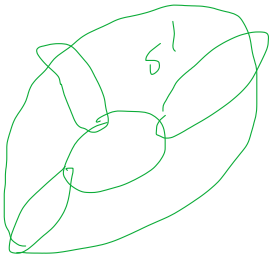


Ecuación de Lorenz y Teorema de Hartman-Grobman

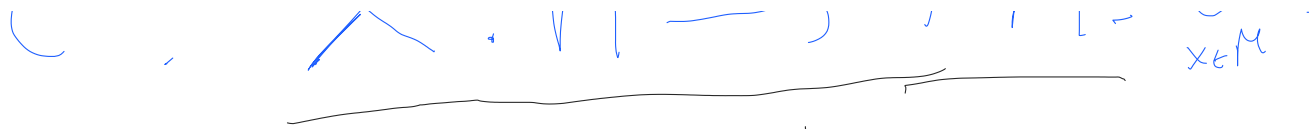
martes, 10 de noviembre de 2020 16:23

Contexto: $M \subset \mathbb{R}^3$ variedad compacta
sin borde (es que se parece a lo común
al plano)

Ex $M = \mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$



• Aplicación es un campo vectorial.
 $\nabla \cdot M \rightarrow TM - (1) T_x M$



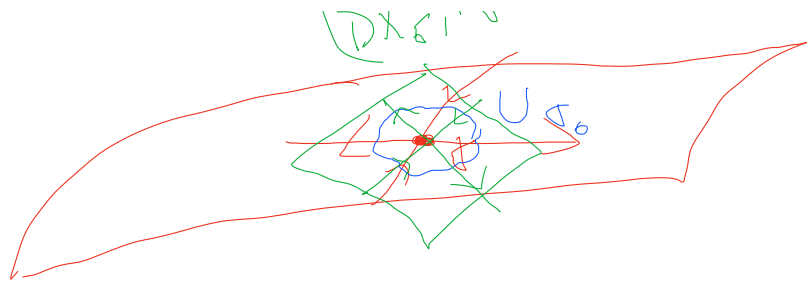
Teorema de Hartman - Grobman.

Sea σ una singularidad hiperbólica
 de un campo C^1 $X: M \rightarrow TM$
 ($DX(\sigma) \neq 0$), entonces X es

topológicamente conjugado a su
 parte lineal $DX(\sigma): T_\sigma M \rightarrow T_\sigma M$
 en una vecindad $U_\sigma \subset M$

$(\dots, T_x M)$

M $\dots$



$$(X, U_{\sigma_0}) \sim (T_{X_{\sigma_0}}, T_{\sigma} M)$$

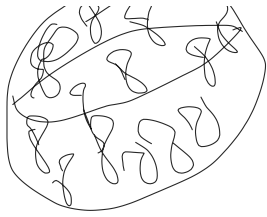
Queremos aplicar el Teorema de H-G a una ecuación diferencial no lineal muy famosa, pues predice el clima, que es la ecuación de Lorentz.

$$\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{X} = a(Y - X)$$

$$a = 10$$

EC/Modelo



$$y = r x - y - x \cdot z$$

$$r = 2/8$$

$$z = x \cdot y - b z$$

$$b = 8/3$$

9) Estos no tienen solución algebraica.

obs 11 1) $X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

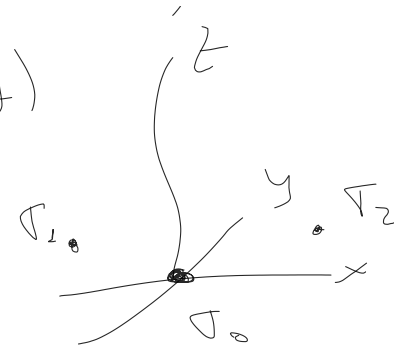
$$(x, y, z) \mapsto X(x, y, z) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

2) It-G Newton es un método,
para usarlo, $M = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$.

3) Los singular de $(DX = 0)$
del campo X son 3,

$$\Gamma_0 = (0, 0, 0) \quad , \quad \Gamma_1 = (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$$

$$\Gamma_2 = (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$$



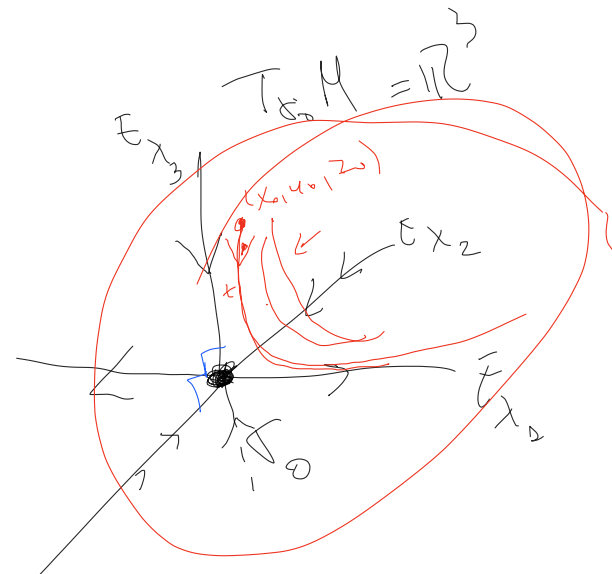
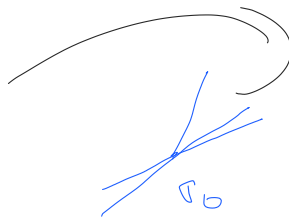
4) Γ_0 es una singularidad
hiperbólica

5) Como M es compacto, Γ_0
es hiperbólico / $\exists$ una vecindad
de Γ_0 tal que la dinámica
de la solución de la E.C.

de Lorentz se refere a la
 parte lineal de la ec. de
 Lorentz. $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$

$$\lambda_1 = 11,83, \quad \lambda_2 = -22,83, \quad \lambda_3 = -2,67.$$

$(\mathbb{R}^3 \cup \{0\}, \text{Ec. Lorentz})$



$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y \\ \dot{z} &= \lambda_3 z \end{aligned} \quad \left\{ \quad \chi^t(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} x_0 e^{\lambda_1 t} & y_0 e^{\lambda_2 t} & z_0 e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \right.$$

obs 1) El teorema de H-L.

me dice si hay un pto fijo
hiperbólico de una EDO exp. lineal.
entonces puedo ver el comportamiento
de la solución de la EDO lo
cálculo en ese pto fijo, pero
no solo en su zona

1) Es no me voy

lineal

2) Es importante este homomorfismo
por estar dando sobre algunos
con de la dinámica de
la edo no lineal

2.1) # órbita periódica se
preserva

2.2) Transf. de fase se
preserva

2.3) Derivