5.2.4. Filtro como conjunto dirigido

Es posible utilizar la noción de filtro para tener conjuntos dirigidos convenientes, como se muestra a continuación en los ejemplos:

Ejemplo.

1. Dado el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $x \in X$, el filtro de entornos $\mathcal{N}_x$ es un conjunto dirigido utilizando la inclusión inversa como orden.
2. Para cualquier filtro $\mathcal{F}$ sobre un conjunto X , $(\mathcal{F}, \subseteq)$ y $(\mathcal{F}, \supseteq)$ son conjuntos dirigidos.

A continuación se formaliza la idea presentada en los ejemplos previos.

Definición 83. Sea $\mathcal{F}$ un filtro y se define $\leq$ un orden parcial definido sobre $\mathcal{F}$ como

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2$$

de manera que $(\mathcal{F}, \leq)$ resulta ser un conjunto dirigido. Se define la red derivada de $\mathcal{F}$ como:

$$x : \mathcal{F} \rightarrow X$$

tal que $x(F) \in F$.

Definición 84. Sea Λ un conjunto dirigido y $x : \Lambda \rightarrow X$ una red en X . Se define:

$$\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$$

Entonces $\mathcal{F}_x$ es llamado el filtro derivado de x .

Definición 85 (Convergencia). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $\bar{x} \in X$. Se dice que $\mathcal{F}$ converge a $\bar{x}$ ($\mathcal{F} \rightarrow \bar{x}$) si:

$$\forall V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}, \text{ satisface } V \in \mathcal{F}$$

Teorema 32. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $x \in X$.

1. Si $x : \Lambda \rightarrow X$ es una red, entonces $x \rightarrow \bar{x}$ ssi $\mathcal{F}_x \rightarrow \bar{x}$.
2. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X , entonces $\mathcal{F} \rightarrow \bar{x}$ ssi toda red derivada de $\mathcal{F}$ converge a $\bar{x}$.

Demostración. Pendiente. ■

Capítulo 6

Invariantes topológicos

6.1. Homeomorfismos

Definición 86 (Homeomorfismo). Dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ se dicen homeomorfos si existe $f : X \rightarrow Y$ biyectiva con f y f^{-1} continuas. A dicha función se la llama homeomorfismo.

Ejemplo.

1. Si $Y := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, entonces $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_c) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_c|_Y)$ dada por $f(x) = \arctan(x)$ es homeomorfismo con inversa $f^{-1}(x) = \tan(x)$.
2. Si $g : \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}$ dada por $g(n) = 2n$ con cada espacio dotado de la topología discreta, luego g es homeomorfismo.

Ejercicio 15. Encuentre $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \rightarrow Y$ biyectiva y continua, $g : Y \rightarrow X$ biyectiva y continua, pero donde no exista un homeomorfismo, osea que $g \neq f^{-1}$.

6.1.1. Ejemplos de espacios topológicos homeomorfos

Caso 1: $X_1 = [0, 1]^2$ en $\mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{T}_1$ como la topología traza de $X_1 = [0, 1]^2$ (ver figura en la izquierda). Base de vecindades de (x, y) :

$$\begin{aligned} B((x, y), \varepsilon) \cap X_1 \\ 0 \leq x, y \leq 1, \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

2. $\mathcal{T}_2$ el cilindro no Hausdorff, se identifica $(0, y) \sim (1, y)$. Base de vecindades para (x, y) :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 & \Rightarrow B((x, y), \varepsilon) \cap X_1 \\ x = 0 & \Rightarrow (B((0, y), \varepsilon) \sqcup B((1, y), \varepsilon)) \cap X_1 \end{cases}$$

Caso 2: Sea $X_2 = [0, 1) \times [0, 1]$.

1. $\mathcal{T}_3$ cilindro Hausdorff. Con la base de vecindades para (x, y) :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 & \Rightarrow B((x, y), \varepsilon) \cap X_2 \\ x = 0 & \Rightarrow (B((0, y), \varepsilon) \sqcup B((1, y), \varepsilon)) \cap X_2 \end{cases}$$

X_2 con esta topología es homeomorfo al cilindro de $\mathbb{R}^3$ dado por $x^2 + y^2 = 1$, con $0 \leq z \leq 1$ con su topología traza.

2. $\mathcal{T}_4$ cinta de moebius. Con la base de vecindades para (x, y) :

$$\begin{cases} 0 < x < 1 & \Rightarrow B((x, y), \varepsilon) \cap X_2 \\ x = 0 & \Rightarrow (B((0, y), \varepsilon) \sqcup B((1, y), 1 - \varepsilon)) \cap X_2 \end{cases}$$

6.2. Invariantes topológicos

Definición 87 (Invariante topológico). Se llama *invariante topológico* a cualquier propiedad de un espacio topológico que se preserva mediante homeomorfismos.

Proposición 61. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos homeomorfos, entonces:

1. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ es separable, entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es separable.
2. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ satisface PAN, entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ satisface PAN.
3. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ satisface PAN, entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ satisface PAN.

Proposición 62. Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ dos espacios topológicos homeomorfos, entonces:

1. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ satisface el axioma T_0 , entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ satisface el axioma T_0 .
2. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ satisface el axioma T_1 , entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ satisface el axioma T_1 .
3. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ satisface el axioma T_2 , entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ satisface el axioma T_2 .
4. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ satisface el axioma T_3 , entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ satisface el axioma T_3 .
5. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ satisface el axioma T_4 , entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ satisface el axioma T_4 .

Capítulo 7

Compacidad y conexidad

7.1. Compacidad

Definición 88 (Recubrimiento). Un recubrimiento abierto de X es una familia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{T}$ tal que $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

Un subrecubrimiento es un subconjunto de la familia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ que sigue cubriendo a X .

Ejemplo. Algunos recubrimientos son:

1. Para $\varepsilon > 0$. $[0, 1] = \bigsqcup_{x \in [0, 1]} ((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \cap [0, 1])$.
2. $(-\infty, 0) = \bigsqcup_{n \geq 1} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.
3. $[0, 1) = \bigsqcup_{n \geq 1} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

Definición 89 (Compacidad). Diremos que el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es compacto si todo recubrimiento abierto de X posee un subrecubrimiento finito.

$A \subseteq X$ se dirá compacto si $(A, \mathcal{T}|_A)$ es compacto.

Ejemplo. 1. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$, todo subconjunto es compacto.

2. En el espacio topológico $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$, los únicos conjuntos compactos, son los conjuntos finitos.

3. En $(X, \mathcal{T}_A)$, B es compacto ssi $B \setminus A$ es finito.

4. En $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$, todo subconjunto es compacto.
5. En $(X, \mathcal{T}_{\text{conum}})$, los únicos compactos son los conjuntos finitos.
6. Es compacto el conjunto $[0, 1] = \bigcup_{n=0,1,2,\dots,N_\varepsilon} (n\varepsilon - \varepsilon, n\varepsilon + \varepsilon) \cap [0, 1]$,
con N_ε un entero superior a $1/\varepsilon$ (prop. Arquimediana).
7. Todo conjunto finito es compacto (incluso el vacío) bajo cualquier topología.
8. Una sucesión convergente junto a su límite es compacta, debido a que basta con tomar vecindades abiertas de cada término hasta $n < n_0$, mientras que para $n \geq n_0$ se considera una sola vecindad abierta, teniendo una familia recubridora de $n_0 + 1$ abiertos.
9. En $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^d})$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es compacto ssi es cerrado y acotado (se demostrará más adelante).

Teorema 33 (Caracterizaciones de compacidad). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Son equivalentes:

1. $(X, \mathcal{T})$ es compacto.
2. $(X, \mathcal{T})$ posee la propiedad de intersección finita (PIF).
3. Toda red en X posee un punto de acumulación.
4. Toda red en X posee una subred convergente.

Comentario. También es equivalente a compacidad que toda red en el espacio topológico tenga un punto de acumulación.

Antes de demostrar el teorema anterior, es importante recordar que ya se ha probado a estas alturas $(3) \Leftrightarrow (4)$. entonces hay que verificar $(1) \Leftrightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ y $(3) \Rightarrow (1)$.

Demostración. ■ *Demostración de $(1) \Rightarrow (2)$:*

Razonando por contradicción. Sea $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de cerrados en X tales que $\bigcap_{\lambda \in \Sigma \subseteq \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$, para cualquier $\Sigma \subseteq \Lambda$ finito. Suponiendo

que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

Luego, $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \right)^c = X$, es decir:

$$X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda^c$$

Por ende, $\{F_\lambda^c\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un recubrimiento abierto de X . Por ser X compacto, entonces existe un subrecubrimiento finito, osea que

$$X = \bigsqcup_{\lambda \in \Sigma} F_\lambda^c$$

osea que $\bigcap_{\lambda \in \Sigma \subseteq \Lambda} F_\lambda = \emptyset$, lo que es contradicción. Se concluye.

■ *Demostración de (2) $\Rightarrow$ (1):*
Propuesto.

■ *Demostración de (2) $\Rightarrow$ (3):*

Dada la PIF, es posible probar que toda red posee punto de acumulación. Sea $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ red en X , usando esta red, es posible construir conjuntos cerrados.

Sea $F_\lambda := \text{Adh}\{x_\mu | \mu \geq \lambda\}$. Note que para todo F de cardinal finito en Λ , se tiene que $\bigcap_{\lambda \in F} F_\lambda \neq \emptyset$ (es posible verificar utilizando que Λ es un

conjunto dirigido). Luego, gracias a la PIF, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$. Sea $\bar{x}$ en este conjunto. Luego hay que probar que es punto de acumulación.

Sea $V \in \mathcal{N}_{\bar{x}}$ y $\lambda \in \Lambda$. A continuación se prueba que existe $\lambda' \geq \lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$. Como $\bar{x} \in F_{\bar{c}} = \text{Adh}(\{x_\mu | \mu \geq \lambda\})$, por definición de adherencia, $V \cap \{x_\mu | \mu \geq \lambda\} \neq \emptyset$. Luego, existe $\lambda' \geq \lambda$ tal que $x_{\lambda'} \in V$.

■ *Demostración de (3) $\Rightarrow$ (1):*

■

7.1.1. Compacidad en subespacios

Para continuar, hay que recordar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $A \subseteq X$ se dirá compacto si $(A, \mathcal{T}|_A)$ es compacto. A continuación se verán algunas formas de obtener conjuntos compactos a partir de otros conjuntos compactos

Proposición 63. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$.

1. Si $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff (T_2) y A es compacto, entonces A es cerrado.
2. Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y A es cerrado entonces A es compacto.

Demostración. 1. Suponiendo que A no es cerrado. Luego, existe $\bar{x} \in \text{Adh}(A) \setminus A$. Además, existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ definida en A que converge a $\bar{x} \notin A$.

Como A es compacto, $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ posee un punto de acumulación $\hat{x} \in A$, y una subred (y_θ) que converge a tal punto. Note que $\bar{x} \neq \hat{x}$.

Pero la subred también debe converger a $\bar{x}$, de donde posee dos límites diferentes. Como X es espacio de Hausdorff, esto no puede pasar, concluyendo.

2. Propuesto. ■

Observación. Note que la compacidad no siempre se hereda siempre en los subconjuntos de compactos, para ello basta con tomar el espacio compacto $([0, 1], \mathcal{T})$ con $\mathcal{T}$ la topología traza respecto a la topología canónica en $\mathbb{R}$, mientras que $((0, 1), \mathcal{T})$ no es compacto.

7.1.2. Compacidad mediante operaciones de conjuntos

A continuación se estudia un método de obtener conjuntos compactos a partir de otros conjuntos compactos mediante las operaciones de la teoría de conjuntos.

Proposición 64. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. Sean K_1, K_2 compactos en X , entonces $K_1 \sqcup K_2$ es compacto en X .
2. Si $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff (T_2) y $\{K_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de compactos en X , entonces

$$K := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$$

es comapacto.

Demostración. 1. Propuesto.

2. Cada K_λ es cerrado, por lo que K es cerrado debido a la intersección arbitraria de cerrados, además

$$\bigcap K_\lambda \subseteq K_{\lambda_0}$$

es un subconjunto cerrado contenido en un compacto, se concluye que la intersección arbitraria es compacta. ■

7.1.3. Compacidad y funciones continuas

Proposición 65. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto, si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow Y$ es función continua, entonces $f(X)$ es compacto.

Proposición 66. Si $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ es una función continua con $(X, \mathcal{T}_X)$ compacto e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacio de Hausdorff, entonces f es una función cerrada.

Proposición 67. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ un espacio de Hausdorff, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ un espacio de Hausdorff compacto y $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ función. Entonces f es continua ssi su grafo

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) | x \in X\}$$

es cerrado en $(X \times Y, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{T}_Y)$.

Teorema 34 (Weierstrass). Sean $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $\bar{x}, \underline{x} \in X$ tales que:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) &= \inf_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} f(x) \\ f(\bar{x}) &= \sup_{x \in X} f(x) = \max_{x \in X} f(x) \end{aligned}$$

Demostración. Para concluir, basta con probar el caso del ínfimo, puesto que considerando $-f$ se obtiene el caso del supremo.

Sea $\alpha := \inf_{x \in X} f(x) \geq -\infty$. Sea (α_n) una sucesión decreciente a α . $\alpha_n \geq \alpha$. Se define $K_n := \{x \in X | f(x) \leq \alpha_n\}$. Note que $K_n = f^{-1}(-\infty, \alpha_n]$, que es cerrado (preimagen de cerrado mediante f continua). Como K_n es cerrado en X compacto, K_n es compacto, además que $K_{n+1} \subseteq K_n$ y son no vacíos.

Como $\bigcap_{n \in F} K_n \neq \emptyset$ para cada F finito, usando que X es compacto y la PIF

$$K := \bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset$$

Sea $\hat{x} \in K$. Luego, $\hat{x}$ está en cada $K_n = \{x \in X | f(x) \leq \alpha_n\}$. Luego, $f(\hat{x}) \leq \alpha_n$ para cada n . Pasando al límite

$$f(\hat{x}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha = \inf_{x \in X} f(x)$$

Esto prueba que el ínfimo existe y se alcanza en $\hat{x}$, y que $f(\hat{x}) > -\infty$. ■

Para el teorema anterior, es directo dar su enunciado equivalente a su aplicación en $\mathbb{R}^d$ utilizada en los cursos de cálculo.

Corolario 34.1 (Weierstrass, versión sobre $\mathbb{R}$). Sea $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ cerrado y acotado, entonces f alcanza su mínimo y su máximo.

Proposición 68. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos, y $f : X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Entonces si X es compacto, entonces Y es compacto (la compacidad es un invariante topológico).

Ejemplo. El posible ver que $[0, 1]$ y $[0, 1)$ dotados de la topología traza a partir de la topología canónica de $\mathbb{R}$ no son homeomorfos, pues basta con verificar que $[0, 1)$ no es compacto, mientras que $[0, 1]$ si lo es.

7.1.4. Teorema de Tychonoff

Teorema 35 (Tychonoff). Sean $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de espacios topológicos compactos, entonces el producto

$$X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

es compacto.

Ejemplo. Si $X = \prod_{x \in [0,1]} [0, 1]$, si se toma en cada $[0, 1]$ la traza de la topología canónica. Notar que $X = [0, 1]^{[0,1]} = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], f \text{ función}\}$, que es compacto (con la topología producto).

A continuación se verá la demostración del teorema de Tychonoff.

Demostración. Sean $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ y $\mathcal{T} = \bigotimes_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$. Suponiendo cada X_λ compacto, se verá que X también lo es. Razonando por contradicción, suponiendo que X no es compacto. Sea $\mathcal{A}$ la familia de todos los recubrimientos de X que no poseen un subrecubrimiento finito (existe al menos uno de ellos, pues X no es compacto), dotada del orden parcial de la inclusión creciente.

Lema 10. Toda cadena en $\mathcal{A}$ posee cota superior

Asumiendo el lema anterior, por lema de Zorn se tiene que existe un recubrimiento maximal $\bar{R}$ en $\mathcal{A}$, este recubrimiento maximal posee una propiedad muy rara, pues existen cilindros abiertos especiales que no son parte de $\bar{R}$.

Lema 11. Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe un $\bar{x}_\lambda \in X_\lambda$ tal que para todo $\Theta_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$ tal que $\bar{x}_\lambda \in \Theta_\lambda$, se tiene

$$\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda) = \Theta_\lambda \times \prod_{\lambda \neq \lambda} X_\lambda$$

Este segundo lema entregará la manera de concluir una contradicción.

Paso 1: Creación del recubrimiento especial.

Del lema anterior, sea $\bar{x}_\lambda = (\bar{x}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Como $\bar{R}$ recubre X , existe $\Theta \in \bar{R}$ abierto tal que $\bar{x} \in \Theta$. Como Θ es abierto en $\mathcal{T}$ (la topología producto), existe un cilindro abierto C conteniendo a $\bar{x}$ y contenido en Θ . Denotando

$$C = \prod_{\lambda \in F} \Theta_\lambda \times \prod_{\lambda \notin F} X_\lambda, \Theta_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda, F \text{ finito}$$

Como para cada $\lambda \in F$, $\bar{x}_\lambda \in \Theta_\lambda$, del segundo lema se tiene $\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda) \notin \bar{R}$. Luego, para cada $\lambda \in F$, se tiene que $\bar{R} \sqcup \{\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)\}$ es un nuevo recubrimiento de X .

Estos recubrimientos sí poseen subrecubrimientos finitos, porque si no $\bar{R}$ no

sería maximal.

Paso 2: Conclusión.

Se denota por $\bar{R}_\lambda \sqcup \{\pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)\}$ un tal recubrimiento finito de X . Note que $\bar{R}_\lambda$ posee cardinal finito. Sea también $A_\lambda := \bigsqcup_{\theta \in \bar{R}_\lambda} \theta$. Se tiene que si $x \notin A_\lambda$, entonces $x \in \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)$. En efecto, esto es porque $X = A_\lambda \sqcup \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)$. Sea ahora $B := \bigsqcup_{\lambda \in F} A_\lambda = \bigsqcup_{\theta \in \bigsqcup_{\lambda \in F} \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)} \theta$. Luego $x \notin B$ implica $x \in \Theta$. En efecto, $x \notin B$ implica que para cada $\lambda \in F$, $x \notin A_\lambda$. Luego, $x \in \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda)$. De aquí, $x \in \prod_{\lambda \in F} \pi_\lambda^{-1}(\Theta_\lambda) = \prod_{\lambda \in F} \Theta_\lambda \times \prod_{\lambda \notin F} X_\lambda = C \subseteq \Theta$. Así, X es recubierta finitamente por elementos de $\bar{R}$:

$$X = \bigsqcup_{\lambda \in F} R_\lambda \sqcup \{\Theta\}$$

Es decir $\bar{R} \in \mathcal{A}$, contradicción. ■

Comentario. Se puede mostrar que el Teorema de Tychonoff implica el axioma de Elección, además como en la demostración del teorema se utiliza el Lema de Zorn, se concluye que el axioma de Elección y el teorema de Tychonoff son equivalentes.

Lemas auxiliares: A continuación se realizarán las demostraciones de los lemas utilizados para demostrar el Teorema de Tychonoff:

Demostración. 1. *Primer lema:*

Sea (R_μ) una cadena en $\mathcal{A}$ (totalmente ordenado); luego, cada R_μ recubre X , pero no posee subrecubrimiento finito. Se define $R := \bigsqcup_{\mu} R_\mu$

que claramente recubre a X y contiene a cada R_μ .

Claramente R no posee subrecubrimiento finito, porque si $\Theta_1, \dots, \Theta_n \in R$ cubren X , como cada Θ_i proviene de un R_{μ_i} , y la cadena está totalmente ordenada, algún R_{μ_j} contendrá otros R_{μ_i} , y por lo tanto a cada $\Theta_1, \dots, \Theta_n$.

Luego, R_{μ_j} posee subrecubrimiento finito, contradicción.

Se concluye que $R := \bigsqcup_{\mu} R_\mu \in \mathcal{A}$ es la cota superior buscada.

2. *Segundo lema:*

Razonando por contradicción, suponiendo lo contrario, se concluirá que $\bar{R}$ posee un subrecubrimiento finito.

Suponiendo que existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\bar{x} \in X_{\lambda_0}$ se tiene que existe un $\Theta_{\lambda_0, \bar{x}} \in \mathcal{T}_{\lambda_0}$ con $\bar{x} \in \Theta_{\lambda_0, \bar{x}}$ y además $\pi_{\lambda_0}^{-1}(\Theta_{\lambda_0}) \in \bar{R}$.

Notar que $(\Theta_{\lambda_0, \bar{x}})_{\bar{x} \in X_{\lambda_0}}$ es recubrimiento de X_{λ_0} compacto, por lo tanto, existe subrecubrimiento finito de X_{λ_0}

$$\Theta_{\lambda_0, \bar{x}_1}, \dots, \Theta_{\lambda_0, \bar{x}_n}$$

Luego

$$X = \pi_{\lambda_0}^{-1}(\Theta_{\lambda_0, \bar{x}_1} \sqcup \cdots \sqcup \Theta_{\lambda_0, \bar{x}_n}) = \bigcup_{i=1}^n \pi_{\lambda_0}^{-1}(\Theta_{\lambda_0, \bar{x}_i})$$

Note que cada $\pi_{\lambda_0}^{-1}(\Theta_{\lambda_0, \bar{x}_i}) \in \bar{R}$. Luego $\bar{R}$ posee subrecubrimiento finito. ■

Proposición 69. El teorema de Tychonoff implica el axioma de elección.

Demostración. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de conjuntos no vacíos, se desea ver que existe $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.

Sea a un elemento que no pertenece a ninguno de los A_λ , luego definiendo $X_\lambda = A_\lambda \sqcup \{a\}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Luego si se dota a X_λ con una topología $\mathcal{T}_\lambda := \{\emptyset, \{a\}, X_\lambda\}$, entonces el espacio topológico $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ es compacto para todo $\lambda \in \Lambda$, luego por teorema de Tychonoff $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es compacto con la topología producto.

Si se considera la familia $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, donde $U_\lambda = \{f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid f(\lambda) = a\}$, observe que no se necesita del axioma de elección para afirmar que $U_\lambda \neq \emptyset$, puesto que para todo $\lambda \in \Lambda$, el elemento que tiene a a en cada coordenada está en U_λ .

Como $\{a\} \in \mathcal{T}_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, los U_λ son abiertos ($U_\mu = \pi_\mu^{-1}(\{a\})$). Además considerando $F \subseteq \Lambda$ finito, sin requerir del axioma de elección para encontrar un $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \in F} U_\lambda$, basta elegir $f(\mu) \in A_\mu$ para la cantidad finita de elementos de F , y fijar $f(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda \setminus F$. Entonces ninguna familia finita de $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, y como $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es compacto, esto implica que $\mathcal{U}$ no puede ser un cubrimiento. Luego debe existir $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \setminus \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, es decir, que $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. ■

Luego como el Lema de Zorn implica el Teorema de Tychonoff, y este implica el Axioma de Elección, se concluye la equivalencia.

7.2. Formas débiles de compacidad

A continuación se estudiarán otras formas de definir la noción de compacidad, las cuales son más débiles que la compacidad normalmente utilizada, dicho esquema de implicancias y relaciones se puede ver a continuación:

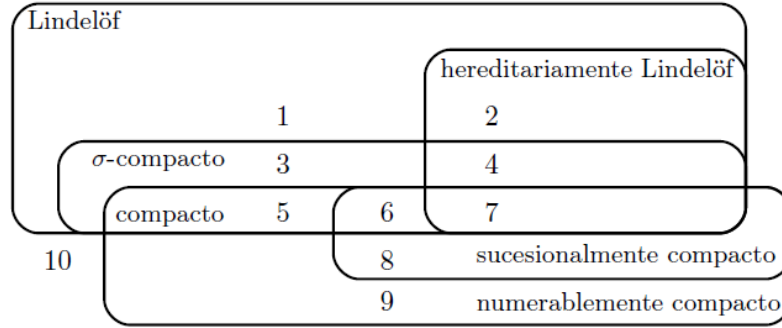


Figura 7.1: Formas de compacidad.

7.2.1. Compacidad numerable

Definición 90 (Compacidad numerable). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es numerablemente compacto si todo cubrimiento abierto numerable de X admite un subrecubrimiento finito.

Proposición 70. Un espacio topológico X es numerablemente compacto ssi toda familia numerable de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Los espacios numerablemente compactos tienen una caracterización muy simple

Proposición 71. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Son equivalentes:

1. X es numerablemente compacto.
2. Todo suconjunto infinito de X tiene un punto de ω -acumulación.
3. Todo subconjunto infinito numerable de X tiene un punto de ω -acumulación.

Los espacios numerablemente compactos conservan algunas de las propiedades de los espacios compactos, las que se demuestran de forma totalmente análoga.

Proposición 72. Todo cerrado en un espacio numerablemente compacto es numerable compacto.

Proposición 73. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y X es numerablemente compacto, entonces $f(X)$ es numerablemente compacto.

Proposición 74. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos numerablemente compactos, entonces $X \times Y$ es numerablemente compacto con la topología producto.

7.2.2. Espacios de Lindelöf

Definición 91 (Espacio de Lindelöf). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Lindelöf si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento numerable. Un espacio topológico es hereditariamente de Lindelöf si todos sus subespacios son de Lindelöf.

Proposición 75. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, es compacto ssi es numerablemente compacto y de Lindelöf.

Proposición 76. Si un espacio topológico tiene una base numerable (satisface SAN), entonces es hereditariamente de Lindelöf.

$\mathbb{R}[d]$ y todos sus subespacios vectoriales son espacios de Lindelöf, luego un subespacio de $\mathbb{R}^d$ es numerablemente compacto ssi es compacto, lo que se traduce en una propiedad adicional que los espacios numerablemente compactos comparten con los espacios compactos.

Proposición 77. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua en un espacio numerablemente compacto X , entonces f toma un valor máximo y un valor mínimo.

Proposición 78. Todo espacio métrico de Lindelöf tiene una base numerable (satisface SAN).

Al igual que sucede con la compacidad numerable, las demostraciones de las propiedades básicas de los espacios compactos pueden adaptarse ligeramente para demostrar propiedades análogas.

Proposición 79. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es espacio de Lindelöf ssi toda familia de cerrados en X con la propiedad de la intersección numerable (es decir, que la intersección de cualquier subfamilia numerable sea no vacía) tiene intersección no vacía.

Proposición 80. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y X es espacio de Lindelöf, entonces $f(X)$ también lo es.

Proposición 81. Si $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico es un espacio de Lindelöf, entonces todo $Y \subseteq X$ cerrado también lo es.

Otra clase de espacios de Lindelöf son los que se estudiarán a continuación: Los espacios σ -compactos.

7.2.3. Espacios σ -compactos

Definición 92 (σ -compacidad). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es σ -compacto si es unión numerable de subespacios compactos.

Proposición 82. Se cumple:

1. Toda imagen continua de un espacio σ -compacto es σ -compacta.
2. Todo subespacio cerrado de un espacio σ -compacto es σ -compacto.
3. Todo producto finito de espacios σ -compactos es σ -compacto.

7.2.4. Espacios secuencialmente compactos

Definición 93 (Compacidad secuencial). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice secuencialmente compacto si en él toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

Proposición 83. Todo espacio topológico secuencialmente compacto es numerablemente compacto.

Proposición 84. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ que satisface PAN es secuencialmente compacto ssi es numerablemente compacto.

Proposición 85. Todo cerrado en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ secuencialmente compacto, es secuencialmente compacto.

Proposición 86. Sean $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y X es secuencialmente compacto, entonces $f(X)$ es secuencialmente compacto.

Cabe destacar que el comportamiento de los productos de espacios topológicos secuencialmente compactos se comporta mejor que en el caso de los espacios numerablemente compactos.

Teorema 36 (Tychonoff, versión compacidad secuencial). El producto numerable de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.

7.3. Compacidad local y compactificación

7.3.1. Compacidad local

Definición 94 (Compacidad local). El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice localmente compacto si para cada $x \in X$ existe una base de vecindades formada por conjuntos compactos.

Proposición 87. Si $(X, \mathcal{T})$ es espacio de Hausdorff, $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto ssi todo punto $x \in X$ pose una vecindad compacta.

Una consecuencia de la proposición anterior corresponda al siguiente enunciado:

Proposición 88. Si $(X, \mathcal{T})$ es espacio de Hausdorff y compacto, entonces es localmente compacto.

Compacidad local en subespacios topológicos

Proposición 89. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto y $A \in \mathcal{T}$, entonces $(A, \mathcal{T}_A)$ (dotado de la topología traza) es localmente compacto.

Proposición 90. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto y C es un cerrado, entonces $(C, \mathcal{T}_C)$ (dotado de la topología traza) es localmente compacto.

A continuación se muestra como generar un espacio localmente compacto a partir de la intersección de dos espacios localmente compactos.

Proposición 91. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff y los subespacios $(A, \mathcal{T}_A)$, $(B, \mathcal{T}_B)$ (dotados de la topología traza) son localmente compactos, entonces $(A \cap B, \mathcal{T}_{A \cap B})$ es localmente compacto.

Consecuencia de lo anterior, es que es posible obtener un espacio localmente compacto mediante la intersección de un abierto y un cerrado, según lo indicado a continuación:

Proposición 92. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, sea $Y = A \cap C$ con A abierto y C cerrado, entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es localmente compacto.

De cierta forma, un recíproco de lo anterior es lo siguiente

Proposición 93. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff y $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es localmente compacto con $Y \subseteq X$ (dotado de la topología traza), entonces existen A abierto y C cerrado en $\mathcal{T}$ tales que $Y = A \cap C$.

Se presentan dos consecuencias a continuación:

Proposición 94. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto. $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es localmente compacto ssi $Y = A \sqcap C$ con A abierto y C cerrado en $\mathcal{T}$

Proposición 95. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff compacto y $D \subseteq X$ es denso, entonces $(D, \mathcal{T}_D)$ es localmente compacto ssi $D \in \mathcal{T}$.

Proposición 96. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff localmente compacto, entonces es normal.

Teorema 37 (Preservación de compacidad local). Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ una función continua, abierta y sobreyectiva. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ es localmente compacto, entonces $(Y, \mathcal{T}_Y)$ también lo es.

Ejemplo. La compacidad local no se preserva bajo aplicaciones tan sólo continuas: Por ejemplo $1_{\mathbb{Q}} : (\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\text{dis}}) \rightarrow (\mathbb{Q}, \mathcal{T}_{\text{us}})$ es continua, sobreyectiva y no abierta. El primer espacio es localmente compacto y el segundo no. Compruébelo.

A diferencia de la compacidad, la compacidad se comporta bien tan solo para productos finitos, esto motiva a enunciar el siguiente teorema:

Teorema 38. Sea $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de espacios topológicos y $(X, \mathcal{T})$ su producto (con $\mathcal{T}$ la topología producto). Entonces, $(X, \mathcal{T})$ es localmente compacto ssi para cada $\lambda \in \Lambda$, $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$ es localmente compacto y todos los $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, salvo a lo más una familia finita, son compactos.

7.3.2. Compactificación de Stone-Cech

Sea A un conjunto, luego se considerará el espacio producto $[0, 1]^A = \{f : A \rightarrow [0, 1]\}$ con la topología producto, esto es conocido como la topología de la convergencia puntual. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, sea $C(X) \subset [0, 1]^X$ el espacio de las funciones continuas de X en $[0, 1]$.

Sobre $C(X)$ se considerará la topología traza de la topología producto sobre $[0, 1]^A$. En el caso particular del espacio $X = \mathbb{N}$ se considerará la topología discreta.

Definición 95 (Espacio de Tychonoff). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice de Tychonoff si para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado y para cada $V \in \mathcal{N}_x$ existe $h \in C(X)$ con $h(x) = 0$ y $h(y) = 1$ para $y \notin V$.

Proposición 97. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff compacto, entonces es de Tychonoff.

Demostración. Para concluir se buscará ver que se verifican las dos condiciones requeridas para ser espacio de Tychonoff:

1. Como $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff, entonces para todo $x \in X$ se tiene que $\{x\}$ es cerrado.
2. Como $(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff y compacto, entonces es normal. Luego, por el *Lema de Urysohn* entonces se verifica lo siguiente:
 - Para todo par F cerrado y A abierto tales que $F \subseteq A$, existe una función $h : X \rightarrow [0, 1]$ continua entre la topología $\mathcal{T}$ sobre X y la topología traza de $\mathcal{T}_c$ (con respecto la topología canónica de $\mathbb{R}$) sobre $[0, 1]$ tal que:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \forall x \in F \\ 1 & \forall x \notin A \end{cases}$$

Teniendo lo anterior en mente, es importante notar que para todo $V \in \mathcal{N}_x$, existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subseteq V$, o equivalentemente, $\{x\} \subseteq A \subseteq V$, luego se tiene la función continua:

$$\begin{aligned} h(x) &= 0, \forall x \in \{x\} \\ h(y) &= 1, \forall y \notin A \end{aligned}$$

En particular como $h(y) = 1$ para $y \notin A$, es equivalente a afirmar que $h(y) = 1$ para $y \in A^c$ donde $V^c \subseteq A^c$, teniendo entonces la existencia de la función $h \in C(X)$ que verifica que $h(x) = 0$ y $h(y) = 1$ con $y \in V^c$ para cualquier $V \in \mathcal{N}_x$.

■

Recordando que para A, B conjuntos, si $|A| = \alpha$ y $|B| = \beta$, entonces $\beta^\alpha = |\{f : A \rightarrow B\}|$. Además $|\mathcal{P}(A)| = 2^\alpha$.

Proposición 98. Se cumplen las siguientes identidades:

1. $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} = 2^\mathfrak{c}$
2. $|C(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$

Demostración. Estudiando cada igualdad por separado:

1. Se busca probar que $2^\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^\mathfrak{c}$, pero notando que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= 2^{\aleph_0} \Rightarrow \mathfrak{c}^\mathfrak{c} = (2^{\aleph_0})^\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0^\mathfrak{c}} = 2^\mathfrak{c} \\ &\Leftrightarrow \aleph_0 \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \end{aligned}$$

Luego se buscará probar que $\aleph_0 \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ para poder concluir. Razonando mediante doble desigualdad: Sea algún $n_0 \in \mathbb{N}$, luego:

$$\begin{aligned} \aleph_0 \mathfrak{c} &\geq |\{n\}| \mathfrak{c} \geq 1 \mathfrak{c} = \mathfrak{c} \\ &\Rightarrow \aleph_0 \mathfrak{c} \geq \mathfrak{c} \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que $\aleph_0 \leq \mathfrak{c}$ ($\mathbb{N}$ es el menor conjunto infinito que existe), entonces:

$$\aleph_0 \mathfrak{c} \leq \underbrace{\mathfrak{c} \mathfrak{c}}_{\text{infinito por infinito es infinito}} = \mathfrak{c}$$

Por lo tanto, como $\aleph_0 \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, se concluye que $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} = 2^\mathfrak{c}$.

2. Sea $C(\mathbb{N}) \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$ el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{N}$ sobre $[0, 1]$, en particular, para $x_0 \in [0, 1]$ se considera la función $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(n) = x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (función constante), luego como existen tantas funciones constantes como $|[0, 1]| = \mathfrak{c}$, luego:

$$\begin{aligned} \{g : \mathbb{N} \rightarrow \{x_0\} \subseteq [0, 1] | x_0 \in [0, 1]\} &\subseteq C(\mathbb{N}) \\ \Rightarrow \mathfrak{c} &\leq |C(\mathbb{N})| \end{aligned}$$

Por otro lado, notar que:

$$\begin{aligned} |C(\mathbb{N})| &\leq |[0, 1]^{\mathbb{N}}| = |[0, 1]|^{\aleph_0} \\ &= \mathfrak{c}^{\aleph_0} \\ &= (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \\ &= 2^{\aleph_0 \aleph_0} \\ &= 2^{\aleph_0} \\ &= \mathfrak{c} \end{aligned}$$

Se concluye que $|C(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

■

Para continuar es importante saber que $[0, 1]$ es separable cuando está dotado de la topología traza a partir de la topología canónica de $\mathbb{R}$, puesto que $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ satisface SAN considerando como base las bolas $B(x, \frac{1}{n})$ donde $x \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, luego se considera $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n}) \cap [0, 1] | x, n \in \mathbb{Z}\}$ como base numerable para la topología traza sobre $[0, 1]$, de lo que se concluye que $[0, 1]$ es separable.

A continuación se construirá lo necesario para ver que $[0, 1]^{\mathfrak{c}}$ es separable.

Proposición 99. Si $|A| = \alpha$ y $|B| = \beta$ tal que $\alpha = \beta$, entonces $[0, 1]^{\alpha}$ y $[0, 1]^{\beta}$ son homeomorfos.

Demostración. Para comenzar, ya que se tiene la igualdad de cardinales $\alpha = \beta$, se tiene la existencia de una función biyectiva $g : B \rightarrow A$. Sea $f : [0, 1]^A \rightarrow [0, 1]^B$ una función dada por $f(x) = x \circ g$ según la figura (recordar que $[0, 1]^A, [0, 1]^B$ son espacios de funciones), a continuación se verá que f es un homeomorfismo.

Comentario. Se recomienda revisar la figura durante la demostración para comprender y guiarse en las composiciones de funciones.

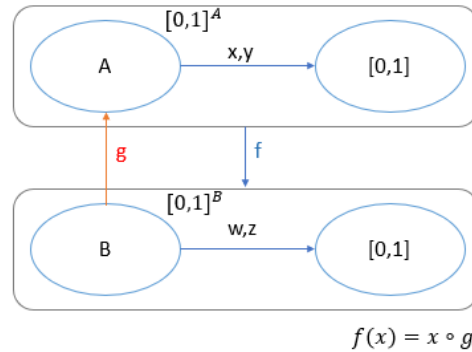


Figura: Mapeos definidos entre los espacios $[0, 1]^A$ y $[0, 1]^B$

1. *Sobreyectividad:* Sea $z \in [0, 1]^B$, luego $x = z \circ g^{-1} \in [0, 1]^A$, tomando entonces se tiene que $f(x) = x \circ g = z \circ g^{-1} \circ g = z$. Se concluye la sobreyectividad de f .
2. *Inyectividad:* Suponiendo que $f(x) = f(y)$, luego se tiene que

$$\begin{aligned}(x \circ g)(b) &= (y \circ g)(b) \\ x(g(b)) &= y(g(b))\end{aligned}$$

para todo $b \in B$. Luego por sobreyectividad de g se tiene que $= g(b) = a$ para todo $a \in A$, entonces $x(a) = y(a)$, por lo tanto se concluye que $x = y$, teniendo la inyectividad de f .

Comentario. A continuación se probará la continuidad de f y f^{-1} , ésto mismo prueba la última proposición de ésta parte (2).

3. *Continuidad:* Sea una red convergente $x_\lambda \rightarrow x$ en el espacio producto $[0, 1]^A$ con $\lambda \in \Lambda$ conjunto dirigido, luego se tiene que para toda coordenada $\alpha \in A$ se tiene que $x_\lambda(\alpha) \rightarrow x(\alpha)$, entonces la imagen a través de f está dada por:

$$\begin{aligned}f(x_\lambda)(\beta) &= (x_\lambda \circ g)(\beta) \\ &= x_\lambda(g(\beta))\end{aligned}$$

Luego $x_\lambda(g(\beta)) \rightarrow x(g(\beta))$ para toda coordenada $\beta \in B$, donde $x(g(\beta)) = (x \circ g)(\beta) = f(x)(\beta)$, por lo tanto $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$. Se concluye la continuidad de f .

4. *Continuidad de la inversa:* (La demostración es análoga). Sea una red convergente $y_\lambda \rightarrow y$ en el espacio producto $[0, 1]^B$ con $\lambda \in \Lambda$ conjunto dirigido, luego se tiene que para toda coordenada $\beta \in B$ se tiene que $y_\lambda(\beta) \rightarrow y(\beta)$, entonces la preimagen a través de f está dada por:

$$\begin{aligned}f^{-1}(y_\lambda)(\alpha) &= (y_\lambda \circ g^{-1})(\alpha) \\ &= y_\lambda(g^{-1}(\alpha))\end{aligned}$$

Luego $y_\lambda(g^{-1}(\alpha)) \rightarrow y(g^{-1}(\alpha))$ para toda coordenada $\alpha \in A$, donde $y(g^{-1}(\alpha)) = (y \circ g^{-1})(\alpha) = f^{-1}(y)(\alpha)$, por lo tanto $f^{-1}(y_\lambda) \rightarrow f^{-1}(y)$. Se concluye la continuidad de f^{-1} .

■

Comentario. En la demostración de la proposición anterior, note que al probar las continuidades no se utiliza el hecho de que f sea biyectiva, salvo para suponer la existencia de f^{-1} como función al probar su continuidad. Más aún, ésta parte de la demostración corresponde a la demostración de una proposición que se verá más adelante.

El siguiente enunciado será de ayuda para probar para probar un resultado útil para seguir desarrollando la construcción necesaria a estudiar en esta parte.

Lema 12. La imagen continua de un espacio separable es separable

Demostración. Sea una función continua $f : X \rightarrow Y$. Sea D denso en X , osea que $\overline{D} = X$, como es cerrado, entonces existe una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq D$ tal que $x_\lambda \rightarrow x$ donde $x \in \overline{D} = X$.

Como f es continua, luego la preimágen de cerrado es cerrado, por lo tanto $f^{-1}(\overline{f(D)})$ es cerrado, además se cumple que:

$$\begin{aligned} D &\subseteq f^{-1}(f(D)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(D)}) \\ \Rightarrow \overline{D} &\subseteq f^{-1}(\overline{f(D)}) \end{aligned}$$

debido a que la adherencia de D es el menor cerrado que contiene a D , por lo tanto $x \in f^{-1}(\overline{f(D)})$, entonces $f(x) \in \overline{f(D)}$ teniendo que $\overline{f(D)} = f(X)$. Si el espacio topológico en X es separable, tomando D numerable se tiene que $f(D)$ es un denso numerable en $f(X)$, se concluye que $f(X)$ es separable. ■

Teorema 39. El producto de espacios topológicos Hausdorff donde cada uno tiene más de un elemento, es separable si cada espacio topológico factor es separable para una cantidad $\leq \mathfrak{c}$ de factores.

Demostración. Sea el espacio topológico X_λ separable donde D_λ es un denso numerable lo que se tiene para todo $\lambda \in \Lambda$. Suponiendo que $|\Lambda| \leq \mathfrak{c}$, entonces es posible considerar que Λ es un subconjunto de $[0, 1]$. Para cada secuencia $J_1, \dots, J_k$ de intervalos cerrados disjuntos con puntos finales racionales y cada secuencia $n_1, \dots, n_k$ de enteros positivos, defina puntos $p(J_1, \dots, J_k; n_1, \dots, n_k)$ como sigue:

$$p_\alpha = \begin{cases} d_{\alpha n_i} & , \alpha \in J_i \\ d_{\alpha 1} & , \sim \end{cases}$$

El conjunto D de puntos p por como está definido es numerable.

Sea un abierto en el espacio producto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ de la forma:

$$B = \rho_{\alpha 1}^{-1}(U_{\alpha 1}) \cap \dots \cap \rho_{\alpha m}^{-1}(U_{\alpha m})$$

donde U_α es un abierto en X_{α_i} con $i \in \{1, \dots, m\}$. Entonces, U_α contiene un punto d_{α_i, n_i} de D_{α_i} para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, y donde existen intervalos racionales cerrados disjuntos $J_1, \dots, J_m$ que contienen los puntos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, respectivamente. El punto $p(J_1, \dots, J_m; n_1, \dots, n_m)$ pertenece a B ya que $p_{\alpha_i} = d_{\alpha_i, n_i}$. Por lo tanto, el conjunto D es denso. ■

Ejemplo. 1. $[0, 1]^2$ es separable, puesto que $[0, 1]$ es separable.

2. $[0, 1]^\mathfrak{c}$ es separable, puesto que $[0, 1]$ es separable.

3. Como $C(\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$, luego $[0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ es homeomorfo a $[0, 1]^\mathfrak{c}$, como ser separable es un invariante topológico entonces $[0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ es separable.

Sean A, B conjuntos y $f : A \rightarrow B$ función. Se define $f^* : [0, 1]^B \rightarrow [0, 1]^A$ mediante $f^*(u) = u \circ f$ para todo $u \in [0, 1]^B$

Proposición 100. f^* es una función continua.

En lo que sigue, se supondrá que el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Tychonoff.

A continuación se define la evaluación de X mediante funciones $f \in C(X)$ como:

Definición 96 (Evaluación de X). Se define la evaluación de X a la función $e : X \rightarrow [0, 1]^{C(X)}$ tal que $e(x)_f := e(x)(f) := f(x)$ para $f \in C(X)$ y $x \in X$.

La función e definida anteriormente, se puede observar que corresponde a todas las imágenes de $x \in X$ obtenidas por medio de $f \in C(X)$, donde $C(X)$ es el conjunto de coordenadas del conjunto de llegada.

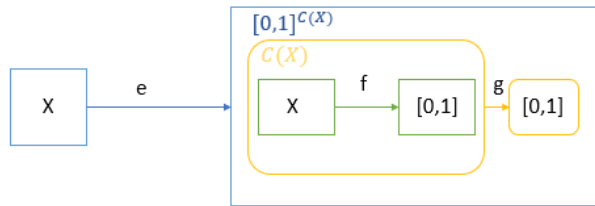


Figura: En la coordenada f -ésima, $e(x)_f = f(x)$, con $f \in C(X)$.

Proposición 101. $e : X \rightarrow e(X)$ es un homeomorfismo.

Demostración. 1. *Inyectividad:* Suponiendo que $e(x) = e(y)$, ésto quiere decir que para toda coordenada $f \in C(X)$ se tiene que $f(x) = f(y)$. Razonando por contradicción, suponiendo $x \neq y$, como el singleton $\{y\}$ es cerrado ya que X es espacio de Tychonoff, luego $x \notin \overline{\{y\}}$, lo que implica que existe una vecindad V de x tal que $V \cap \{y\} = \emptyset$, es decir $y \in V^c$.

Por hipótesis, existe una función $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(z) = 0$ para $z \in V^c$, o bien, expresado de otro modo $f(V^c) = \{0\}$. Como $y \in V^c$ se tiene que $f(y) = 0$, contradicción pues $f(x) = f(y)$ para todo $f \in C(X)$. Se concluye que $x = y$, teniendo la inyectividad de e .

2. *Sobreyectividad:* Como $e : X \rightarrow e(X) \subseteq [0, 1]^{C(X)}$ dada por $e(x) =: g$ que satisface que $e(x)(f) = f(x)$, se tiene que para todo $f \in C(X)$, existe $x \in X$ tal que $e^{-1}(g) = x$. Se concluye la sobreyectividad de e .

3. *Continuidad:* Suponiendo que $x_\lambda \rightarrow x$ en X , para concluir la continuidad, basta con ver que $e(x_\lambda) \rightarrow e(x)$ en $[0, 1]^{X(C)}$, lo que equivale a ver la convergencia por coordenadas, osea que para todo $f \in C(X)$ (conj. de coordenadas) se cumple que $e(x_\lambda)(f) \rightarrow e(x)(f)$.

Como $e(x_\lambda)(f) \rightarrow e(x)(f)$ ssi $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$, como $f \in C(X)$ es continua, se concluye la continuidad de e .

4. *Continuidad de la inversa:* Suponiendo que $g_\lambda \rightarrow g$ en el espacio $e(X)$, basta ver que $e^{-1}(g_\lambda)^{-1}(g)$ en X . Para continuar, basta notar que la hipótesis $g_\lambda \rightarrow g$ es equivalente a la convergencia por coordenada, o sea a que $g_\lambda(f) \rightarrow g(f)$ para todo $f \in C(X)$ (ver figura). Si $V \in \mathcal{N}_x$ (vecindad de x), entonces por ser espacio de Tychonoff existe $f \in C(X)$ tal que $f(x) = 1$ y $f(V^c) = \{0\}$. Luego como $f(x_\lambda) \rightarrow f(x) = 1$, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in (0, 1]$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, o sea, existe λ_0 tal que $f(x_\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Entonces $x_\lambda \notin V^c$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$, por lo tanto $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Como la elección de $V \in \mathcal{N}_x$ es arbitraria, se concluye que $x_\lambda \rightarrow x$, teniendo que e^{-1} es continua.

Se concluye que $e : X \rightarrow e(X)$ es un homeomorfismo. ■

Lo anterior se puede visualizar en la figura presentada a continuación, en lo que sigue, se estudiará la equivalencia de la compacidad entre X con el espacio $e(X)$, mientras que $e(X)$ es un cerrado en $[0, 1]^{C(X)}$, para esto se utilizará la noción de que un subconjunto cerrado de un compacto es compacto para enunciar la siguiente proposición.

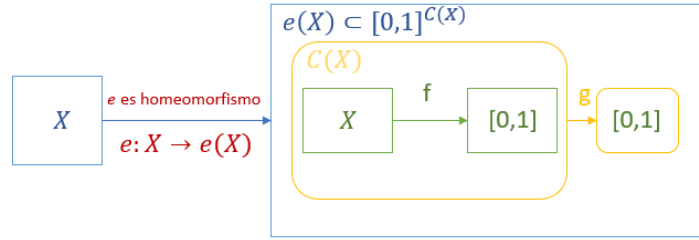


Figura: Esquema del homeomorfismo entre los espacios X y $e(X)$.

Proposición 102. $(X, \mathcal{T})$ es compacto ssi $e(X)$ es cerrado en $[0, 1]^{C(X)}$.

Demostración. Se demostrará la equivalencia utilizando proposiciones mediante " $\Leftrightarrow$ " (equivalencias), para ello, al comenzar es importante notar que:

1. Por teorema de Tychonoff se tiene que al ser $[0, 1]$ un compacto, luego el producto $[0, 1]^{C(X)}$ es compacto.
2. Como X y $e(X)$ son homeomorfos, se tiene que X es compacto ssi $e(X)$, pues la compacidad es un invariante topológico.

Lo anterior se ilustrará en la siguiente figura:

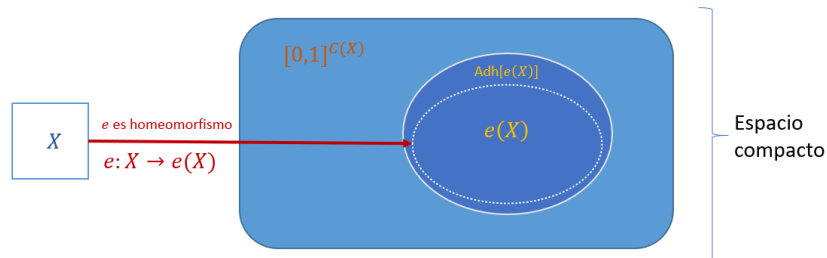


Figura: Se ilustra el homeomorfismo $e : X \rightarrow e(X)$, y que $e(X) \subseteq [0, 1]^{C(X)}$.

Utilizando (1) y como $e(X) \subseteq [0, 1]^{C(X)}$, luego $e(X)$ es compacto ssi $e(X)$ es cerrado en $[0, 1]^{C(X)}$. Entonces por (2) se tiene que X es compacto ssi $e(X)$ es cerrado en $[0, 1]^{C(X)}$. Se concluye la equivalencia buscada. ■

El resultado anterior da las nociones necesarias para definir la compactificación de Stone-Cech que será estudiada a continuación.

Compactificación de Stone-Cech

A continuación se definirá la *compactificación de Stone-Cech* de X , que corresponde a un espacio topológico Hausdorff compacto más grande que X .

Definición 97 (Compactificación de Stone-Cech). Se llama compactificación de Stone-Cech del espacio topológico X al espacio $\beta(X) = \overline{e(X)}$ (cerradura para la topología producto de $[0, 1]^{C(X)}$).

Proposición 103. $\beta(X)$ es compacto.

Demostración. Por teorema de Tychonoff, como $[0, 1]$ es compacto entonces $[0, 1]^{C(X)}$ es compacto. Luego como $e(X) \subseteq [0, 1]^{C(X)}$, entonces $\overline{e(X)} \subseteq [0, 1]^{C(X)}$ cerrado en un espacio compacto, se concluye que $\overline{e(X)} = \beta(X)$ es compacto. ■

Proposición 104. Sea (Y, σ) un espacio de Hausdorff compacto y sea $F : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función continua. Existe una única función continua $\hat{f} : \beta(X) \rightarrow Y$ tal que $f = \hat{f} \circ e$.

Se definen las funciones:

$$\begin{aligned} f^* &: C(Y) \rightarrow C(X) \\ f^{**} &: [0, 1]^{C(X)} \rightarrow [0, 1]^{C(Y)} \end{aligned}$$

que verifican $f^*(w) = w \circ f$ y $f^{**}(u) = u \circ f^*$.

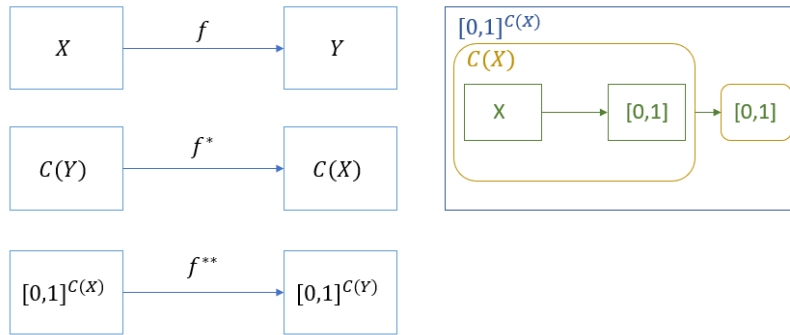


Figura: Funciones definidas y diagrama de espacios.

Utilizando las funciones anteriores, a continuación se realizará la demostración de la proposición enunciada anteriormente (9).

Demostración. Sea $h \in C(X)$, que cumple que

$$\begin{aligned} f^{**}(u)(h) &= (u \circ f^*)(h) \\ &= e(x)(h \circ f) \\ &= (h \circ f)(x) \\ &= h(f(x)) \end{aligned}$$

Además, también se tiene que:

$$(\hat{e} \circ f)(x)(h) = \hat{e}(f(x))(h) = h(f(x))$$

Entonces $(f^{**}(x)(h)) = (\hat{e} \circ f)(x)(h)$ para todo $x \in X$, $h \in C(X)$ (pues h fue elegido de forma arbitraria), se concluye que $f^{**} \circ e = \hat{e} \circ f$.

*Continuidad de f^{**} :* Sea $u_\lambda \rightarrow u$ en la compactificación $\beta(X)$, entonces para todo $h \in C(X)$ se tiene que $u_\lambda(h) \rightarrow u(h)$. Lo anterior implica que para todo $g \in C(Y)$ se verifica que:

$$\begin{aligned} f^{**}(u_\lambda)(g) &= u_\lambda(g \circ f) \\ &= f^{**}(u)(g) \end{aligned}$$

entonces $f^{**}(u_\lambda) \rightarrow f^{**}(u)$, concluyendo que f^{**} es una función continua. Como $\hat{e} : Y \rightarrow \hat{e}(Y)$ es homeomorfismo (proposición 6, parte 2), luego por la proposición 7, es posible afirmar que $\hat{e}(Y)$ es cerrado en $[0, 1]^{C(Y)}$, porque Y es compacto. Luego sea la función $\hat{f} : \beta(X) \rightarrow Y$ dada por $\hat{e}^{-1} \circ f^{**}$.

La función $\hat{f}$ es bien definida: Para probar esto, basta ver que $f^{**}(\beta(X)) \subseteq \hat{e}(Y)$, como la función f^{**} es continua, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{**}(\beta(X)) &= f^{**}(\overline{e(X)}) \\ &\subseteq \overline{f^{**}(e(X))} \\ &\subseteq \overline{\hat{e}(Y)} \\ &= \hat{e}(Y) \end{aligned}$$

luego $\hat{f}$ está bien definida.

Continuidad de $\hat{f}$: Como f^{**} y $\hat{e}^{-1}$, se concluye que $\hat{f}$ es continua por la composición.

Unicidad de $\hat{f}$: Sea $\bar{f} : \beta(X) \rightarrow Y$ continua tal que $\bar{f} \circ e = \hat{e} \circ f$, para concluir la unicidad de $\hat{f}$ basta con ver que $\hat{f} = \bar{f}$.

Como se debe tener que para todo $x \in X$ y $g \in C(Y)$ se cumple que $\bar{f}(e(x))(g) = g(f(x)) = \hat{f}(e(x))(g)$, osea que las funciones $\hat{f}, \bar{f}$ coinciden en $e(X)$. Como $\bar{f}$ es una función continua, si $u \in \beta(X)$ y $u_\lambda \rightarrow u$ es una red en $e(X)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{f}(u_\lambda) &\rightarrow \hat{f} \\ \bar{f}(u_\lambda) &\rightarrow \bar{f} \\ \hat{f}(u) &= \bar{f}(u) \end{aligned}$$

entonces $\overline{f} = \hat{f}$, se concluye la unicidad de $\hat{f}$. ■

Tamaño de la compactificación de Stone-Cech de $\mathbb{N}$

Usando lo anterior, es posible ver que la compactificación de Stone-Cech para los números naturales es bastante más grande que $\mathbb{N}$.

Proposición 105. $\mathbb{N}$ dotado de la topología usual es un espacio de Tychonoff y $|\beta(\mathbb{N})| = 2^c$.

Demostración. Hay que probar dos proposiciones:

1. A continuación se verá que $\mathbb{N}$ es un espacio de Tychonoff, osea que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{n\}$ es cerrado en la topología sobre $\mathbb{N}$ y que para toda vecindad $V \in \mathcal{N}_n$, existe $Z \in C(\mathbb{N})$ tal que $Z(n) = 0$ y $Z(V^c) = \{1\}$.
 - a) Como $\mathbb{N}$ está dotado de su topología usual, que corresponde a la topología discreta, todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$ son abiertos y cerrados a la vez, en particular para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\{n\}$ es cerrado, pues $\mathbb{N} \setminus \{n\} \subseteq \mathbb{N}$ es abierto.
 - b) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $V \in \mathcal{N}_n$, luego se define la función indicatriz:

$$\mathbb{1}_V(x) = \begin{cases} 1 & , x \in V \\ 0 & , x \notin V \end{cases}$$

luego, se constituirá Z utilizando la indicatriz, basta notar que $Z(x) = 1 - \mathbb{1}_V(x)$ ¹ donde $Z : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, luego:

$$Z(x) = \begin{cases} 0 & , x \in V \\ 1 & , x \notin V \end{cases}$$

Luego Z es continua, pues $\mathbb{N}$ está dotado por la topología discreta que hace a todas las funciones continuas, entonces $Z \in C(\mathbb{N})$.

Para concluir, se tiene que $Z(x) = 0$ y $Z(y) = 1$ para todo $y \notin V_x$. Se concluye la existencia de la función que separa puntos necesaria para satisfacer la condición de Tychonoff.

Se concluye que $\mathbb{N}$ es espacio de Tychonoff.

2. A continuación se demuestra que $|\beta(\mathbb{N})| = 2^c$, para ello se utiliza doble desigualdad.

Como $\mathbb{N}$ es espacio de Tychonoff, luego existe la compactificación de Stone-Cech $\beta(\mathbb{N})$, además existe $C(\mathbb{N})$ y por ende se puede definir $\overline{e(\mathbb{N})} = \beta(\mathbb{N})$.

¹Podría definirse la indicatriz al revéz, pero en fin, la homotopía...

- a) *Demostración de $|\beta(\mathbb{N})| \leq 2^{\mathfrak{c}}$* : Por definición de $\beta(\mathbb{N})$ se tiene que $\beta(\mathbb{N}) = e(\mathbb{N}) \subseteq [0, 1]^{C(\mathbb{N})}$, entonces $|\beta(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]^{C(\mathbb{N})}|$, y por aritmética de cardinales:

$$|\beta(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]^{C(\mathbb{N})}| = |[0, 1]|^{C(\mathbb{N})}$$

Por proposición de la parte (1) se tiene que $|C(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$, por lo tanto:

$$|\beta(\mathbb{N})| \leq |[0, 1]^{C(\mathbb{N})}| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$$

Entonces utilizando una identidad estudiada en la parte (1), luego $|\beta(\mathbb{N})| \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}$, concluyendo que $|\beta(\mathbb{N})| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

- b) *Demostración de $|\beta(\mathbb{N})| \geq 2^{\mathfrak{c}}$* : Sea D un denso numerable en $[0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ (pues es separable), luego sea $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ tal que $f(\mathbb{N}) = D$. Sea $\hat{f} : \beta(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]^{C(\mathbb{N})}$, a continuación se verá que $\hat{f}$ existe y es sobreyectiva.

Existencia de $\hat{f}$: Como $\mathbb{N}$ es espacio de Tychonoff, además se tiene que como $[0, 1]$ es Hausdorff compacto, el producto $[0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ es espacio de Hausdorff compacto (por los teoremas de Tychonoff y del producto de Hausdorff respectivamente). Como $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ tiene la topología discreta en el espacio de salida, es gratis que f es continua.

Por lo probado de la parte (3), se tiene que existe una única función continua $\hat{f} : \beta(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ tal que $f = \hat{f} \circ e$, donde e es la evaluación de $\mathbb{N}$ definida en la parte (2). Se concluye que $\hat{f} : \beta(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]^{C(\mathbb{N})}$ existe según lo anterior.

Sobreyectividad de $\hat{f}$: Propuesto.

Cardinal de la compactificación de $\mathbb{N}$: Para esto se considera D un denso numerable en $[0, 1]^{C(\mathbb{N})}$, luego suponiendo que existe una función sobreyectiva entre $\beta(\mathbb{N})$ y $[0, 1]^{C(\mathbb{N})}$, luego:

$$\begin{aligned} |\beta(\mathbb{N})| &\geq |[0, 1]^{C(\mathbb{N})}| \\ &= |[0, 1]|^{C(\mathbb{N})} \\ &= \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \\ &= 2^{\mathfrak{c}} \end{aligned}$$

Luego, como se tienen ambas desigualdades, se tiene que $|\beta(\mathbb{N})| = 2^{\mathfrak{c}}$, entonces:

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 < 2^{\mathfrak{c}}$$

Concluyendo. ■

7.4. Conexidad

Intuitivamente, la conexidad mide el número de porciones de un conjunto dado. Un conjunto formado por dos partes disjuntas (disconexas) será no conexo.

Definición 98 (Separación). Una separación de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ está definida por un par de abiertos U, V , disjuntos, cuya unión es X . Si uno de los abiertos es vacío, se dice que la separación es trivial.

Definición 99 (Conexidad). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Diremos que $(X, \mathcal{T})$ es conexo si los únicos abiertos y cerrados en X son el mismo espacio y el vacío. Además $A \subseteq X$ es conexo si $(A, \mathcal{T}|_A)$ es conexo.

Note que un espacio topológico es conexo cuando la única separación que existe es la trivial.

Ejemplo.

1. $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topología traza de la topología canónica es conexo, pero $[0, 1] \sqcup [2, 3]$ no lo es.
2. $\mathbb{R}^d$ con la topología canónica es conexo, pero dos bolas abiertas disjuntas B_1, B_2 no lo son (ambas son abiertas y cerradas).
3. $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_d)$ no es conexo (cada punto es cerrado y abierto a la vez).
4. $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}})$ tampoco es un espacio conexo, pues $PA_{a,b}$ es abierto y cerrado para $a \neq 0$.

A continuación se verán caracterizaciones de conexidad que serán muy útiles más adelante, ya que algunas son muy cómodas de trabajar.

Teorema 40 (Caracterizaciones de conexidad). Los siguientes son equivalentes:

1. $(X, \mathcal{T})$ es conexo.
2. Si Θ_1, Θ_2 son abiertos disjuntos en X tales que $X = \Theta_1 \sqcup \Theta_2$, entonces uno es X y el otro es vacío.
3. Si F_1, F_2 son cerrados disjuntos en X tales que $X = F_1 \sqcup F_2$, entonces uno es X y el otro es vacío.

Demostración.

- *Demostración de $(1) \Leftrightarrow (2)$:*

Se tiene que $\Theta_2 = \Theta_1^c$ cerrado y abierto en $\mathcal{T}$, luego $\Theta_2 = X$ o bien $\Theta_2 = \emptyset$, lo que prueba lo pedido.

Si A es abierto y cerrado en X , A^c también lo es, y $X = A \sqcup A^c$, luego A o A^c es X , lo que prueba lo pedido.

- *Demostración de $(1, 2) \Leftrightarrow (3)$:*
Propuesto.

■

Proposición 106. El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es conexo ssi toda función continua $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ es necesariamente constante.

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (\{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ continua. Entonces $X = f^{-1}(\{0\} \sqcup \{1\}) = f^{-1}(\{0\}) \sqcup f^{-1}(\{1\})$.

Ambos $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}(\{1\})$ son abiertos (preimagen de abiertos), y disjuntos. Como $(X, \mathcal{T}_X)$ es conexo, o bien $f^{-1}(\{0\}) = X$ y $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, o bien $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ y $f^{-1}(\{1\}) = X$. En ambos casos f es constante.

($\Leftarrow$) Suponiendo que $(X, \mathcal{T}_X)$ no es conexo. Entonces existen abiertos no vacíos y disjuntos A_1, A_2 en X con $X = A_1 \sqcup A_2$.

Se define $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ dada por $f(x) = 1$ si $x \in A_1$, y $f(x) = 0$ si $x \in A_2$, i.e. f no es constante. Afirmando que f es continua, lo que es absurdo.

En efecto, $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, ambos abiertos. Finalmente, $f^{-1}(\{0\}) = A_2$ y $f^{-1}(\{1\}) = A_1$, ambos abiertos.

■

Comentario. En la proposición anterior puede cambiarse la hipótesis de que f sea constante por la de que f sea sobreyección.

Con un par de caracterizaciones de la conexidad en mente, se presentan a continuación algunos ejemplos de espacios conexos:

Ejemplo. En los espacios topológicos conocidos (ver ejemplos de espacios topológicos del capítulo 3).

1. El vacío y los singletons son conexos en cualquier espacio topológico.
2. Cualquier espacio donde no existan abiertos (o cerrados) disjuntos es conexo.
3. En $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$, todo subconjunto es conexo.
4. En $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$, los únicos conexos no vacíos son los puntos.
5. En $(X, \mathcal{T}_A)$, si $A \cap B = \emptyset$, B es conexo si y sólo si se reduce a un punto, y en caso contrario es desconexo.
6. En $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$, A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es infinito.
7. En $(X, \mathcal{T}_{\text{conum}})$, A es conexo si y sólo si es vacío, se reduce a un punto o es no numerable.

8. En $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$, los conexos son los intervalos, esto es muy importante y se presentará a continuación.

Definición 100 (Intervalo real). En $\mathbb{R}$, un intervalo es un conjunto I tal que si $x, y \in I$, todos los puntos entre x, y , están en I .

Ejemplo.

1. $I = \{0\}$, $I = [0, 1)$, $I = (-1, 1)$, $I = (-\infty, 2]$, etc. Son intervalos.
2. $[0, 1) \sqcup [3, 4]$ no es intervalo.

Proposición 107. Los únicos conexos en $\mathbb{R}$ (con la topología traza de la canónica de $\mathbb{R}$) son los intervalos.

Demostración.

($\Rightarrow$) Suponiendo que $A \subseteq \mathbb{R}$ es conexo, se probará que es intervalo. Si A es un punto, es trivial.

A continuación se verá el caso general. Razonando por contradicción, se supondrá lo contrario, osea que para ciertos $x, z \in A$ tal que $x < z$, existe $y \notin A$ y $x < y < z$. Pero

$$A_1 \sqcup A_2 := (A \cap (-\infty, y)) \sqcup (A \cap (y, +\infty)) = A$$

La unión de arriba es disjunta, y cada miembro de la unión es abierto en la topología traza de la topología canónica sobre A .

Mejor aún, x está en A_1 y z en A_2 , luego ambos son no vacíos. Por lo tanto, A no es conexo, contradicción.

■

Definición 101 (Disconexidad). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es desconexo en caso de no ser conexo.

Definición 102 (Disconexidad total). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es totalmente desconexo si sus únicos conexos son el vacío y los singletons (puntos).

Ejemplo. Los espacios discretos, la recta racional y el conjunto de Cantor, son ejemplos de espacios totalmente desconexos.

Proposición 108. Si $(X, \mathcal{T}_1)$ es conexo y $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$, entonces $(X, \mathcal{T}_2)$ también es conexo.

A continuación se presenta un par de propiedades de los subconjuntos conexos.

Proposición 109. Si $B \subseteq A \subseteq X$, B es conexo en $(X, \mathcal{T})$ ssi lo es en $(A, \mathcal{T}_A)$.

Proposición 110. En $(X, \mathcal{T})$, si A es abierto y cerrado a la vez y C es conexo, necesariamente $C \subseteq A$ o $C \subseteq A^c$.

7.4.1. Conexidad y funciones continuas

Lema 13. La imagen continua de un conexo es conexo

Definición 103 (Curva continua). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una curva continua Γ en X es el conjunto:

$$\Gamma := \{\gamma(t) | t \in [0, 1] \subseteq X\}$$

donde γ es una función continua (con respecto a las topologías naturales).

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \gamma = \gamma(t) \in X$$

Corolario 40.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y Γ es curva continua en X , entonces Γ es conexas.

7.4.2. Conexidad mediante operaciones de conjuntos

Lema 14. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una colección de conexos en X con $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ es conexo.

Lema 15. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A \subseteq X$ conexo. Entonces todo conjunto B tal que $A \subseteq B \subseteq \text{adh}(A)$ es conexo. En particular, $\text{adh}(A)$ es conexas.

7.4.3. Teorema de los productos conexos

Teorema 41. El producto topológico de espacios topológicos conexos es conexo.

Proposición 111. Son equivalentes:

1. Teorema de Tychonoff.
2. Teorema de los productos conexos.

7.4.4. Componentes conexas

La idea es describir las partes conexas maximales de un espacio topológico, las cuales se definen como un elemento local según se muestra a continuación.

Definición 104 (Componente conexas). En $(X, \mathcal{T})$, dado $x \in X$, al mayor conexo $C(x)$ que contiene a x se le llama componente conexas del punto x .

Proposición 112. Las componentes conexas en $(X, \mathcal{T})$ constituyen una partición del espacio.

Proposición 113. En $(X, \mathcal{T})$ las componentes conexas son conjuntos cerrados.

Proposición 114. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico.

1. $(X, \mathcal{T})$ es conexo ssi posee una única componente conexa (que es el espacio total).
2. $(X, \mathcal{T})$ es totalmente desconexo ssi sus componentes conexas se reducen a singletons (puntos).

Proposición 115. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y C una componente conexa. Si A es conexo, entonces es $A \subseteq C$ o $A \subseteq C^c$.

7.5. Conexidad por caminos

7.6. Conexidad local

Definición 105 (Conexidad local/local por caminos). El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice localmente conexo (respectivamente localmente conexo por caminos), si cada punto de X posee una base local (de vecindades) formada por conjuntos conexos (respectivamente, conexos por caminos). $A \subseteq X$ es localmente conexo (respectivamente, conexo por caminos), si el subespacio $(A, \mathcal{T}_A)$ lo es.

Teorema 42 (Caracterización de conexidad local). Son equivalentes:

1. $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo (por caminos).
2. Existe una base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ formada por conjuntos conexos (por caminos).
3. Para cada $U \in \mathcal{T}$, las componentes conexas (por caminos) en U son abiertas.

Corolario 42.1. Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo, para cada $x \in X$, la componente conexa $C(x)$ es abierta y cerrada a la vez.

Corolario 42.2. Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo por caminos, para cada $x \in X$, la componente conexa por caminos $c(x)$ es abierta.

Proposición 116. Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo, entonces es localmente conexo por caminos.

Ejemplo. Algunos ejemplos de las propiedades locales son:

1. $(X, \mathcal{T}_{\text{trivial}})$ es localmente conexo y localmente conexo por caminos.

2. $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ es localmente conexo y localmente conexo por caminos.
3. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ es localmente conexo y localmente conexo por caminos.
4. $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ es localmente conexo.

Proposición 117. Si $(X, \mathcal{T})$ es localmente conexo (por caminos) y $A \in \mathcal{T}$, entonces $(A, \mathcal{T}_A)$ es localmente conexo (por caminos).

Proposición 118. La imagen continua y abierta de un espacio localmente conexo (por caminos) es localmente conexa (por caminos).

A continuación se presenta la relación entre la conexión y la conexión por caminos.

Teorema 43. Si $(X, \mathcal{T})$ es conexo y localmente conexo por caminos, entonces es conexo por caminos.

Capítulo 8

Espacios uniformes

8.1. Uniformidades

Motivación: En un espacio topológico se tiene definida la noción de vecindad (entorno) de un punto, cuya interpretación corresponde a que un entorno de algún punto x contiene a todos los puntos suficientemente cercanos a x . Cuando más pequeño sea el entorno, más cercano estarán los puntos que contiene. Por otro lado, en un espacio métrico se tiene la noción de cercanía mediante la definición de la métrica, que cuantifica la cercanía.

Alguna de las cosas topológicamente interesantes que es posible realizar en un espacio métrico sin que sean puramente topológicos es que:

Si M es un espacio métrico y $\varepsilon > 0$, es posible considerar el conjunto

$$V_\varepsilon = \{(x, y) \in M \times M \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

El conjunto V_ε contiene todos los pares de puntos que se encuentran uniformemente próximos en el sentido de que dos pares en V_ε , digamos (x, y) y (x', y') , pueden estar muy alejados entre sí, pero en el grado de proximidad entre x y y es de la misma magnitud que el de x' e y' .

Si M fuese un espacio topológico no métrico, no sería posible definir nada parecido a esto. Dados dos puntos x, x' , es posible tomar un entorno U_x de x tan pequeño como se desee, y otro $U_{x'}$ de x' tan pequeño como se desee, pero no hay forma de expresar que si $y \in U_x$ e $y' \in U_{x'}$, entonces la proximidad de y a x es del mismo "orden" que la proximidad de y' a x' .

A continuación desearemos definir conceptos de espacios métricos que no dependan de la presencia de la métrica, obteniendo una estructura más restrictiva que la de *topología* pero mucho más general que la de *espacio métrico*.

Definición 106 (Banda). Una banda en un conjunto X es un conjunto $U \subseteq X \times X$ que verifica que:

1. Para todo punto $x \in X$ se cumple que $(x, x) \in V$.
2. Para todo par de puntos $u, v \in X$ se cumple que $(u, v) \in U$ si y sólo si $(v, u) \in U$.

Denotaremos $\mathcal{D}_X$ al conjunto de todas las bandas en X .

Definición 107 (Diagonal). Se define la diagonal en $X \times X$ como:

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X | x \in X\}$$

Proposición 119. Todo $U \in \mathcal{D}_X$ cumple que $\Delta \subseteq U$.

Definición 108 (Distancia). Sea X un conjunto, U una banda en X y $x, y \in X$. Diremos que la distancia de x a y es menor que U , y lo denotaremos como $d(x, y) < U$, si $(x, y) \in U$. Si $A, B \subseteq X \times X$, llamaremos:

$$A + B := \{(x, z) | \exists y \in X \text{ tq } (x, y) \in A \wedge (y, z) \in B\}$$

en general para cada natural n denotaremos $nA := \underbrace{A + \dots + A}_{n \text{ veces}}$. Luego $d(x, y)$ verifica:

1. $d(x, x) < U$.
2. $d(x, y) < V$ si y sólo si $d(y, x) < U$.
3. Si $d(x, y) < U$ y $d(y, z) < W$, entonces $d(x, z) < V + W$.

Observación. Las bandas en un conjunto arbitrario se comportan como los números reales en un espacio métrico, y la suma de bandas que hemos definido se comporta como la suma de números reales.

Definición 109 (Diámetro). Diremos que un subconjunto $A \subseteq X$ tiene un diámetro menos que V si para todo $x, y \in A$ se cumple que $d(x, y) < V$.

Definición 110 (Uniformidad). Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. Una colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ se dice uniformidad para X si verifica:

- U1) $\forall U \in \mathcal{U}, \Delta := \{(x, x) \in X \times X | x \in X\} \subseteq U$.
- U2) Si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subseteq V$, entonces $V \in \mathcal{U}$.
- U3) Si $U, V \in \mathcal{U}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$.
- U4) $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V := \{(x, y) \in X \times X | \exists z \in V : (x, z) \in V \wedge (z, y) \in V\} \subseteq U$.
- U5) $\forall U \in \mathcal{U}, U^{-1} := \{(x, y) \in X \times X | (y, x) \in U\} \subseteq U$.

Si $\mathcal{U}$ es uniformidad para X , entonces Al par $(X, \mathcal{U})$ se le dice espacio uniforme.

Definición 111. Una sub-colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ se dice base para $\mathcal{U}$ si para cualquier $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $V \subseteq U$.

8.2. Semi métricas uniformes

8.3. Completitud

8.4. Convergencia uniforme

Capítulo 9

Homotopía

Definición 112 (Aplicaciones homótopas).

Parte III

Espacios métricos

Capítulo 10

Espacios métricos

Retomando algunas definiciones sobre espacios métricos:

Definición 113 (Distancia/métrica). Un par (X, d) es un espacio métrico (e.m.) si la función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ define una distancia, es decir que para todo $x, y, z \in X$,

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Ejemplo. Todo espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es métrico, donde $d(x, y) := \|x - y\|$.

Observación.

1. Recordar que toda métrica define una topología sobre X , dicha topología es llamada la topología métrica, cuya base de abiertos son las bolas abiertas $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.
2. Todo espacio métrico satisface el PAN (base de vecindades numerable para cada punto de X), por lo que la convergencia se puede caracterizar por sucesiones.

Definición 114 (Isometría). Una función $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ entre dos espacios métricos, se dice isometría si es una aplicación biyectiva que preserve las distancias, es decir, para cada par de puntos $x, y \in X$ se tiene que:

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

Proposición 120. La relación 'ser isométrico a' es una relación de equivalencia sobre la familia de los espacios métricos.

Definición 115 (Métricas equivalentes). Dos métricas d_1 y d_2 se dicen equivalentes si generan la misma topología.

Proposición 121. Toda métrica d sobre X es equivalente a una métrica definida a partir de d , se llama métrica acotada y se denotará como $\bar{d}$ y es definida como:

$$\bar{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Definición 116 (Diámetro de un conjunto). Se define el diámetro de un conjunto como $\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$.

10.1. Continuidad en espacios métricos

La continuidad pese a ser una propiedad topológica, es posible definirla mediante las distancias asociadas a los espacios involucrados en la función, ésta definición recupera la esencia de la definición mediante $\varepsilon - \delta$ utilizada en cursos de cálculo.

Definición 117 (Continuidad). Sean (X, d) , (Y, p) dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice continua en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_p(x_0, \varepsilon)$$

Proposición 122 (Continuidad vs continuidad secuencial). Sean (X, d) e (Y, p) dos espacios métricos, $f : X \rightarrow Y$ y $x_0 \in X$. Son equivalentes:

1. f es continua en x_0 .
2. f es *secuencialmente continua* en x_0 , es decir, para todo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Definición 118 (Continuidad uniforme). Una aplicación $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ es uniformemente continua si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon > 0$, tal que para cada $x, y \in X$ con $d_X(x, y) < \delta_\varepsilon$, es $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Definición 119 (Continuidad Lipschitz). Sean (X, d) y (Y, p) dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice Lipschitz continua (o simplemente Lipschitz), si existe $L > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in X$ se tiene que

$$p(f(x_1), f(x_2)) \leq Ld(x_1, x_2)$$

Es fácil comprobar que la continuidad Lipschitz es más fuerte que la continuidad uniforme, esto se expresa en la siguiente proposición.

Proposición 123. Una función Lipschitz continua es uniformemente continua.

El recíproco de lo anterior no es cierto, pues las funciones $t \mapsto t^2$ y $t \mapsto \sqrt{|t|}$ definidas de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ son continuas pero no son Lipschitz continuas.

Observación. La continuidad Lipschitz es una noción métrica, haciendo referencia explícita a las distancias de los espacios métricos involucrados.

El siguiente resultado proporciona una clase importante de funciones (Lipschitz) continuas en un espacio métrico (X, d) , vinculadas con su distancia.

Teorema 44 (Distancia punto-conjunto). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ no vacío. Entonces la función

$$f(x) = \text{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

es Lipschitz continua.

Como consecuencia del teorema anterior se tienen la continuidad de la norma, puesto que para todo $x_0 \in X$, la función distancia a x_0 es continua en X . Si X es un espacio vectorial y la distancia proviene de una norma, se deduce el siguiente corolario:

Corolario 44.1 (Continuidad de la norma). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces la función norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua.

Otra consecuencia interesante, es que hay suficientes abiertos para separar conjuntos cerrados disjuntos en un espacio métrico:

Corolario 44.2 (Lema de Urysohn, versión métrica). Sean $A, B \subseteq X$ cerrados, con $A \cap B = \emptyset$. Entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\{0\}) &= A \\ f^{-1}(\{1\}) &= B \end{aligned}$$

10.2. Espacios métricos completos

Mientras que cada sucesión convergente en un espacio métrico (X, d) es también una sucesión de Cauchy, el recíproco por lo general no es cierto, en el siguiente ejemplo se ilustra esto:

Ejemplo. Sea $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Considerando el conjunto de los números racionales dotado con la distancia habitual y una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ de racionales que converge al número real $\sqrt{2}$. Entonces, dicha sucesión es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$, pero no converge en el espacio $\mathbb{Q}$.

Definición 120 (Sucesión de Cauchy). Una sucesión $(x_n) \subseteq X$ se dirá de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

A continuación se presentan algunas propiedades de las sucesiones de Cauchy:

Proposición 124. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy.

Demostración. Sea $(x_n) \subseteq X$ una sucesión convergente a x , ésto es que para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$, $d(x_n, x) < \varepsilon/2$, luego considerando $m \geq n_0$ y con desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_n, x) + d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

■

Más adelante se estudiará lo que ocurre cuando el recíproco de lo anterior es cierto.

Proposición 125. Si una sucesión (x_n) es de Cauchy y posee una subsucesión convergente, entonces (x_n) es convergente.

Demostración. Sea $(x_n) \subseteq X$ una sucesión de Cauchy y $(x_{\phi(n)}) \subseteq (x_n)$ una subsucesión convergente a x , esto es que $d(x_{\phi(n)}, x) < \varepsilon/2$ con $\varepsilon > 0$, luego buscando la desigualdad triangular conveniente:

$$\begin{aligned} \underbrace{d(x_m, x_{\phi(n)})}_{\text{Cauchy}} + \underbrace{d(x_{\phi(n)}, x)}_{\text{Subsucesión}} &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow d(x_m, x) &< \varepsilon \end{aligned}$$

■

Definición 121 (Espacio completo). Un espacio métrico se dirá completo si toda sucesión de Cauchy converge. Si el espacio es normado y completo se dirá que es espacio de Banach.

Ejemplo.

1. $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ es espacio de Banach.
2. $(C([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es espacio de Banach. Donde $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.
3. Un espacio métrico dotado de la métrica discreta es un espacio completo, una sucesión es de Cauchy (respectivamente, convergente) ssi es una sucesión constante.

4. $\ell^\infty(X, Y)$. Sea (Y, d) un espacio métrico completo y $X \neq \emptyset$ un conjunto cualquiera, se define

$$\ell^\infty(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid \text{diam}(f(X)) < \infty\}$$

es decir, el conjunto de las funciones acotadas de X a Y . A este conjunto se le puede dotar con la siguiente distancia:

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

teniendo que $(\ell^\infty(X, Y), d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Teorema 45 (Completación de espacios métricos). Para cada espacio métrico (X, d) existe un espacio métrico completo (X^*, d^*) y una función inyectiva $\phi : X \rightarrow X^*$ tal que:

1. $\phi(X)$ es densa en X^* (con la topología generada por d^*).
2. ϕ es isometría: $d^*(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.
Luego, $\phi : X \rightarrow \phi(X)$ es biyección.

En otras palabras, todo espacio métrico es isométrico a un subconjunto denso de un espacio métrico completo. Además, (X^*, d^*) es único salvo isometría.

Teorema 46. Sea (X, d) un espacio métrico completo y (F_n) una sucesión de cerrados no vacíos y tales que están encajonados, osea que $F_{n+1} \subseteq F_n$. Si $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$, entonces $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ es un singleton.

10.2.1. Teorema del punto fijo de Banach

Definición 122 (Contracción). Sean (X, d_X) , (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice contracción, si es Lipschitz continua con constante $K < 1$, es decir, para todo $x, y \in X$ se tiene que:

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y), \text{ con } K < 1$$

Proposición 126. Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una contracción. Sea $x_0 \in X$. Entonces la sucesión (x_n) , definida de forma recursiva:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_{n+1} &= f(x_n) \end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de Cauchy.

Teorema 47 (Punto fijo de Banach). Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces existe único $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

10.2.2. Teorema de categoría de Baire**10.2.3. Teorema de intersección de Cantor****10.2.4. Principio variacional de Ekeland**

Definición 123 (Semi-continuidad inferior). Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice semi-continua inferiormente (sci) en $\bar{x} \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(\bar{x}, \delta)) \subseteq (f(\bar{x}) - \varepsilon, \infty)$$

o de forma equivalente,

$$\forall \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X : x_n \rightarrow x \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(\bar{x})$$

Se dice que f es sci si lo es en cada $x \in X$.

Proposición 127 (Caracterización de sci). Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Son equivalentes:

1. f es semi-continua inferiormente.
2. $f^{-1}((a, \infty))$ es abierto en X para todo $a \in \mathbb{R}$.
3. $f^{-1}((-\infty, b])$ es cerrado en X para todo $b \in \mathbb{R}$.

Teorema 48 (Principio variacional de Ekeland). Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función sci. Sea $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ y $x_0 \in X$ tal que

$$f(x_0) < \inf_{x \in X} f + \varepsilon \lambda$$

Entonces existe $\bar{x} \in B(x_0, \varepsilon)$ tal que para todo $x \in X$, $x \neq \bar{x}$:

$$f(\bar{x}) < f(x) + \lambda d(x, \bar{x})$$

Proposición 128. Sea (X, d) un espacio métrico. Suponiendo que el espacio satisface la conclusión del principio variacional de Ekeland para cada función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ sci y acotada inferiormente. Entonces (X, d) es completo.

10.3. Espacios métricos compactos

A continuación se estudiarán los espacios métricos compactos, recuerde que ser compacto es que todo recubrimiento de abiertos posee un subrecubrimiento finito. Para ello, se necesitan antes las siguientes definiciones. Donde (X, d) es un espacio métrico.

Definición 124 (Conjunto acotado). Se dice que $A \subseteq X$ es acotado si $\text{diam}(A) < \infty$.

Ejemplo. En $\mathbb{R}^d$, todas las bolas son acotadas.

Definición 125 (Conjunto totalmente acotado). Se dice que $A \subseteq X$ se dice totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe una familia finita de conjuntos $R_1, \dots, R_{n(\varepsilon)}$ que cubren X con $\text{diam}(R_i) \leq \varepsilon$. Tal familia se llama ε -recubrimiento.

Ejemplo.

1. Para $[0, 1]$, los intervalos de ancho ε inducidos por la partición de $[1/\varepsilon]$ pasos, cubre $[0, 1]$.
2. En $\mathbb{R}$ con la topología canónica, $\mathbb{Z}$ no es totalmente acotado (ni acotado).

Proposición 129. Sea A totalmente acotado, entonces es acotado.

Definición 126 (Número de Lebesgue). Sea $\mu > 0$, se dice número de Lebesgue para un recubrimiento abierto $\{\Theta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ si para cada $x \in X$, existe $\lambda \in \Lambda$ para el cual $B(x, \mu) \subseteq \Theta_\lambda$.

Observación. El número de Lebesgue no tiene por qué ser único.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ el recubrimiento $\{(n, n + 2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ posee número de Lebesgue $\frac{1}{2}$ (hay un traslape de largo 1 entre cada abierto).

Definición 127 (Espacio secuencialmente compacto). El espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice secuencialmente compacto si toda sucesión en X posee subsucesión convergente.

Ejemplo. El espacio $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T}_c)$ es secuencialmente compacto, pero en dimensión infinita no es necesariamente cierto.

Teorema 49. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $K \subseteq X$ compacto. Entonces:

1. K es cerrado (consecuencia de ser Hausdorff).
2. K es acotado.
3. $(K, d|_K)$ es completo.
4. K es totalmente acotado.

Observación. Las recíprocas de (1) y (2) no son ciertas. Cerrado y acotado no implica compacto.

Teorema 50 (Teorema de Heine-Borel-Lebesgue). Sea (X, d) espacios métricos. Son equivalentes:

1. X es compacto (con la topología inducida por la distancia).
2. X es secuencialmente compacto.
3. (X, d) es completo y totalmente acotado.

Corolario 50.1. En $\mathbb{R}^d$, A es compacto ssi es cerrado y acotado.

Capítulo 11

Espacios polacos

11.1. Introducción

Definición 128 (Espacio polaco). Un espacio polaco es un espacio topológico completamente metrizable con una base numerable (osea que satisface SAN).

Parte IV

Análisis funcional

Capítulo 12

Primeros teoremas fuertes

12.1. Teorema de Stone-Weierstrass

El teorema de Stone-Weierstrass permite aproximar funciones continuas por subconjuntos de fácil manejo, como polinomios, funciones trigonométricas, etc. Para fijar ideas, sea $(K, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto, y $C(K, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas desde K a valores reales, junto a la norma del supremo $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$, que lo hace un espacio de Banach.

Para continuar, es importante recordar que un anillo $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es una estructura algebraica con dos leyes de composición internas $+$ y $\cdot$ tales que $(\mathcal{A}, +)$ es un grupo abeliano conmutativo, mientras que $\cdot$ es asociativa y distribuye sobre $+$ por ambos lados. Si todo elemento diferente al neutro aditivo posee un inverso respecto de $\cdot$, se habla de un cuerpo.

Comentario. Para recordar los contenidos de álgebra, es posible consultar el anexo sobre estructuras algebraicas al final del texto.

Definición 129 (Álgebra). Un álgebra $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es un anillo el cual también es espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y se tiene para todo $x, y \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y)$$

Una sub-álgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$

Ejemplo.

1. Las matrices de $n \times n$ a valores reales, $M_{n,n}(\mathbb{R})$, forman un anillo junto a la suma y la multiplicación. Asimismo, también forman un álgebra por ser un e.v. sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con la ponderación por escalar.
2. $C(K, \mathbb{R})$ forman un álgebra con la suma y multiplicación de funciones, y ponderación por escalar. Es además, conmutativa (para ambas leyes) y con unidad para $+$.

Definición 130 (Álgebra separante/totalmente separante). Una familia $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ se dice separante si para cada $x, y \in K$ diferentes, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Si además para cualquier $x \in K$ existe $g \in \mathcal{A}$ con $g(x) \neq 0$, se dice que es totalmente separante.

Ejemplo. Si $K = [0, 1]$, los polinomios $p : K \rightarrow \mathbb{R}$ definen una familia totalmente separante: $p_1(x) := x$ los separa, y $p_2(x) = 1$ los separa totalmente. Más ejemplos más adelante.

Teorema 51 (Stone-Weierstrass). Sea $(K, \mathcal{T})$ Hausdorff compacto y $\mathcal{A} \subseteq C(K, \mathbb{R})$ una álgebra separante. Entonces su adherencia $\text{Adh}(\mathcal{A})$ con respecto a la norma de $C(K, \mathbb{R})$ es:

1. **Caso totalmente separante:** $C(K, \mathbb{R})$ (i.e. es denso).
2. **Caso separante pero no totalmente separante:** La subálgebra de $C(K, \mathbb{R})$ formada por todas las funciones continuas que se anulan en un punto dado $x_0 \in K$.

Ejemplo.

1. Por lo visto anteriormente, los polinomios son densos en $C([0, 1], \mathbb{R})$ (forman una sub-álgebra totalmente separante).
2. Si $C_p([0, 2\pi], \mathbb{R})$ denota las funciones continuas $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ que son 2π -periódicas (es decir $f(0) = f(2\pi)$), y si:

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{k=0}^N (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

son los polinomios trigonométricos (o serie de Fourier), entonces $\mathcal{A}$ es sub-álgebra totalmente separante. *Queda propuesto verificar esto.* Luego, son densos en $C_p([0, 2\pi], \mathbb{R})$, o sea que toda función 2π -periódica puede aproximarse por su serie de Fourier.

Proposición 130 (Propuesto ejemplo). En el ejemplo anterior (2), se define el conjunto de los polinomios trigonométricos como:

$$\mathcal{A} := \left\{ \sum_{k=0}^N (a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx)) \mid a_k, b_k \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \right\}$$

que es una sub-álgebra totalmente separante.

Demostración. Sean $x, y \in [0, 2\pi]$. Entonces se verifica la siguiente propiedad sobre $\mathcal{A}$:

$$\sin(x) \neq \sin(y) \vee \cos(x) \neq \cos(y)$$

De lo que se tiene que $\mathcal{A}$ es separante. Para ver que es totalmente separante, sea $x_0 \in [0, 2\pi]$. Entonces se verifica que

$$\sin(x_0) \neq 0 \vee \cos(x_0) \neq 0$$

pues el seno y el coseno no se anulan simultáneamente. ■

La demostración del teorema de Stone-Weierstrass se basa en tres lemas auxiliares que se enunciarán a continuación:

Lema 16. Si $\mathcal{A}$ es una sub-álgebra de $C(K, \mathbb{R})$, entonces su adherencia también lo es.

Lema 17. Si $\mathcal{A}$ es una sub-álgebra de $C(K, \mathbb{R})$, y $f, g \in adh(\mathcal{A})$, entonces ambas $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ también lo están.

Lema 18. Sea $\mathcal{A}$ es una sub-álgebra de $C(K, \mathbb{R})$. Si $f \in C(K, \mathbb{R})$ puede ser aproximada en todo par de puntos diferentes $p, q \in K$ por elementos de $adh(\mathcal{A})$, entonces $f \in adh(\mathcal{A})$. ($C(K, \mathbb{R}) \subseteq adh(\mathcal{A})$).

Proposición 131. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Se define:

$$m_n(f) := \int_a^b x^n f(x) dx, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Pruebe que si $m_n(f) = 0$ para todo n , entonces $f \equiv 0$.

Demostración. Como $m_n(f) = \int_a^b f(x) dx = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, dado cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ se tiene que:

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n)f(x)dx = 0$$

Ahora, como f es continua sobre un compacto, existe $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq M \text{ para } x \in [a, b]$$

Luego, por el Teorema de Stone-Weierstrass (en particular, dado que los polinomios son densos en $C([a, b], \mathbb{R})$), para todo $\varepsilon > 0$, existe un polinomio q tal que:

$$|f(x) - q(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in [a, b]$$

Además, se tiene que $\int_a^b q(x)f(x)dx = 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b [f^2(x) - f(x)q(x)]dx \\ &= \int_a^b f(x)[f(x) - q(x)]dx \\ &= \left| \int_a^b f(x)[f(x) - q(x)]dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)||f(x) - q(x)|dx \\ &\leq M\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$



12.2. Teorema de Arzela-Ascoli

El teorema de Arzela-Ascoli nos permite caracterizar los subconjuntos de $C(X, Y)$ que son (relativamente) compactos con la topología uniforme. Antes de enunciar el teorema, se necesita de un par de definiciones previas.

Definición 131 (Relativamente compacto). Un conjunto se dice relativamente compacto si su adherencia es compacto.

Ejemplo.

1. Como $\text{Adh}(B(0, 1))$ es compacto, entonces $B(0, 1)$ en $\mathbb{R}^d$ es relativamente compacto.
2. En $\mathbb{R}$, todo conjunto acotado es relativamente compacto. (equivale al teorema de Weierstrass de visto en cálculo de primer año, toda sucesión acotada posee subsucesión convergente).

Comentario. En dimensión infinita, es complicado saber los conjuntos compactos (estaremos hasta el final del curso dándole vueltas al problema).

Definición 132 (Funciones equicontinuas entre dos espacios). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico e (Y, d) un espacio métrico. Un subconjunto $\mathcal{E} \subseteq C(X, Y)$ se dice equicontinuo si para cualquier $x_0 \in X$, y para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $V \in \mathcal{N}_{x_0}$ tal que para toda $f \in \mathcal{E}$, y para todo $x \in V$, $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

El Teorema de Arzela-Ascoli es un resultado fundamental del análisis dando condiciones necesarias y suficientes para decidir si cada secuencia de una determinada familia de funciones reales continuas definida en un intervalo cerrado y acotado tiene una subsecuencia uniformemente convergente. La condición principal es la equicontinuidad de la familia de funciones. El teorema es la base de muchas pruebas en las matemáticas, incluyendo la del teorema de existencia de Peano en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, el teorema de Montel en análisis complejo, y el teorema de Peter-Weyl en el análisis de Fourier.

Teorema 52 (Arzela-Ascoli). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto, e (Y, d) un espacio métrico completo. Un subconjunto $\mathcal{E} \subseteq C(X, Y)$ es relativamente compacto ssi:

1. Es equicontinuo.
2. Para todo $x \in X$, $\mathcal{E}(x) := \{f(x) | f \in \mathcal{E}\}$ es relativamente compacta en Y

Observación. Recuerde que el espacio de funciones continuas $C(A, B) \subseteq B^A$, luego $B(a)$ sería la coordenada a -ésima en el espacio producto, esto quiere decir que en (2) el conjunto $\mathcal{E}(x) \subseteq Y$, teniendo que $\text{Adh}(\mathcal{E}(x))$ es compacto en Y .

Observación. $C(X, Y)$ es un espacio métrico completo con

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Observación. Usualmente se habla que la inyección $i : C^1([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R})$ dada por $i(f) = f$ es compacta.

12.2.1. Espacio de las funciones de Hölder y la bola unitaria compacta

A continuación se estudiará una consecuencia del Teorema de Arzela-Ascoli:

Definición 133 (Funciones de Hölder). Se define el espacio de funciones Hölder continuas de exponente α como:

$$C^\alpha([0, 1]) := \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ función tal que } |f|_\alpha < \infty\}$$

donde

$$|f|_\alpha := \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Proposición 132. Se define $d_\alpha(f, g) := d_\infty(f, g) + |f - g|_\alpha$, luego d_α es una métrica en $C^\alpha([0, 1])$.

Demostración.

- A continuación se verá que $d_\alpha(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$:

($\Rightarrow$) Sea $d_\alpha(f, g) = 0$, luego por definición de d_α , esto implica que:

$$d_\infty(f, g) = 0 \wedge |f - g|_\alpha = 0$$

Como d_∞ es una métrica, se tiene que $f = g$.

($\Leftarrow$) Suponiendo que $f = g$, luego:

$$\begin{aligned} |f - g|_\alpha &= \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|(f(x) - g(x)) - (f(y) - g(y))|}{|x - y|} \\ &= \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(x) - f(y) + f(y)|}{|x - y|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Es directo ver que $d_\alpha(f, g) = d_\alpha(g, f)$.
- A continuación $d_\alpha(f, g) \leq d_\alpha(f, h) + d_\alpha(h, g)$: En efecto, como d_∞ es métrica, satisface la desigualdad triangular, se tiene que:

$$d_\alpha(f, g) = d_\infty(f, g) + |f - g|_\alpha \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) + |f - g|_\alpha$$

Ahora, para analizar $|f - g|_\alpha$, sumando y restando los términos $h(x)$ y $h(y)$, entonces:

$$\begin{aligned} d_\alpha(f, g) &\leq d_\infty(f, g) + d_\infty(h, g) + \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|(f(x) - g(x)) - (f(y) - g(y))|}{|x - y|} \\ &= d_\infty(f, g) + d_\infty(h, g) \\ &\quad + \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|(f(x) - g(x)) - (f(y) - h(y)) + (h(x) - g(x)) - (h(y) - g(y))|}{|x - y|} \\ &\leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) \\ &\quad + \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ x \neq y}} \left(\frac{|(f(x) - g(x)) - (f(y) - h(y))|}{|x - y|} + \frac{|(h(x) - g(x)) - (h(y) - g(y))|}{|x - y|} \right) \\ &\leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g) + |f - h|_\alpha + |h - g|_\alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d_\alpha(f, g) \leq d_\alpha(f, h) + d_\alpha(h, g)$.

■

Proposición 133. El espacio $(C^\alpha([0, 1]), d_\alpha)$ es completo.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(C^\alpha([0, 1]), d_\alpha)$. Entonces, se verifica que

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq , si } n, m \geq n_0 \text{ entonces } d_\alpha(f_n, f_m) < \varepsilon \quad (12.1)$$

Pero $d_\infty(f_n, f_m) \leq d_\alpha(f_n, f_m)$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces ser sucesión de Cauchy implica que:

$$\forall \varepsilon, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq , si } n, m \geq n_0 \text{ entonces } d_\infty(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de d_∞ -Cauchy. Como $(C^\alpha([0, 1]), d_\alpha)$ es completo, tenemos que existe $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, i.e.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ tq , si } n > n_1 \Rightarrow d_\infty(f_n, f) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12.2)$$

A continuación habrá que probar que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f \in C^\alpha([0, 1])$ mediante d_α , para ello, se necesitan dos cosas:

1. Por demostrar que $d_\alpha(f_n, f) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$: Fijando $\varepsilon > 0$ y tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$, $x, y \in [0, 1]$ arbitrarios. Luego de la ecuación 12.1 se tendrá que:

$$\frac{|f_n(x) - f_n(y) - (f_m(x) - f_m(y))|}{|x - y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq N \quad (12.3)$$

Ahora, notando que la ecuación 12.2 implica que $f_n \rightarrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$ puntualmente. Entonces:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) - f_m(y) = f(x) - f(y)$$

Así, volviendo a 12.3, al tomar el límite y usando que el valor absoluto es continuo se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{|f_n(x) - f_n(y) - (f(x) - f(y))|}{|x - y|^\alpha} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y) - (f_m(x) - f_m(y))|}{|x - y|^\alpha} \\ &< \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n, m \geq N \end{aligned} \quad (12.4)$$

Finalmente, tomando supremo:

$$|f - f_n|_\alpha = \sup_{\substack{0 \leq x < y \leq 1 \\ x \neq y}} \frac{|f_n(x) - f_n(y) - (f(x) - f(y))|}{|x - y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12.5)$$

Finalmente de 12.5 y 12.2, se concluye que:

$$d_\alpha(f, f_n) = d_\infty(f, f_n) + |f - f_n|_\alpha < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

2. A continuación se verá que $f \in C^\alpha([0, 1])$: Es necesario verificar que $|f|_\alpha < \infty$. Por desigualdad triangular inversa en 12.4, para $\varepsilon > 0$ fijo, $x, y \in [0, 1]$ arbitrarios, $n \geq N = \max\{n_0, n_1\}$,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} - \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{|f_n(x) - f_n(y) - (f(x) - f(y))|}{|x - y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N$$

Luego por 12.1, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, si $m, n \geq n_0$, entonces:

$$\begin{aligned} ||f_n|_\alpha - |f_m|_\alpha| &\leq |f_n - f_m|_\alpha < \varepsilon \\ \Rightarrow \{|f_n|_\alpha\}_{n \in \mathbb{N}} &\text{ es de Cauchy en } \mathbb{R} \\ \Rightarrow \{|f_n|_\alpha\}_{n \in \mathbb{N}} &\text{ es convergente en } \mathbb{R} \\ \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } |f_n|_\alpha &\leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq \frac{\varepsilon}{2} + M, \quad \forall n \geq N$$

Finalmente tomando supremo se concluye que $|f|_\alpha < \infty$.

■

Proposición 134. La bola unitaria cerrada:

$$\overline{B}_\alpha := \{f \in C^\alpha([0, 1]) | d_\alpha(f, 0) \leq 1\}$$

es un conjunto compacto en $C([0, 1])$ con la métrica d_∞ .

Demostración. Se utilizará Arzela-Ascoli para demostrar que $\overline{B}_\alpha$ es relativamente compacto, en este caso se considera $(X, \mathcal{T}_d) = ([0, 1], \mathcal{T})$ es compacto y $(Y, d) = (\mathbb{R}, d)$ es completo. ■

Capítulo 13

Espacios vectoriales y operadores lineales

13.1. Espacios vectoriales topológicos

Definición 134 (Espacio vectorial topológico). Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o bien $\mathbb{C}$. Un espacio vectorial $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ se dice espacio vectorial topológico (evt) si E está dotado de una topología $\mathcal{T}$ que hace continuas las funciones suma y ponderación por escalar de E :

$$\begin{aligned} + : (E \times E, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}) &\rightarrow (E, \mathcal{T}) \text{ según } (x, y) \mapsto x + y \\ \cdot : (\mathbb{K} \times E, \mathcal{T}_{\mathbb{K}} \otimes \mathcal{T}) &\rightarrow (E, \mathcal{T}) \text{ según } (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{aligned}$$

Ejemplo.

1. El conjunto $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre él mismo y dotado de la topología canónica es un espacio vectorial topológico. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{R}$ y V una vecindad de $x + y$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x + y, \varepsilon) \subseteq V$, pero existen $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ tales que

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) + B\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B(x + y, \varepsilon)$$

lo que prueba la continuidad de la suma. La ponderación escalar queda propuesta.

2. Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces es evt. En efecto, como E es espacio métrico y satisface PAN, es posible utilizar sucesiones.

Sean $x_n \rightarrow x$ e $y_n \rightarrow y$ con la norma de E . Entonces, por desigualdad triangular:

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

Lo que prueba que $+$ es continua. Queda propuesto probar la ponderación por escalar que es análoga.

Hay que recordar que se denota la traslación y suma de conjuntos como:

$$\begin{aligned}x + A &:= \{x + a \mid a \in A\} \\ A + B &:= \{a + b \mid a \in A \wedge b \in B\}\end{aligned}$$

Definición 135 (Traslación y multiplicación). Sea E un evt. A cada $y \in e$ y cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo se definen los operadores:

1. Traslación: $T_y(x) = y + x$.
2. Multiplicación: $M_\lambda(x) = \lambda x$

Para $x \in E$.

Proposición 135. T_y y M_λ son homeomorfismos de E sobre E .

Demostración. Debido a la definición de espacio vectorial topológicos, se tiene que T_y y M_λ son aplicaciones biyectivas de E sobre E , luego sus inversas son T_y^{-1} y M_λ^{-1} respectivamente. Por la hipótesis de continuidad necesaria para los evts se concluye la continuidad de las cuatro funciones, concluyendo que son homeomorfismos. ■

Una consecuencia de esta proposición es que toda topología vectorial $\mathcal{T}$ es invariante por traslaciones, osea $A \in \mathcal{T}$ es abierto, si y sólo si, para cada $x \in X$, $x + A$ es abierto, por lo tanto $\mathcal{T}$ queda completamente determinada por una base de vecindades (local).

Según lo anterior, cuando se hable de una base local en un espacio vectorial topológico, significará siempre una base local en 0, donde una base local de 0 corresponde a una colección β_0 de entornos de 0 tales que cada entorno de 0 contiene un elemento de la base $\mathcal{B}$ de la topología.

Ejercicio 16. Pruebe que:

1. Si E es un evt, entonces E_0 también es un evt con la topología traza asociada.
2. El producto topológico de evts (sobre el mismo cuerpo) es evt con la topología producto asociada.

13.1.1. Vecindades del 0

A continuación se verá que es posible caracterizar cualquier colección de vecindades gracias al operador traslación y las vecindades del 0, aprovechando en toda su magnitud la noción de base de vecindades.

Proposición 136. Para cualquier $x \in E$ un evt, $\mathcal{N}_x = x + \mathcal{N}_0$

Demostración. Realizando doble inclusión.

1. Para ver que $\mathcal{N}_x \subseteq x + \mathcal{N}_0$:

Sea $T_x : E \rightarrow E$ dada por $T_x(y) := x + y$, para $y \in E$. Note que T_x es una función continua. Sea $V \in \mathcal{N}_x$, como $x = T_x(0)$, $V_0 := T_x^{-1}(V)$ es vecindad del cero, luego

$$\begin{aligned} x + V_0 &= \{x + z \mid z \in V_0\} \\ &= \{x + z \mid x + z)T_x(z) \in V\} \\ &= V \end{aligned}$$

Lo que prueba la primera inclusión.

2. Ver que $\mathcal{N}_x \supseteq x + \mathcal{N}_0$ queda propuesto. ■

Proposición 137.

1. Sea $V \in \mathcal{N}_0$, si $V \subseteq U$, entonces $U \in \mathcal{N}_0$.
2. Sea $\{V_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{N}_0$, entonces $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{N}_0$.
3. Sea $V \in \mathcal{N}_x$, luego para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo, $\lambda V \in \mathcal{N}_0$.
4. Para toda $V \in \mathcal{N}_0$, existe $W \in \mathcal{N}_0$ tal que $W + W \subseteq V$ (continuidad de la suma en $(0, 0)$).

Demostración.

1. Es directo, pues $0 \in V \subseteq U$, teniendo que $U \in \mathcal{N}_0$.
2. Sea $\{V_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{N}_x$, luego para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ $0 \in V_i$, entonces $0 \in \bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{N}_0$.
3. Como $0 \in V$, luego se verifica que $0 \in \lambda V = \{\lambda x \mid x \in V\}$ considerando $x = 0$.
4. Propuesto. ■

Tipos de espacios vectoriales topológicos: Sea E un evt dotado de la topología $\mathcal{T}$, de lo estudiado en partes anteriores del curso se identifican las siguientes nociones:

1. E es localmente convexo si existe una base local β_0 cuyos elementos son convexos.
2. E es localmente acotado si 0 tiene una vecindad acotada.
3. E es localmente compacto si 0 tiene un entorno cuya adherencia es compacta.
4. E es metrizable si $\mathcal{T}$ es compatible con alguna métrica d .
5. E es normable si existe una norma sobre E tal que la métrica inducida por esta norma es compatible con $\mathcal{T}$.
6. E tiene la propiedad de Heine-Borel-Lebesgue si todo subconjunto cerrado y acotado de E es compacto.

13.1.2. Propiedades de separación

Teorema 53. Sea K y C dos subconjuntos de E que es evt, tal que K es compacto y C es cerrado con $K \cap C \neq \emptyset$. Entonces 0 tiene un entorno V tal que

$$(K + V) \cap (C + V) = \emptyset$$

Observación. Note que $K + V$ es la unión de los conjuntos trasladados $x + V$ de V tal que $x \in K$. Entonces $K + V$ es un abierto que contiene a K . Por lo tanto esta proposición implica la existencia de conjuntos abiertos disjuntos que contienen a K y C , respectivamente.

Corolario 53.1. Si β es una base local para un evt E , entonces cada elemento de β contiene a la adherencia de algún elemento de β .

Corolario 53.2. Todo evt es espacio de Hausdorff (T_2).

Demostración. Como para cada punto $x \in E$, $\{x\}$ es cerrado, basta con tomar un par $\{x\}, \{y\}$ en vez de K, C . La conclusión es que estos puntos poseen entornos disjuntos, verificando el Axioma T_2 . ■

Comentario. Hay autores que en la definición de evt agregan la condición de que para todo $x \in E$, $\{x\}$ sea cerrado, lo que equivale a ser espacio de Hausdorff (T_2), no obstante hasta antes de enunciada la proposición no se ha supuesto cierto que un evt sea Hausdorff.

En el caso en que no se haya definido que $\{0\}$ sea necesariamente cerrado en un evt, es posible probar utilizando topología la siguiente equivalencia:

13.1.3. Conjuntos

Sea E un evt, se define:

Definición 136 (Equilibrado). $A \subseteq E$ se dice equilibrado si para todo λ tal que $|\lambda| \leq \varepsilon$, $\lambda A \subseteq A$.

Definición 137 (Absorbente). $A \subseteq E$ se dice absorbente si para todo $x \in E$ existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que $\lambda x \in A$, para todo $\lambda \in (0, \varepsilon)$.

Definición 138 (Simétrico). $A \subseteq E$ se dice simétrico si para todo $x \in A$ se tiene que $-x \in A$.

Definición 139 (Estrellado). $A \subseteq E$ se dice estrellado si para todo $x \in A$, entonces $[0, 1]x \in A$.

Definición 140 (Convexo). $A \subseteq E$ se dice convexo si para todos $x, y \in A$, entonces $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Ejemplo.

1. Las bolas $B(0, r)$ en un evn son equilibradas y absorbentes.
2. $(-1, 2)$ en $\mathbb{R}$ no es equilibrado, puesto que $-1 \cdot (-1, 2) = (-2, 1)$ no está incluido en $(-1, 2)$.
3. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ no es absorbente en $\mathbb{R}$.

Proposición 138. Sea A un subconjunto equilibrado de E un evt. Entonces $\text{Adh}(A)$ y $\text{Int}(A)$ son equilibrados.

Vecindades del 0: Retomando las vecindades del cero, es posible verificar el siguiente teorema:

Teorema 54 (Entornos del 0). En E un evt:

1. Para todo $V \in \mathcal{N}_0$, V es absorbente.
2. Todo $V \in \mathcal{N}_0$ convexo contiene un entorno de 0 convexo y equilibrado.
3. Para todo $V \in \mathcal{N}_0$, V contiene un entorno equilibrado de 0.

Corolario 54.1 (Base de entornos del 0).

1. Todo evt tiene una base local equilibrada.
2. Todo evt localmente convexo tiene una base local convexa y equilibrada.

Convexidad:**Proposición 139.** En E evt se cumple lo siguiente:

1. Sean C_1, C_2 conjuntos convexos, entonces $C_1 + C_2$ es convexo.
2. Sea C convexo y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces λC es convexo.
3. Sea C convexo ssi $\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$.
4. Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección de conjuntos convexos, luego $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ es convexo.
5. Sea C convexo tal que $0 \in C$, entonces C es equilibrado.

Proposición 140. Sea A un subconjunto convexo de E un evt. Entonces $Adh(A)$ y $Int(A)$ son convexos.**Adherencia:****Proposición 141** (Propiedades de la adherencia). Sea E un evt, luego

1. Si $A \subseteq E$, entonces $Adh(A) = \bigcap_{V \in \mathcal{N}_0} (A + V)$ (V es entorno de 0).
2. Si $A \subseteq E$, y $B \subseteq E$, entonces $Adh(A) + Adh(B) \subseteq Adh(A + B)$.
3. Si $E_0 \subseteq E$ es subespacio vectorial de E , entonces $Adh(E_0)$ también es subespacio vectorial de E .

13.1.4. Metrizabilidad y normabilidad

Hay que recordar que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice metrizable si existe una métrica d sobre X compatible con la topología $\mathcal{T}$. A continuación se estudiarán las condiciones para que un evt sea metrizable.

Definición 141 (Invariante por traslación). Una distancia d en E evt se dice invariante por traslación si

$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

para todo $x, y, z \in E$.

Observación. Hay que tener cuidado, pues si d es invariante por traslación, no existe necesariamente una norma que lo defina.

Teorema 55 (Metrizabilidad). Sea E un evt, se dice que es metrizable ssi 0 posee una base local numerable.

Proposición 142. Sea E un espacio vectorial topológico con una base local numerable, entonces existe una métrica d tal que:

1. La métrica d es compatible con la topología de E .
2. Las bolas abiertas centradas en 0 son equilibradas.
3. La métrica d es invariante para traslaciones.

Si además, E es localmente convexo, entonces se puede elegir d verificando lo anterior y además:

4. Todas las bolas abiertas son convexas.

Proposición 143. Si d_1, d_2 son métricas invariantes sobre un espacio vectorial E que inducen la misma topología sobre E , entonces:

1. d_1 y d_2 tienen las mismas sucesiones de Cauchy.
2. d_1 es completa ssi d_2 es completa.

Proposición 144.

1. Si d es una métrica invariante por traslaciones sobre un espacio vectorial E , entonces $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$, para todo $x \in E$ y $n \in \mathbb{N}$.
2. *Nula por acotada:* Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio vectorial topológico metrizable E y $x_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces existen escalares positivos λ_n tales que $\lambda_n \rightarrow \infty$ y $\lambda_n x_n \rightarrow 0$.

Teorema 56 (Normabilidad). Sea E un ev de dimensión finita sobre algún cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces existe una única topología $\mathcal{T}_{\|\cdot\|_E}$ (llamada topología canónica) que hace que E sea evt Hausdorff y normado.

Corolario 56.1. En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes (es decir que existen $c_1, c_2 > 0$ tales que para todo $v \in E$, $c_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq c_2\|v\|_a$ o sino la inclusión correspondiente de bolas).

Observación. En dimensión infinita siempre existen normas no equivalentes, basta con tomar $\{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ base de Hamel de E y considerar, para $v := \sum_\lambda a_\lambda e_\lambda$, las normas:

$$\|v\|_1 := \sum_\lambda |a_\lambda|$$

$$\|v\|_\infty := \sup_\lambda |a_\lambda|$$

13.1.5. Espacios de dimensión finita

Entre los espacios de Banach más sencillos, se encuentran $\mathbb{R}^d$ y $\mathbb{C}^d$, espacios vectoriales de dimensión d sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente, normados por medio de la métrica euclídea usual. Si E es un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{C}$, y la dimensión de E es d , entonces cada base de E induce un isomorfismo de E sobre $\mathbb{C}$, más adelante se verá que dicho isomorfismo resultará ser un homeomorfismo. Con otras palabras, esto dice que la topología de $\mathbb{C}$ es la única topología vectorial que puede tener un espacio vectorial topológico complejo de dimensión d .

Proposición 145. Sea $F \subseteq E$ un subespacio vectorial topológico de E , suponiendo que F es localmente compacto en la topología traza E . Entonces F es un subespacio cerrado de E .

Proposición 146. Sea E un espacio vectorial topológico complejo y F un subespacio de E . Sea d un entero positivo y $\dim(F) = d$, entonces:

1. Todo isomorfismo de $\mathbb{C}^d$ sobre F es un homeomorfismo¹.
2. F es cerrado.

A continuación se presenta un teorema muy importante en el análisis funcional, para ello hay que recordar que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice localmente compacto si todo punto $x \in X$ posee una vecindad compacta. En un evt, basta que 0 posea una vecindad compacta para que el espacio sea localmente compacto.

Teorema 57 (F.Riesz). Si E es un evt Hausdorff, entonces E es localmente compacto ssi es de dimensión finita.

Corolario 57.1. Si E es un evt localmente acotado con la propiedad de Heine-Borel, entonces E tiene dimensión finita.

Demostración. Sea E un evt, su origen tiene un entorno acotado V . Luego $\text{Adh}(V)$ también es acotado, entonces $\text{Adh}(V)$ es compacto por el teorema de Heine-Borel. Lo que dice que E es localmente compacto, luego tiene dimensión finita. ■

¹Homeomorfismo respecto a la topología euclídea de $\mathbb{C}$.

13.2. Operadores lineales

Definición 142 (Operadores lineales). Sean E, F evts y $L : E \rightarrow F$ lineal (es decir, verifica $L(x + \lambda Y) = Lx + \lambda Ly$, para todo $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$). A L se le denomina operador lineal.

Notación. Son equivalentes Lx y $L(x)$.

Ejemplo.

1. El operador $M_\lambda : E \rightarrow E$ (ponderación por escalar) es un operador lineal, mientras que el operador $T_x : E \rightarrow ($ traslación) no es lineal.
2. $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma del supremo, $F = \mathbb{R}$ y $Lx = x(1/2)$, para $x \in E$.
3. $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ y $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ con sus respectivas normas supremo, entonces $Lx = x'$ es lineal.

Proposición 147. Sea E un evt y $A \subseteq E$.

1. $L(0) = 0$.
2. Si A es un subespacio (o un conjunto convexo, o un conjunto equilibrado), también lo es $L(A)$,
3. Si A es un subespacio (o un conjunto convexo, o un conjunto equilibrado), también lo es $L^{-1}(A)$.
4. En particular, el conjunto $L^{-1}(\{0\}) = \{x \in A \mid Lx = 0\} =: \mathcal{N}(A)$ es un subespacio de E .

Es de interés poder caracterizar la continuidad de los operadores lineales, para ello se puede aprovechar la ventaja que otorgan los evts y las propiedades de las vecindades del 0.

13.2.1. Operadores lineales continuos

Proposición 148 (Continuidad). Sea $L : E \rightarrow F$ un operador lineal. L es continua en E evt ssi es continua en 0.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Es directo.
2. ($\Leftarrow$) Sea una red $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $x_\lambda \rightarrow x$ en E , luego como E es un evt se cumple que $(x_\lambda - x) \rightarrow 0$. Como L es continua en cero, entonces:

$$L(x_\lambda - x) \rightarrow L(0) = 0, \text{ es decir } Lx_\lambda \rightarrow Lx$$

■

Proposición 149 (Continuidad uniforme). L es uniformemente continua en el siguiente sentido: Para cada entorno W de 0 en F existe un entorno V de 0 en E tal que

$$y - x \in V \Rightarrow Ly - Lx \in W$$

Proposición 150. Sean E, F evts y $L : E \rightarrow F$ un operador lineal tal que para algún $x \in E$, $Lx \neq \emptyset$. Son equivalentes:

1. L es continua en E .
2. El núcleo $\mathcal{N}(L)$ es cerrado.
3. $\mathcal{N}(L)$ no es denso en E .
4. L es acotada en algún entorno $V \in \mathcal{N}_0$.

Mientras que para espacios vectoriales normados se tiene la siguiente caracterización para la continuidad:

Proposición 151 (Continuidad Lipschitz). Sean E, F evn $L : E \rightarrow F$ lineal es continua ssi existe $K > 0$ tal que $\|Lx\|_F \leq K\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

Demostración. Basta probar que L es continua en el 0 ssi existe $K > 0$ tal que $\|Lx\|_F \leq K\|x\|_E$, para todo $x \in E$.

1. ($\Rightarrow$) Suponiendo que L es continua en 0, sea $B_F(0, 1) \in \mathcal{N}_0(\mathcal{T}_{\|\cdot\|})$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $L(\overline{B}_E(0, \varepsilon)) \subseteq B_F(0, 1)$. Luego, si $x \in E$, $x \neq 0$, $\varepsilon \frac{x}{\|x\|} \in \overline{B}_E(0, \varepsilon)$, de donde $L\left(\varepsilon \frac{x}{\|x\|}\right) \in B_F(0, 1)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left\| L\left(\varepsilon \frac{x}{\|x\|}\right) \right\|_F &= \frac{\varepsilon}{\|x\|} \|Lx\|_F \leq 1 \\ \Rightarrow \varepsilon \|Lx\|_F &\leq \|x\| \end{aligned}$$

Lo que prueba el resultado considerando $K = \frac{1}{\varepsilon}$. El caso $x = 0$ es directo.

2. ($\Leftarrow$) Si $x_\lambda \rightarrow 0$, entonces $\|x_\lambda\| \rightarrow 0$ y por hipótesis, $\|Lx_\lambda\| \rightarrow 0$, lo que implica que $Lx_\lambda \rightarrow 0$.

■

Muchas veces no se conoce la constante K optimal, la más pequeña tal que $\|Lx\|_F \leq K\|x\|_E$, para todo $x \in E$. A continuación se le otorga un nombre a $K_{\min}$.

Definición 143 (Ínfimo). Denotamos por $\|L\|$ al ínfimo de todos los $K \in \mathbb{R}$ tales que se satisface, es decir

$$\|L\| := \|L\|_{E,F} := \inf \{k \in \mathbb{R} \mid \|Lx\|_F \leq k\|x\|_E, \forall x \in E\}$$

Observación. Se cumple que:

$$\|Lx\|_F \leq \|L\|_{C(E,F)} \cdot \|x\|_E$$

Hay otra forma posible para expresar $\|L\|$, puesto que sin pérdida de generalidad se pueden considerar los vectores x tales que $\|x\|_E \leq 1$, luego si se aumenta $\|Lx\|_F$ se alcanza $\|L\|$, ésto queda propuesto como ejercicio.

Ejercicio 17. Mostrar que $\|L\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|Lx\|_F = \sup_{\|x\|_E = 1} \|Lx\|_F$.

Proposición 152 (Caracterizaciones de continuidad de L). Si E, F son evn, y $L : E \rightarrow F$ es lineal, son equivalentes los siguientes enunciados:

1. L es continua (basta que lo sea en 0).
2. $\|L\| < \infty$ (L es un operador acotado).
3. L es acotada sobre $\overline{B}_E(0, 1)$.
4. L transforma acotado en acotado.

Definición 144 (Conjunto de operadores lineales continuos). Sean E, V evn, luego se define:

$$\mathcal{LC}(E, F) := \{L : E \rightarrow F \mid L \text{ es lineal continua}\}$$

Teorema 58. Sean E, V evn, entonces $(\mathcal{LC}(E, F), \|\cdot\|_{E,F})$ es evn, y si F además es espacio de Banach, entonces $\mathcal{LC}(E, F)$ también lo es.

Demostración. Suponiendo que $\|\cdot\|_{E,F}$ es una norma (propuesto verificar), es posible probar que $(\mathcal{LC}(E, F), \|\cdot\|_{E,F})$ es un espacio de Banach si F lo es.

Sea (L_n) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{LC}(E, F)$ m note que si $x \in E$, entonces:

$$\|L_n x - L_m x\|_F = \|(L_n - L_m)x\|_F \leq \|L_n - L_m\|_{E,F} \|x\|_F$$

Entonces, para cada $x \in E$, $(L_n x)$ es una sucesión de Cauchy en F , donde como F es un espacio de Banach, y por lo tanto converge. Sea L dada por $Lx := \lim_{n \rightarrow \infty} L_n x \in F$. Luego hay que probar que:

1. L es lineal.
2. L es continua.
3. $\|L_n - L\| \rightarrow 0$.

La linealidad queda propuesta. Para $n, m \geq n_0$ lo suficientemente grandes, $\|L_n - L_m\|_{E,F} < \varepsilon$. Luego, si $x \in E$:

$$\|(L_n - L_m)x\|_F \leq \|L_n - L_m\|_{E,F} \|x\|_E < \varepsilon \|x\|_E$$

Luego pasas al límite en m :

$$\|(L - L_n)x\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$$

Lo anterior prueba que $L_n - L$ es continua, pero como L_n es continua, se tiene que L también lo es. Además, como $\|L_n - L\|_{E,F} < \varepsilon$, lo que prueba la convergencia. ■

Definición 145 (Espacio dual). Sean E evt con E ev sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se denotará por $E^* := \mathcal{LC}(E, \mathbb{K})$ al espacio dual de E . Los elementos ℓ de E^* se llaman funcionales lineales continuos.

Corolario 58.1. Si E es un evn, entonces E^* es espacio de Banach para la norma $\|\ell\|_* := \sup_{\|x\|_E \leq 1} |\ell(x)|$.

Comentario. Note que la norma dada por $\sup_{\|x\|_E \leq 1} |\ell(x)|$, posee valor absoluto porque el espacio de llegada es un cuerpo.

Notación. Los elementos duales se denotarán por x^* , mientras que $x^*(x) \in \mathbb{K}$ se denotará por $\langle x^*, x \rangle$

Consecuencias en dimensión finita:

Ejercicio 18. Si E, F son evn, y $L : E \rightarrow F$ es lineal con $\dim(E) < \infty$, entonces L es continua. (Indicación: Basta con acotar L en una vecindad del 0).

Ejemplo.

1. Sea $E := \{p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} | p \text{ es polinomio}\}$, con la norma del supremo en $[0, 1]$ que lo hace evn. Sea $L : E \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $Lp := p(2)$, claramente es lineal.
2. Si $p_n := \frac{x^n}{2^n}$, tenemos $Lp_n = 1$, mientras que $\|p_n\|_\infty = 2^{-n}$, que converge a cero. Luego, L es discontinuo.

Definición 146 (Espacio de polinomios a valores reales). Se llama a $\mathbb{P}_n[x]$ al conjunto dado por:

$$\mathbb{P}_n[x] := \{p | p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es polinomio de grado } n\}$$

Proposición 153. El par $(\mathbb{P}_n[x], \mathbb{R})$ es un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ (finita).

Demostración. Basta con tomar $\{e_i\}_{i=0}^n = \{x^i\}_{i=0}^n$, debido a que cualquier polinomio $p(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ cumple que:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i e_i = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Se puede comprobar que $\{x^i\}_{i=0}^n$ es base del espacio $\mathbb{P}_n[x]$. Finalmente como $|\{x^i\}_{i=0}^n| = n + 1$, se concluye que $\dim(\mathbb{P}_n[x]) = n + 1$. ■

Proposición 154. Existe una constante K tal que

$$|p'(0)| \leq K \int_1^2 |p(t)| dt$$

para todo polinomio de grado menor o igual a n .

Demostración. Sea $\|p\| = \int_1^2 |p(t)| dt$ una norma (puede verificarlo). Se define el operador $D : \mathbb{P}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $Dp = p'(0)$. Luego D es continuo, teniendo que:

$$\begin{aligned} \|Dp\|_{\mathbb{R}} &\leq K \|p\|_{\mathbb{P}_n[x]}, \text{ reemplazando} \\ \Rightarrow |p'(0)| &\leq K \int_1^2 |p(t)| dt \end{aligned}$$

Teniendo la existencia de la constante K . ■

Ejercicio 19. Verifique que existe una constante K tal que

$$|p'(0)| \leq K \int_a^b |p(t)| dt, \quad 0 \leq a < b$$

para todo polinomio de grado menor o igual a n .

13.2.2. Dos ejemplos de operadores lineales continuos

Operador pendiente en el origen:

Definición 147 (Espacio de polinomios a valores reales). Se llama a $\mathbb{P}_n[x]$ con $n \in \mathbb{N}$ al conjunto dado por:

$$\mathbb{P}_n[x] := \{p | p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ es polinomio de grado } n\}$$

Proposición 155. El $\mathbb{P}_n[x]$ es un espacio vectorial de dimensión $n + 1$ (finita).

Demostración. Es fácil ver que $\mathbb{P}_n[x]$ es un espacio vectorial (esto se estudió en álgebra lineal). El conjunto $\{x^i\}_{i=0}^n$ verifica que para todo $p(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ cumple que:

$$\exists \{a_i\}_{i=0}^n \text{ tq } p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

lo que quiere decir que es un generador de $\mathbb{P}_n[x]$. Además $\{x^i\}_{i=0}^n$ es un conjunto linealmente independiente ya que

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \{0, \dots, n\} \in \mathbb{R}, a_i = 0$$

concluyendo que $\{x^i\}_{i=0}^n$ es base de $\mathbb{P}_n[x]$. Finalmente como $|\{x^i\}_{i=0}^n| = n+1$, se concluye que $\dim(\mathbb{P}_n[x]) = n+1 < \infty$. ■

Definición 148 (Operador pendiente en el origen). Se define el operador correspondiente a la derivada de un polinomio evaluada en el origen como:

$$\begin{aligned} D_0 : \mathbb{P}_n[x] &\rightarrow \mathbb{R} \\ p(x) &\mapsto D_0 p(x) := p'(0) \end{aligned}$$

Proposición 156. El operador D_0 es lineal y continuo.

Demostración. Para demostrar que D_0 es lineal basta con verificar lo siguiente:

1. Considerando $p(x) = 0$, luego $D_0 p(x) = p'(0) = 0$, concluyendo que $D_0(0) = 0$
2. Sean $p, q \in \mathbb{P}_n[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego:

$$\begin{aligned} D_0(\lambda p + q)(x) &= (\lambda p + q)'(0) \\ &= (\lambda p)'(0) + q'(0) \\ &= \lambda p'(0) + q'(0) \\ &= \lambda D_0 p(x) + D_0 q(x) \end{aligned}$$

De (1) y (2) se concluye la linealidad del operador D_0 . Para ver la continuidad de D_0 , basta con ver que envía acotados en acotados. Sea $p(x) \in \mathbb{P}_n[x]$ acotado, luego como:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i \\ \Rightarrow p'(x) &= \sum_{i=0}^n a_i i x^{i-1} = \sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1} \end{aligned}$$

luego $p'(0)$ es acotado. Se concluye que D_0 es un operador lineal continuo. ■

Proposición 157. Existe una constante K tal que

$$|p'(0)| \leq K \int_1^2 |p(t)| dt$$

para todo polinomio de grado menor o igual a n .

Demostración. Sea $\|p\| = \int_1^2 |p(t)|dt$ que verifica que:

1. Sea $p(x) = 0$, luego:

$$\begin{aligned}\|0\| &= \int_1^2 |0|dt \\ &= \int_1^2 0dt \\ &= c(2) - c(1), \text{ con } c \in \mathbb{R} \\ &= 0\end{aligned}$$

2. Sean $p, q \in \mathbb{P}_n[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego:

$$\begin{aligned}\|\lambda p + q\| &= \int_1^2 |\lambda p(t) + q(t)|dt \\ &\leq \int_1^2 |\lambda p(t)| + |q(t)|dt \\ &= \int_1^2 |\lambda| |p(t)| + |q(t)|dt \\ &= \int_1^2 |\lambda| |p(t)|dt + \int_1^2 |q(t)|dt \\ &= |\lambda| \int_1^2 |p(t)|dt + \int_1^2 |q(t)|dt \\ &= |\lambda| \|p\| + \|q\|\end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que $\|\cdot\|$ es una norma sobre $\mathbb{P}_n[x]$. Luego sea el operador $D_0 : \mathbb{P}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $D_0 p = p'(0)$. Luego como D_0 es continuo se tiene que:

$$\begin{aligned}\|D_0 p\|_{\mathbb{R}} &\leq K \|p\|_{\mathbb{P}_n[x]}, \text{ reemplazando} \\ \Rightarrow |p'(0)| &\leq K \int_1^2 |p(t)|dt\end{aligned}$$

Teniendo la existencia de la constante K . ■

Operador error de la integral de Riemann

Definición 149. Sea $\ell_n : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional dado por:

$$\ell_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 x(t)dt$$

Proposición 158.

1. ℓ_n es lineal continuo.
2. $\ell_n(x) \rightarrow 0$ para todo $x \in \mathcal{C}[0, 1]$.
3. $\|\ell_n\|_* \nrightarrow 0$.

Demostración.

1. Para ver que ℓ_n es lineal, sean $x, y \in \mathcal{C}[0, 1]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, luego utilizando la linealidad de la sumatoria y de la integral:

$$\begin{aligned}
 \ell_n(\lambda x + y) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\lambda x + y) \left(\frac{k}{n} \right) - \int_0^1 (\lambda x + y)(t) dt \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda x \left(\frac{k}{n} \right) + \sum_{k=1}^n y \left(\frac{k}{n} \right) - \int_0^1 \lambda x(t) dt - \int_0^1 y(t) dt \\
 &= \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x \left(\frac{k}{n} \right) - \lambda \int_0^1 x(t) dt + \sum_{k=1}^n y \left(\frac{k}{n} \right) - \int_0^1 y(t) dt \\
 &= \lambda \ell_n(x) + \ell_n(y)
 \end{aligned}$$

Mientras que para ver la continuidad, basta con notar que para todo $x \in \mathcal{C}[0, 1]$ se cumple que

$$\begin{aligned}
 |\ell_n(x)| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x \left(\frac{k}{n} \right) - \int_0^1 x(t) dt \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x \left(\frac{k}{n} \right) \right| - \left| \int_0^1 x(t) dt \right| \\
 &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|x\|_\infty \left(\frac{k}{n} \right) \right| - \left| \int_0^1 \|x\|_\infty(t) dt \right| \\
 &= 2\|x\|_\infty
 \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que existe $K > 0$ (en realidad $K = 2$ satisface) tal que $|\ell_n(x)| \leq K\|x\|_\infty$, concluyendo que ℓ_n es acotado y por lo tanto continuo.

2. Para ver que $\ell_n(x) \rightarrow 0$, hay que notar que como $x \in \mathcal{C}[0, 1]$ (es continua), entonces es Riemann-Integrable, por lo tanto la integral de x es bien definida, además que la suma corresponde a una suma de Riemann con partición equiespaciada del intervalo $[0, 1]$, cada elemento de la partición mide $\frac{1}{n}$, luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} x \rightarrow \int_0^1 x(t) dt$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 \ell_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x \left(\frac{k}{n} \right) - \int_0^1 x(t) dt, \text{ tomando } n \rightarrow \infty \\
 \Rightarrow \ell_n(x) &\rightarrow \int_0^1 x(t) dt - \int_0^1 x(t) dt = 0
 \end{aligned}$$

3. Finalmente para probar que $\|\ell_n\|_* \not\rightarrow 0$, hay que recordar que:

$$\|\ell_n\|_* = \sup_{\|x\|_\infty=1} |\ell_n(x)|$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, luego construyendo una función $x^{(n)}$ tal que sea 0 en las evaluaciones de la forma $\frac{k}{n}$ para $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, y que sea 1 en las evaluaciones de la forma $\frac{k}{2n}$ para $k \in \{1, 3, 6, \dots, 2n-1\}$, además entre cada par de estos puntos, osea entre $\frac{k}{n}$ y $\frac{2k+1}{n}$ haya una recta. Esta construcción para $x^{(n)}$ está bien definida y es continua, de hecho:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} x^{(n)} &= 0 \\ \|x^{(n)}\|_\infty &= 1 \\ \underbrace{\int_0^1 x(t) dt}_{n \text{ triángulos de base } 1/n \text{ y altura } 1} &= n \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego:

$$0 < \frac{1}{2} = |\ell_n(x^{(n)})| \leq \|\ell_n\|_*$$

■

13.2.3. Operadores compactos

Los operadores compactos son una clase no trivial y simple de operadores, que generaliza la noción de operadores entre espacios de dimensión finita, manteniendo un comportamiento similar por lo que son fáciles de analizar.

Definición 150 (Operadores compactos). Sean E, F evn y se denota como $\mathcal{L}\mathcal{K}(E, F)$ al conjunto de operadores $T : E \rightarrow F$ lineales y compactos ($T(A)$ es relativamente compacto en F para todo A acotado en E).

Proposición 159. $\mathcal{L}\mathcal{K}(E, F)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}\mathcal{C}(E, F)$.

Demostración.

1. Para ver que $\mathcal{L}\mathcal{K}(E, F) \subseteq \mathcal{L}\mathcal{C}(E, F)$, se considera algún operador $T \in \mathcal{L}\mathcal{K}(E, F)$. Razonando por contradicción, se supondrá que T no es acotado (esto quiere decir que no es continuo, pues son equivalentes), esto quiere decir que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ en la bola unitaria, osea $\|x_n\| \leq 1$ tal que $\|Tx_n\| \geq n$. Hay que notar que como $\|x_n\| \leq 1$, para todo $n \geq 1$, entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, mientras que como T es compacto y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado, entonces $\overline{T(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ es compacto y como T es lineal, esto

equivale a que $\overline{(Tx_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ es compacto.

Luego por la compacidad, existe una subsucesión $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(Tx_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es convergente, por lo tanto para algún $K > 0$ se tiene que $\|Tx_{n_i}\| \leq K$, contradicción.

Se tiene que T es acotado (equivalentemente continua), concluyendo finalmente que $T \in \mathcal{LC}(E, F)$, al ser T arbitrario en $\mathcal{LK}(E, F)$, entonces $\mathcal{LK}(E, F) \subseteq \mathcal{LC}(E, F)$.

2. Ahora se verá que $\mathcal{LK}(E, F)$ es espacio vectorial, para ello basta con ver la cerradura lineal para sus elementos. Sean $T, S \in \mathcal{LK}(E, F)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en E , luego como T es operador compacto, luego existe la subsucesión $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(Tx_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ es convergente en F . Por otro lado, como S es compacto se tiene que existe la subsucesión (sub-sub en realidad jeje) $(x_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(Sx_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ convergente en F .

Luego como T, S son operadores continuos, luego $(\lambda Tx_{n_{i_j}} + Sx_{n_{i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$ converge en F . Lo anterior implica que toda sucesión acotada en E posee una subsucesión tal que su imagen es convergente, concluyendo la compacidad de $\lambda T + S$

■

Proposición 160. Si F es un espacio de Banach entonces $\mathcal{LK}(E, F)$ es cerrado en $\mathcal{LC}(E, F)$.

Demostración. Considerando una sucesión de operadores $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{LK}(E, F)$ convergentes a $T \in \mathcal{LC}(E, F)$, esto es que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow T$, o bien $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Además como los operadores $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son compactos, la adherencia de la imagen de bola unitaria mediante T_n , osea $\overline{(T_n(B_E(0, 1)))}_{n \in \mathbb{N}}$ es compacta, lo que equivale que los conjuntos $(T_n(B_E(0, 1)))_{n \in \mathbb{N}}$ son completos y totalmente acotados.

De lo último se tendrá la existencia de la colección finita $(f_i)_{i \in I} \subseteq F$ (I finito) tal que

$$\begin{aligned} \overline{T_n(B_E(0, 1))} &\subseteq \bigsqcup_{i \in I} B_F(f_i(0), \varepsilon/2) \subseteq \bigsqcup_{i \in I} B_F(f_i(0), \varepsilon/2 + \|T_n - T\|) \\ \Rightarrow \overline{T(B_E(0, 1))} &\subseteq \bigsqcup_{i \in I} B_F(f_i(0), \varepsilon/2 + \varepsilon/2) = \bigsqcup_{i \in I} B_F(f_i(0), \varepsilon), \text{ cuando } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Luego note que $\overline{T(B_E(0, 1))}$ es totalmente acotado, y como además es cerrado (lo asegura la adherencia), entonces $\overline{T(B_E(0, 1))}$ es compacto, luego T es compacto. ■

Proposición 161. Si $T \in \mathcal{LC}(E, F)$ y $\dim T(E) < \infty$ entonces T es compacto.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{LC}(E, F)$, dado que T tiene rango finito, osea que $\dim T(E) < \infty$, entonces el espacio $Z := \text{Im}(T)$ es un espacio vectorial normado de dimensión finita. Además, para cualquier sucesión acotada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en E , la sucesión (Tx_n) está acotada en Z , por lo que según el teorema de Bolzano Weierstrass esta sucesión debe contener una subsucesión convergente. Por lo tanto, T es compacto $\blacksquare$

Proposición 162. Sea $T \in \mathcal{LK}(E, F)$ y $\lambda \neq 0$ entonces el espacio vectorial $E_\lambda := \{x \in E | Tx = \lambda x\}$ es de dimensión finita.

Observación. Note que $E_\lambda := \{x \in E | Tx = \lambda x\} = \text{Ker} = \{T - \lambda I\}$, donde I es la matriz de identidad.

Definición 151 (Operador de Fredholm). Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea el operador lineal continuo $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ definido por

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds$$

Definición 152. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Sea el operador lineal continuo $T : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ definido por

$$(Tx)(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds$$

Proposición 163. Si $k(t, s)$ es un polinomio entonces $\dim(T(\mathcal{C}[0, 1])) < \infty$.

Demostración. Como $k(s, t)$ es un polinomio es posible caracterizarlo como

$$k(t, s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} t^i s^j$$

Luego se tendrá que el operador es:

$$Tx(t) = \int_0^1 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} t^i s^j x(s) ds = \sum_i \underbrace{\left(\int_0^1 \sum_{j=0}^m a_{ij} s^j x(s) ds \right)}_{=b_i} t^i$$

Luego para todo $x \in \mathcal{C}[0, 1]$, $b_i(x) \in \mathbb{R}$ (integral definida), entonces $Tx(t)$ es un polinomio a coeficientes reales y de grado n , luego como la dimensión de estos elementos es $n + 1$ (cardinal de la base dada por $(t^i)_{i=0}^n$), luego $T(\mathcal{C}[0, 1]) \subseteq \mathbb{P}_n[t]$ (polinomios de grado n en función de t), concluyendo que $\dim(T(\mathcal{C}[0, 1]))$ es finita. $\blacksquare$

Proposición 164. Para toda función continua $k(t, s)$ el operador T es compacto.

Demostración. Basta con ver que para la bola unitaria $B(0, 1)$ en $\mathcal{C}[0, 1]$, luego $T(B(0, 1))$ es relativamente compacto.

1. Para ver que para todo $t \in [0, 1]$, $T(B(0, 1))(t)$ es relativamente compacto en $\mathbb{R}$, hay que notar que para todo $t \in [0, 1]$, se tiene que $\overline{T(B(0, 1))(t)} \subseteq \mathbb{R}$, lo que implica que $\overline{T(B(0, 1))(t)}$ es compacto ssi es cerrado y acotado. Es evidente que es cerrado.

Para cualquier $t \in [0, 1]$ y $f \in T(B(0, 1))$ se sabe que

$$f(t) = \int_0^1 k(t, s)x(s)ds, \|x\| < 1$$

Luego para $t \in [0, 1]$ cualquiera se tiene que:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in T(B(0, 1))} |f(t)| &= \sup_{\substack{x \in C[0, 1] \\ \|x\| \leq 1}} \left| \int_0^1 k(t, s)x(s)ds \right| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \int_0^1 |k(t, s)||x(s)|ds, \text{ usando } \|x\| \leq 1 \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \int_0^1 |k(t, s)|ds, \text{ no depende de } x \\ &= \int_0^1 |k(t, s)|ds \end{aligned}$$

Note que k es continua en $[0, 1]$ que es compacto, por lo tanto por el teorema de Weierstrass se concluye que k alcanza sus máximos y mínimos en dicho intervalo. teniendo así que

$$\sup_{f \in T(B(0, 1))} |f(t)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \int_0^1 |k(t, s)|ds < \infty, \forall t \in [0, 1]$$

Como se tiene que $\overline{T(B(0, 1))(t)}$ es compacto, entonces $T(B(0, 1))$ es relativamente compacto.

2. Para ver que $T(B(0, 1))$ es equicontinuo. Sea $r \in [0, 1]$, se cumple que:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(r)| &= \left| \int_0^1 k(t, s)x(s)ds - \int_0^1 k(r, s)x(s)ds \right| \\ &= \left| \int_0^1 (k(t, s) - k(r, s))x(s)ds \right| \\ &= \int_0^1 |k(t, s) - k(r, s)||x(s)|ds \\ &\leq \int_0^1 |k(t, s) - k(r, s)|\|x\|ds, \text{ como } \|x\| < 1 \\ &\leq \int_0^1 |k(t, s) - k(r, s)|ds \end{aligned}$$

Luego por la continuidad de k (métrico a valores reales) se tiene que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$:

$$|t - r| < \delta \Rightarrow |k(t, s) - k(r, s)| < \varepsilon$$

Entonces reemplazando esta cota obtenida por la continuidad se tiene que:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(r)| &< \int_0^1 |k(t, s) - k(r, s)| ds \\ &< \int_0^1 \varepsilon ds = \varepsilon \end{aligned}$$

Entonces $\overline{T(B(0, 1))}$ es equicontinuo.

Se concluye por el teorema de Arzela-Ascoli que T es compacto. ■

Un ejercicio de composición de funciones continuas

A continuación se presenta una composición de funciones continuas, que permiten definir un operador lineal continuo.

Proposición 165. Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua y $L : \mathcal{C}[0, 1] \rightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ dada por $Lx = x \circ T$. L es lineal continua.

Demostración.

1. Para ver que L es lineal, sean $x, y \in \mathcal{C}[0, 1]$ con escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y algún $t \in [0, 1]$ (cualquiera), entonces:

$$\begin{aligned} L(\lambda x + y) &= (\lambda x + y)(T(t)), \forall t \in [0, 1] \\ &= \lambda x(T(t)) + y(T(t)), \forall t \in [0, 1] \\ &= \lambda Lx + Ly \end{aligned}$$

2. Para ver que L es continuo basta con notar que $x \in \mathcal{C}[0, 1]$ y T son funciones continuas, luego por composición de funciones continuas se concluye. ■

A continuación se calculará la norma de L , para ello hay que recordar que:

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|Lx\| = \sup_{\|x\|=1} \|x \circ T\|$$

Luego como la función (identidad) $\text{id} \in \mathcal{C}[0, 1]$ y $\|\text{id}\| = \sup_{t \in [0, 1]} |t| = 1$, entonces:

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|x \circ T\| \geq 1 \|T\|$$

Además también

$$\|L\| = \sup_{\|x\|=1} \|x \circ T\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\| \|T\| = \|T\|$$

De lo que se concluye que $\|L\| = \|T\|$. ¿Será posible ver que L sea un operador compacto?

Ejercicio 20. Encuentre una condición necesarai y suficiente sobre T para que L sea compacto.

13.2.4. Nota: Bra y Ket en la física moderna

La notación bra-ket o notación de Dirac, es la notación estándar utilizada por los físicos para describir estados cuánticos en la teoría de mecánica cuántica.

El estado de un sistema cuántico se identifica con un vector en el espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$, donde a cada vector se le llama ket y se denota como $|x\rangle \in \mathcal{H}$, mientras que cada ket posee un bra dual, denotado como $\langle L| \in \mathcal{H}^*$, luego:

$$\langle L|x\rangle = \langle L|\cdot|x\rangle, \forall |x\rangle \in \mathcal{H}$$

Capítulo 14

Teoremas fuertes

14.1. Teorema de Baire

Definición 153 (Conjunto flaco). Un conjunto A se dice flaco o nunca denso si $\text{Int}(\text{Adh}(A)) = \emptyset$.

Ejemplo.

1. Las bolas $B(0, 1)$ en un evn no son flacas.
2. En $\mathbb{R}^2$ con la topología canónica, las rectas son flacas.

El teorema de Baire, que posee muchas aplicaciones, dice que un espacio de Banach no puede estar compuesto por la unión numerable de conjuntos flacos.

Esta propiedad es fundamental, y se llama ser **segunda categoría**, por ejemplo, $\mathbb{R}^2$ no se puede escribir como unión numerable de rectas, por lo tanto es segunda categoría.

Por otro lado, se dice que un conjunto es **primera categoría** si se puede escribir como unión numerable de conjuntos flacos, como por ejemplo los racionales en $\mathbb{R}$.

Teorema 59 (Baire). Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Si $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, con F_n cerrados, entonces existe n_0 para el cual $\text{Int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Lo anterior dice que los espacios de Banach son segunda categoría. Algunas aplicaciones son que en un conjunto $C \subseteq E$ ev, es convexo si para todo $x, y \in C$ y $t \in (0, 1)$, se tiene que $tx + (1 - t)y \in C$.

Ejemplo. En un evn, las bolas son convexas, pero un conjunto con dos componentes conexas no lo es.

Corolario 59.1. Sea F un convexo cerrado absorbente en $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach real. Entonces $F \in \mathcal{N}_0$.

14.2. Principio de la cota uniforme

Teorema 60 (Principio de la cota uniforme). Sean E, F evn, con E espacio de Banach. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{LC}(E, F)$ una familia puntualmente acotada, es decir

$$\forall x \in E, \{L(x) | x \in E\} \text{ es acotado en } F$$

Entonces existe $M > 0$ tal que $\|L\| \leq M$ para toda $L \in \mathcal{A}$.

Ejercicio 21. Probar que si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $\int_0^1 f(t) \sin(nt) dt$ converge a cero si $n \rightarrow \infty$.

14.3. Teorema de Banach-Steinhaus

Para continuar, es importante recordar que $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es puntualmente convergente si para todo $x \in E$, existe $L(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x)$, donde $L : E \rightarrow F$.

Teorema 61 (Banach-Steinhaus). Sean E, F evn con E espacio de Banach y sea $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones lineales continuas de E a F que es puntualmente convergente. Entonces $L : E \rightarrow F$ es continua y $\|L\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|L_n\|$

Observación. La cota puede ser estricta.

Demostración. La colección de operadores $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es puntualmente acotada, por lo que lo es uniformemente:

$$\|L_n\| \leq M \wedge \limsup_{n \rightarrow \infty} \|L_n\| < \infty$$

■

Además L es lineal (verifíquelo)

14.4. Teorema de la aplicación abierta

A continuación se presenta un teorema muy importante que caracteriza los funcionales lineales sobreyectivos

Teorema 62 (Aplicación abierta de Banach-Schauder). Sean E, F espacios de Banach y $L : E \rightarrow F$ lineal continua. Si L es sobreyectiva, entonces es abierta, es decir, envía abierto en abierto. En particular, si L es biyección, entonces su inversa es continua (homeomorfismo).

- Observación.* 1. No toda función lineal es abierta. Por ejemplo, $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Lx = 0$ envía $\mathbb{R}$ en $\{0\}$ (cerrado no abierto). Pero $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Lx = x$ es abierta porque es sobreyectiva.
2. No confundir L abierta (imagen de abierto es abierto) con L continua, que quiere decir que preimagen de abierto es abierto.

Demostración. Para la demostración se utilizará el siguiente lema auxiliar que será demostrado más adelante.

Lema 19 (Robinson). Si E, F son dos evn con E espacio de Banach, y $C \subseteq E \times F$ es convexo cerrado tal que $\Pi_E C$ es acotado. Entonces

$$\text{Int}(\Pi_E C) = \text{Int}(\overline{\Pi_E C})$$

Suponiendo cierto este lema. Suponiendo primero que $L(\overline{B}(0, 1)) \in \mathcal{N}_0(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_F})$ (imagen por L de la bola cerrada es vecindad del cero en F). Si esto es cierto, entonces L es abierta. En efecto, sea $\Theta \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_F}$.

Sea $\bar{y} \in L\Theta$. Luego existe $\bar{x} \in E$ tal que $L\bar{x} = \bar{y}$. Como Θ es abierto, existe $\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq \Theta$. Pero $\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon) = \bar{x} + \varepsilon\overline{B}(0, 1)$, de donde $L(\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon)) = \bar{y} + \varepsilon L(\overline{B}(0, 1))$, por lo que si $L(\overline{B}(0, 1)) \in \mathcal{N}_0(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_F})$, entonces $L(\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon))$ es vecindad de $\bar{y}$, que es lo pedido.

En efecto, para cada $\bar{y} \in L\Theta$, $L(\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon))$ es vecindad de $\bar{y}$, lo que prueba que $L\Theta$ es abierto.

A continuación se prueba que $L(\overline{B}_E(\bar{x}, \varepsilon)) \in \mathcal{N}_0(\mathcal{T}_{\|\cdot\|_F})$, para ello se usará el Lema de Robinson. Sea

$$C := \{(x, L(x)) \mid \|x\|_E \leq 1\} \subseteq E \times F$$

Teniendo que $\Pi_E C = \overline{B}_E(0, 1)$, acotada. Además $\Pi_F C = L(\overline{B}_E(0, 1))$. Por último C es convexo y cerrado pues L es continua. Por Lema de Robinson

$$\text{Int}(L(\overline{B}_E(0, 1))) = \text{Int}(\overline{L(\overline{B}_E(0, 1))})$$

Pero $\text{Int}(\overline{L(\overline{B}_E(0, 1))})$ es convexo cerrado, equilibrado y absorbente. Por ende, como F es espacio de Banach, es vecindad del origen. Esto implica que $L(\overline{B}_E(0, 1))$ es vecindad del origen, lo que prueba el resultado. ■

Teorema 63 (Grafo cerrado). Sean E, F espacios de Banach y $L : E \rightarrow F$ lineal. Entonces L es continua ssi $Gr(L) := \{(x, Lx) \mid x \in E\}$ es cerrado en $E \times F$.

Corolario 63.1. Sean E, F espacios de Banach y $L : E \rightarrow F$ lineal. Si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en E existe $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$, entonces f es continua.

14.4.1. Aplicaciones de los teoremas de aplicación abierta y del grafo cerrado

Normas equivalentes en $\mathcal{C}[0, 1]$

Para comenzar, hay que recordar la definición de normas equivalentes, comúnmente utilizada en los cursos de cálculo en varias variables.

Definición 154 (Normas equivalentes en evn). Sean $\|\cdot\|_A$ y $\|\cdot\|_B$ dos normas sobre E . Estas normas se dirán equivalentes si para todo $x \in E$, existen $\alpha, \beta > 0$ tales que:

$$\begin{aligned}\|x\|_A &\leq \alpha \|x\|_B \\ \|x\|_B &\leq \beta \|x\|_A\end{aligned}$$

Como lo anterior fue para cualquier n , se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq \|\ell_n\|_*$, lo que asegura que $\|\ell_n\|_* \not\rightarrow 0$.

Proposición 166. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathcal{C}[0, 1]$ con la cual es un espacio de Banach tal que $\|x_n\| \rightarrow 0$ implica que $x_n(t) \rightarrow 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Entonces $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma $\|\cdot\|_\infty$.

Demostración. Para comenzar, se define la función dada por:

$$\begin{aligned}L : (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|) &\rightarrow (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \\ x &\mapsto Lx := x\end{aligned}$$

Es posible verificar que L es lineal (la identidad), puesto que para $\lambda \in \mathbb{R}$ y para $x, y \in \mathcal{C}[0, 1]$:

$$L(\lambda x + y) = L(\lambda x) + Ly = \lambda Lx + Ly \wedge L(0) = 0$$

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión $\|\cdot\|$ -convergente a x , esto es que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, luego por la hipótesis sobre esta norma se tiene que $x_n(t) - x(t) \rightarrow 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Por otro lado se tiene que $(Lx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión $\|\cdot\|_\infty$ -convergente a y , esto es que $\|Lx_n - y\|_\infty \rightarrow 0$ (converge uniforme), luego se tiene la convergencia puntual, obteniendo que $Lx_n(t) - y(t) \rightarrow 0$ para todo $t \in [0, 1]$.

Como $Lx_n = x_n$ por ser L la identidad, entonces $x_n(t) \rightarrow x(t)$ y $x_n(t) \rightarrow y(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Luego como $\mathbb{R}$ es Hausdorff, se tiene la unicidad del límite, por lo tanto $x(t) = y(t)$ para todo $t \in [0, 1]$. Concluyendo que $(x_n, Lx_n) \rightarrow (x, x) = (x, Lx) \in \text{Gr}(L)$. Luego $\text{Gr}(L)$ es cerrado.

Por Teorema del grafo cerrado se tiene la continuidad de L , esto quiere decir que para todo $x \in \mathcal{C}[0, 1]$ existe $K > 0$ tal que:

$$\|Lx\|_\infty \leq K \|x\|$$

A continuación se verá la biyectividad de L :

1. Sean $x, y \in (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|)$ tales que $x = y$, luego:

$$x = y \Rightarrow Lx = x = y = Ly \Rightarrow Lx = Ly$$

Concluyendo que L es inyectiva.

2. Para todo $x \in (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|)_\infty$, luego existe $L^{-1}x = x \in (\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|)$, concluyendo que L es sobreyectiva.

Como $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|)$ y $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|)_\infty$ son espacios de Banach y L es lineal, continua y biyectiva, entonces por teorema de la aplicación abierta L^{-1} es continua, teniendo entonces que para todo $x \in \mathcal{C}[0, 1]$ existe $\bar{K} > 0$ tal que:

$$\|x\| \leq \bar{K}\|x\|_\infty$$

Como existen $K, \bar{K} > 0$, se concluye la equivalencia de las normas. ■

14.5. Teorema de Hahn-Banach

14.5.1. Forma analítica

Este es uno de los teoremas más importantes del análisis funcional, y trata sobre extensión de funcionales lineales definidos sobre subespacios vectoriales. En lo que sigue se trabajará a valores reales.

Definición 155 (Sublineal). Una función $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ se dice sublineal si para cada $x, y \in E$ y $\lambda > 0$ se tiene

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x)$$

Ejemplo. La norma $\|\cdot\|$ en caso de que E sea evn, puesto que por definición cumple que $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

El teorema de Hahn-Banach que se presentará a continuación, entrega la existencia de la extensión de una función lineal bajo ciertas condiciones.

Teorema 64 (Hahn-Banach, forma analítica en evt). Sea E un evt y $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función sublineal. Sean E_0 sev de E y $\ell_0 : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $\ell_0(x) \leq p(x)$ para cada $x \in E_0$. Entonces existe $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal que extiende a ℓ_0 tal que

$$\begin{aligned} \ell|_{E_0} &= \ell_0 \\ \ell(x) &\leq p(x), \forall x \in E \end{aligned}$$

Demostración. La idea es utilizar el Lema de Zorn. Hay que hallar un elemento maximal, sea:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} := \{(\ell, F) \mid F \text{ es sev de } E, E_0 \subseteq F, \ell : F \rightarrow \mathbb{R} \text{ es lineal} \\ \ell|_F = \ell_0, \ell(x) \leq p(x), x \in F\} \end{aligned}$$

Se define el siguiente orden parcial (verifique que es orden parcial) sobre $\mathcal{L}$:

$$(\ell_1, F_1) \leq (\ell_2, F_2) \Leftrightarrow F_1 \subseteq F_2 \wedge \ell_1 = \ell_2|_{F_1}$$

donde ℓ_2 extiende a ℓ_1 .

Comentario. Hay que notar que el elemento maximal será (ℓ_n, F_n) tal que $E = F_n$ que verifica que $\ell_n|_F = \ell_i$ para todo $i \in I$ (indexación de la cadena).

Vea que $\mathcal{L}$ es no vacío, esto debido a que $(\ell_0, E_0) \in \mathcal{L}$. Sea $\{(\ell_\lambda, F_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cadena (cualquiera) de $\mathcal{L}$, a continuación se verá que la cadena posee cota superior. Sea $\tilde{F} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, y para cualquier $x \in \tilde{F}$, sea $\tilde{\ell}(x)|_{F_\lambda} = \ell_\lambda(x)$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Es evidente que $(\tilde{\ell}, \tilde{F})$ es cota superior.

1. Se busca ver que $\tilde{\ell}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \tilde{F}$, para ello note que $\tilde{F} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$, como $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ corresponden a una cadena, luego $F_\lambda \subseteq F_\mu$ si $\lambda \leq \mu$, luego la unión es el elemento más grande de la cadena, esto quiere decir que

$$\sim \ell|_{\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda}(x) \leq p(x), \forall x \in \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$$

concluyendo que existe el elemento maximal de $\mathcal{L}$, denotado por (ℓ, F) .

2. Se busca ver que el elemento maximal es la extensión de ℓ_0 hacia E . Razonando por contradicción, se supondrá que $F \neq E$ y que existe $x_0 \in F^c$ (pues $F \subseteq E$). Sea

$$\hat{F} := \{x + tx_0 | x \in F, t \in \mathbb{R}\}$$

el conjunto minimal que contiene estrictamente a F y a x_0 . Se extenderá ℓ a $\hat{F}$:

$$\begin{aligned} \hat{\ell}(x + tx_0) &= \hat{\ell}(x) + t\hat{\ell}(x_0) \\ &= \hat{\ell}(x) + tm; m := \hat{\ell}(x_0)\text{libre} \end{aligned}$$

Note que $\hat{\ell}$ es bien definida y sigue siendo lineal, además $\hat{\ell}|_F = \ell$.

A continuación se verá que $\tilde{\ell}(x) \leq p(x)$ para todo $x \in \tilde{F}$, a partir de esto saldrá la contradicción. Escogiendo $m = \ell(x_0)$ adecuadamente. Note que si $t = 0$, se concluye. En caso de que $t \neq 0$, se tiene que para cualquier $x \in F$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\ell(x) + tm \leq p(x + tx_0) \Leftrightarrow tm \leq p(x + tx_0) - \ell(x)$$

Si $t > 0$, se tendrá que



Hay muchos corolarios y aplicaciones muy interesantes del teorema anterior, para verlos antes hay que recordar que si E es evn, $E^* := \mathcal{LC}(E, \mathbb{R})$ es su dual, que es un espacio de Banach para la norma del supremo:

$$\|x^*\|_* := \sup_{\|x\| \leq 1} |x^*(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} x^*(x)$$

lo que ocurre porque $\mathbb{R}$ es espacio de Banach.

Corolario 64.1. Sea E un evn y E_0 sev de E . Si $\ell_0 : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces existe $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \ell|_{E_0} &= \ell_0 \\ \|\ell\|_* &= \|\ell_0\|_{0,*} \end{aligned}$$

Corolario 64.2. Sea E un evn real y $x_1, \dots, x_n$ vectores l.i. en E . Para $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ arbitrarios existe $x^* \in E^*$ tal que $x^*(x_i) = v_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Corolario 64.3. Sea E evn real y $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Entonces existe $x^* \in E^*$ tal que $x^*(x_0) = \|x_0\|$ y $\|x^*\|_* = 1$

Corolario 64.4. Sea E un evn. Entonces para todo $x \in E$, $\|x\| = \sup_{\|x^*\|_* \leq 1} x^*(x)$ (es decir, el supremo se alcanza).

Corolario 64.5. Sea $E, \|\cdot\|$ evn real y E_0 sev cerrado de E . Si $x_0 \in E \setminus E_0$ entonces existe $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal continua tal que $\ell(x_0) = 1$, $\ell(x) = 0$ si $x \in E_0$, y $\|\ell\| = (\text{dist}(x_0, E_0))^{-1}$.

Corolario 64.6. Si E es evn real y E_0 es sev de E tal que: Para cada $x^* \in E^*$, si x^* es nula en E_0 , entonces es nula en E . Entonces $\text{Adh}(E_0) = E$.

Corolario 64.7. Sea E evn real y $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal. Entonces ℓ es continua ssi $\text{Ker}(\ell)$ es cerrado.

14.5.2. Forma geométrica

A continuación se abordará una interpretación más geométrica del Teorema de Hahn-Banach, visto como un resultado de separación.

Definición 156. Sea E ev. Se llamará hiperplano H a toda variedad lineal afín de codimensión 1, es decir,

$$H := x_0 + E_0, \quad E_0 \text{ sev de } E \text{ tq } \dim(E/E_0) = 1$$

Aquí $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in E_0$ es la relación de equivalencia involucrada. El conjunto cuociente E/E_0 , visto como ev con escalares reales, tiene $\dim 1$, es decir es una recta.

Ejemplo. En $E = \mathbb{R}^3$, los hiperplanos H son los planos E_0 (de dimensión 2) trasladados del origen por x_0 . E/E_0 corresponde al espacio cuociente donde $[0] = E_0$, y donde $E/E_0 = \langle [n] \rangle$, donde n es el vector normal no nulo al plano E_0 .

Proposición 167.

1. H es hiperplano en el ev E ssi existe $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal continua no nula y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $H = \{x \in E \mid \ell(x) = \alpha\}$.
2. Si H es evn entonces todo hiperplano será cerrado o denso, siendo cerrado ssi ℓ es continua.

La forma geométrica de Hahn-Banach establece condiciones suficientes para separar dos conjuntos mediante un hiperplano.

Teorema 65 (Hahn-Banach, forma geométrica). Sea E evt y A, B dos convexos en E tales que $A \cap B = \emptyset$. Si $\text{Int}(A) \neq \emptyset$ o bien $\text{Int}(B) \neq \emptyset$, entonces existe $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal continua no nula y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\ell(x) \leq \alpha \leq \ell(y), \quad \forall x \in A, \forall y \in B$$

Corolario 65.1. Si E es evn real y C es un convexo cerrado en E . Para $x_0 \notin C$ existe $x^* \in E^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^*(x) \leq \alpha \leq x^*(x_0), \quad \forall x \in C$$

Corolario 65.2. Sea E evn y F_1, F_2 cerrados convexos disjuntos, uno de los cuales es compacto. Entonces existe x^* no nulo tal que

$$\langle x^*, x_1 \rangle < \langle x^*, x_2 \rangle, \quad \forall x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$$

Si ambos son compactos, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ tal que

$$\langle x^*, x_1 \rangle \leq \alpha < \beta \leq \langle x^*, x_2 \rangle, \quad \forall x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$$

Parte V

Anexo

Apéndice A

Funciones y relaciones

A.1. Regla de asignación

Definición 157 (Regla de asignación y elementos). Una *regla de asignación* es un subconjunto del producto cartesiano $C \times D$ tal que si $(c, d) \in r$ y $(c, d') \in r$, entonces $d = d'$. Luego en la regla de asignación se definen los siguientes elementos:

1. El *dominio de r* corresponde al siguiente conjunto

$$\{c \in C : \exists d \in D, tq(c, d) \in r\}$$

2. Mientras que el *conjunto de imágenes de r* corresponde al siguiente conjunto

$$\{d \in D : \exists c \in C, tq(c, d) \in r\}$$

Definición 158 (Función). Una *función* es una regla de asignación r junto con un conjunto B que contiene el conjunto de imágenes de r como un subconjunto. Se denota $f : A \rightarrow B$, donde A es el *dominio de f* y B es el *rango de f* .

A.1.1. Conjunto imagen y pre-imagen

Definición 159 (Conjunto imagen de una función). Sea $f : X \rightarrow Y$ y sea $A \subset X$. La *imagen de f en A* es:

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A : f(x) = y\} = \{f(x) \in Y : x \in A\}$$

Proposición 168 (Propiedades del conjunto imagen).

1. $f(\phi) = \phi$

2. $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \forall A, B \subset X$
4. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), \forall A, B \subset X$. La igualdad se alcanza cuando f es inyectiva.
5. $f(A^c) \subset (f(A))^c$. La igualdad se alcanza cuando f es epiyectiva.

Definición 160 (Conjunto preimagen). Sea $f : X \rightarrow Y$ y sea $B \subset Y$. La preimagen de f en B es:

$$f^{-1} = \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Proposición 169 (Propiedades del conjunto preimagen).

1. $f^{-1}(\phi) = \phi$
2. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
3. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \forall A, B \subset X$
4. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B), \forall A, B \subset X$.
5. $f^{-1}(A^c) \subset (f^{-1}(A))^c$.

Proposición 170 (Propiedades del conjunto preimagen e imagen).

1. $f(f^{-1}(B)) \subset B$. La igualdad se alcanza cuando f es epiyectiva.
2. $A \subset f^{-1}(f(A))$. La igualdad se alcanza cuando f es inyectiva.

A.2. Relaciones de orden

A.2.1. Orden total

Definición 161 (Orden total). Sea $(A, \leq)$ un orden parcial, se dice que es orden total si para todos $a, b \in A$ se tiene que $a \leq b$, o bien $b \leq a$.

Ejercicio 22 (Desafío). Extraídos de [15].

P1.- En un conjunto finito X con n elementos, existen $n!$ modos distintos de definir un orden total en X .

P2.- Considerando un conjunto totalmente ordenado A , al que daremos el nombre de alfabeto. Formando las potencias cartesianas sucesivas:

$$A^1 = A; A^2 = A \times A; A^3 = A \times A \times A; \dots; A^n = \prod_{i=1}^n A_i$$

y su reunión

$$D = A^1 \sqcup A^2 \sqcup A^3 \sqcup \dots \sqcup A^n$$

el que recibirá el nombre de diccionario correspondiente al alfabeto A. De cada elemento de D diremos que es una palabra. Si $p_1, p_2 \in D$, se dice que $p_1 \leq p_2$ cuando o bien $p_1 = p_2$, o bien, si $p_1 \neq p_2$, se da una de las dos situaciones siguientes:

1. El número de coordenadas de p_1 es menor que el número de coordenadas de p_2 y toda coordenada en p_1 es idéntica a la coordenada del mismo lugar en p_2 .
2. Hay una coordenada en p_1 que es distinta de la correspondiente en p_2 y precede a ésta en la ordenación total de A, y, además cada una de las coordenadas anteriores en p_1 coincide con la coordenada que ocupa el mismo lugar en p_2 .

Se entiende que tanto en la situación (1) como en la situación (2), para todo A^n y para todo punto de él, sus coordenadas son contadas de izquierda a derecha. Entonces, D es un conjunto totalmente ordenado,

A.2.2. Un vistazo a la topología del orden

Sea X un conjunto ordenado con la relación $<$, osea que para $a, b \in X$, $a < b$ o $b < a$ o $a = b$, luego:

$$(a, b) = \{x \in X | a < x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in X | a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in X | a \leq x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \in X | a \leq x \leq b\}$$

Definición 162 (Topología del orden). Sea X un conjunto ordenado con más de un elemento, sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los subconjuntos de la siguiente forma:

1. Todos los intervalos de la forma (a, b) .
2. Todos los intervalos de la forma $[a_0, b)$, donde a_0 es el mínimo de X en caso de existir.
3. Todos los intervalos de la forma $(a, b_0]$ donde b_0 es el máximo de X en caso de existir.

luego a la topología que genera $\mathcal{B}$ considerándola base, se le llama topología del orden.

Ejemplo.

1. Sea $X = \mathbb{R}$, luego $\mathcal{B} = \{\text{Todos los intervalos de la forma } (a, b)\}$.

2. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ cuando } (a < c) \vee (a = c \wedge b < d)$$

luego los abiertos serían de la forma

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} < x < \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

A.3. Relaciones de equivalencia

A.3.1. Clase de equivalencia

En la matemática elemental se encuentran de modo natural, varios ejemplos importantes de relaciones binarias, esto es, de relaciones entre pares ordenados de elementos variables de un mismo conjunto, las cuales se caracterizan por tener las siguientes propiedades:

1. Reflexiva.
2. Simétrica.
3. Transitiva.

A continuación se presentan dos casos comunes que son relaciones de equivalencia, con el fin de acercar al lector el concepto para luego definirlo formalmente.

Ejemplo. Considere un conjunto E . La relación de igualdad $x = y$, donde $x, y \in E$, es una relación binaria, es decir, una relación entre los dos elementos x, y considerados en ese orden, que tiene las siguientes propiedades:

1. $x = x$
2. $x = y \Rightarrow y = x$
3. $x = y, y = z \Rightarrow x = z$

es una relación de equivalencia.

Ejemplo. Considere un plano euclidiano P y el conjunto R de las rectas de P . La relación de paralelismo $x // y$, donde $x, y \in R$, es una relación binaria en R tal que:

1. $x // x$ (una recta es paralela a si misma).
2. $x // y \Rightarrow y // x$ (si x es paralela a y , luego y es paralela a x).
3. $x // y, y // z \Rightarrow x // z$ (si x es paralela a y , mientras que y es paralela a z , entonces x es paralela a z).

Definición 163 (Relación de equivalencia). Considerando un conjunto E . Se define como una *relación de equivalencia* en E es una relación binaria en E que tiene las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. En general, se hará uso del símbolo $\sim$ y se escribe $x \sim y$, lo que se leerá como 'x equivale a y'.

Las propiedades que la relación de equivalencia verifica son las siguientes:

1. $x \sim x$
2. $x \sim y \Rightarrow y \sim x$
3. $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

Definición 164 (Partición). Una *partición* de un conjunto E es una colección P de conjuntos, cada uno de los cuales recibe el nombre de componente de la partición, tales que:

1. Todo componente es una parte no vacía de E .
2. Todo elemento de E pertenece a uno, y sólo a uno, de los componentes (o equivalentemente dice que, dos componentes o son disjuntos o coinciden).

Ejemplo. Considere un plano euclideo P y una dirección fija d en P . La colección R_d de todas las rectas de P que poseen la dirección d es una partición de P en una infinidad de componentes. En efecto, cada una de las tales rectas es una parte no vacía de P . Además, todo punto de P pertenece a una, y sólo a una, recta de dirección d .

A continuación, se establece la conexión que existe entre los conceptos de relación de equivalencia y de partición.

Proposición 171. Dada una partición P de un conjunto E , si definimos $x \sim y$ por la condición 'los elementos x e y pertenecen a un mismo componente de P ' se obtiene una relación de equivalencia en E .

Definición 165 (Clase de equivalencia). Considere un conjunto E y una relación de equivalencia en él. Se llama *clase de equivalencia* de un elemento $x \in E$ al conjunto de los elementos $y \in E$ tales que $x \sim y$. Se utilizará siempre la notación $\bar{x}$ para representar una clase de equivalencia de x . Note que $x \in \bar{x}$.

Proposición 172. Dados un conjunto E y una relación de equivalencia en E , las clases de equivalencia correspondientes forman una partición de E .

Ejercicio 23.

P1.- Dado un conjunto E , sean $P(E)$ el conjunto de las particiones de E y $R(E)$ el conjunto de las relaciones de equivalencia en E . Las proposiciones 1 y 2 presentadas anteriormente definen dos aplicaciones:

1. $r : P(E) \rightarrow R(E)$
2. $p : R(E) \rightarrow P(E)$

Demostrar que $pr = I$ y $rp = I$, es decir que p, r son inversas una de la otra.

P2.- Sea $p(n)$ el número de las particiones posibles de un conjunto finito con n elementos. Indicar un método para calcular por recurrencia $p(n)$.

A.3.2. Espacio cociente

Una de las formas más frecuentes de definir una relación de equivalencia en un conjunto E que sea el dominio de una cierta función, consiste en considerar como equivalentes dos puntos de E en los que esa función toma el mismo valor. En efecto:

Proposición 173. Dada una función $f : E \rightarrow F$, se define $x \sim y$ por la condición de ser $f(x) = f(y)$, donde $x, y \in E$, se obtiene una relación de equivalencia en E .

Considere un conjunto E , en el cual se haya definido una relación de equivalencia R . Cada punto $x \in E$ determina una clase de equivalencia debido a lo comentado anteriormente. Haciendo que x varíe en E y considerando las clases de equivalencia que así es posible obtener cierta partición de E .

Definición 166 (Espacio cociente). Se da el nombre de *espacio cociente* de E respecto a la relación de equivalencia R al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de E . Se representa este espacio cociente por E/R . Los elementos de E/R son, pues, ciertas partes de E , a saber, las partes de E que aparecen como clases de equivalencia de los elementos de E (note que $E/R \subset \mathcal{P}(E)$).

A continuación se presentan dos ejemplos naturales de espacio cociente:
Ejemplo.

1. *Aparición del espacio cociente en espacios vectoriales:* En álgebra lineal, el espacio vectorial cociente E/F del espacio vectorial E por un subespacio vectorial F , es la estructura natural de espacio vectorial sobre un conjunto cociente de E por la siguiente relación de equivalencia: v está relacionado con w en E , si y solamente si $v - w \in F$.
2. *Aparición de espacio cociente en espacios topológicos:* Si X es un espacio topológico y $p : X \rightarrow Y$ es una función sobreyectiva, entonces es posible inducir una topología T en Y a partir de la topología de X diciendo que: A es un conjunto abierto en la topología T de Y si

$p^{-1}(A)$ es un conjunto abierto de X . Luego la topología de Y se denomina como topología cociente inducida por p . Luego, el espacio $\bar{X}$ con la topología cociente inducida por p , se denomina espacio cociente de X .

Al considerar el espacio cociente, es importante pensar en la llamada *proyección natural* de E en E/R . Todo elemento $x \in E$ pertenece a una, y solamente a una, clase de equivalencia $\bar{x}$ (debido a la propiedad de transitividad). Ahora, $\bar{x}$ es un elemento del espacio cociente por la propia definición de este espacio. Si, por tanto, considerando la correspondencia de E en E/R que a cada $x \in E$ le asocia su clase de equivalencia $\bar{x} \in E/R$ que a cada $x \in R$ le asocia su clase de equivalencia $\bar{x} \in E/R$, luego se tendrá definida la función $\Pi : E \rightarrow E/R$ la cual recibe el nombre de proyección natural de E sobre el espacio cociente. Notemos que $\Pi(x) = \bar{x}$ para todo $x \in E$.

Dados los conceptos de espacio cociente y de proyección natural, es posible presentar la siguiente recíproca para la proposición 1:

Proposición 174. Dados un conjunto E y una relación de equivalencia R en E , la proyección natural $\Pi : E \rightarrow E/R$ es una función sobreyectiva de E en E/R que determina, precisamente, la relación de equivalencia R .

Y finalmente, la siguiente proposición tiene como objetivo mostrar como, a través de una correspondencia inyectiva i bien definida entre F y E/R , es posible pasar de $f : E \rightarrow F$ a $\Pi : E \rightarrow E/R$.

Proposición 175. Dada una función sobreyectiva de E en F , $f : E \rightarrow F$, considerando la relación de equivalencia R que f determina en E y la proyección natural $\Pi : E \rightarrow E/R$. Existe entonces una y solamente una función $i : F \rightarrow E/R$ tal que $\Pi = i \circ f$. Tal función i es biyectiva de F en E/R y se tiene $i(t) = f^{-1}(t)$ para todo $t \in F$.

Apéndice B

Propiedades topológicas del conjunto de Cantor

A continuación se presentarán algunas propiedades del conjunto de Cantor definido en la parte de *Cardinales*.

Notación. Se denotará por $\mathcal{C}$ al conjunto de Cantor.

Proposición 176. Considerando el espacio topológico $([0, 1], \mathcal{T}_c)$, donde $\mathcal{T}_c$ es la topología traza de la topología canónica. El conjunto de Cantor cumple las siguientes propiedades topológicas:

1. $\mathcal{C}$ es cerrado y no vacío en el espacio $([0, 1], \mathcal{T}_c)$.
2. $\mathcal{C}$ tiene interior vacío.
3. $\mathcal{C}$ no posee puntos aislados en el espacio $([0, 1], \mathcal{T}_c)$.
4. $\mathcal{C}$ es totalmente desconexo y no es localmente conexo.

Proposición 177. El conjunto $\mathcal{C}$ dotado de la topología traza de $\mathcal{T}_c$ cumple:

1. $([0, 1], \mathcal{T}_c)$ es homeomorfo al espacio $\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{Tychonoff}}\right)$, este espacio es el producto de una familia numerable de espacios discretos $(\{0, 1\}, \mathcal{T}_{\text{Tychonoff}})$.
2. Todo espacio métrico (X, d) totalmente desconexo, perfecto y compacto es homeomorfo a $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_c)$ (a estos espacios se les llama espacios de Cantor).
3. Todo espacio métrico compacto es la imagen continua de $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_c)$.
4. Todo abierto de $(\mathcal{C}, \mathcal{T}_c)$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C} \setminus \{0\}$.

Apéndice C

Topología en teoría de números

C.1. Progresiones aritméticas

Definición 167 (Regla recursiva). Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y $a \in X$. Sea $F : X \rightarrow X$ una función. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se introduce la siguiente regla recursiva:

$$(R) \begin{aligned} x : \mathbb{N} &\rightarrow X \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

donde $x_0 = a$.

Proposición 178. Sean $x, y : \mathbb{N} \rightarrow X$ que satisfacen la regla recursiva (R) , luego $x = y$.

Definición 168 (Progresión aritmética). Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$, se define la progresión aritmética $PA_{a,b}$ como:

$$PA_{a,b} := a\mathbb{Z} + b := \{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Además para b fijo se define:

$$PA_b := \bigsqcup_{a \in \mathbb{Z}} PA_{a,b}$$

Observación. Note que cada $PA_{a,b}$ se puede escribir a partir de PA_b utilizando la regla recursiva (R) .

Proposición 179. El conjunto $(PA_b, \leq)$ es un conjunto dirigido, donde $x \leq y$ ssi $x \geq y$.

C.2. Infinitud de los números primos

Proposición 180. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Se define $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ donde sus elementos son las uniones de $PA_{a,b}$ con $a \neq 0$, entonces $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}}$ es una

topología sobre $\mathbb{Z}$ (llamada *topología de las progresiones aritméticas*).

Proposición 181. En $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}})$, las progresiones $\text{PA}_{a,b}$ son abiertas y cerradas y se pueden escribir de la forma:

$$(\text{PA}_{a,b})^c = \bigcup_{j=1}^{a-1} \text{PA}_{a,b+j}$$

Proposición 182. El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_{\mathbb{Z}})$ no es conexo.

Notación. Se denotará por $\mathbb{P}$ al conjunto de los números primos.

Teorema 66. Considerando las progresiones aritméticas $\text{PA}_{p,0}$, donde $p \in \mathbb{P}$, luego:

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \text{PA}_{p,0}$$

Corolario 66.1. El conjunto $\mathbb{P}$ tiene cardinal infinito.

Bibliografía

- [1] Conway, J., A Course in Functional Analysis, Springer, (1985).
- [2] Daniilidis, A., Espacios Métricos.
- [3] Dugundji, J., Topology, C. Brown, (1966).
- [4] Eidelman, Y., Milman, V., Tsoolomitis, A., An Introduction to Functional Analysis, AMS, (2004).
- [5] Ivorra, C., Teoría de Conjuntos.
- [6] Ivorra, C., Topología.
- [7] Jech, T. Set Theory, Springer, (2006).
- [8] Kelley, J., General Topology, Van Nostrand, (1955).
- [9] Kelley, J., General Topology, Springer, (1975).
- [10] Kolmogorov, A. & Fomin, S., Introductory Real Analysis, Pretince Hall, (1970).
- [11] Komjath, P. & Totik, V., Problems and Theorems in Classical Set Theory, Springer. (2006).
- [12] Kosniowski, C., Topología Algebráica, Editorial Reverté, (1986).
- [13] Macho, M., Topología General, (2002).
- [14] Munkres, R., Topology (2nd edition), Pretince Hall, (2000).
- [15] Nachbin, L. Introducción al Álgebra, Editorial Reverté, (1980).
- [16] Rynne, B., Youngson M., Linear Functional Analysis, Springer, (2000).
- [17] Rudin, W., Functional Analysis, McGraw Hill, (1971).
- [18] Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis, McGraw Hill, (1965).
- [19] Saxe, K., Beginning functional analysis, Spinger, (2002).
- [20] Willard, S., General Topology, Addison-Wesley, (1979).
- [21] Yosida, K., Functional Analysis, Springer, (1980).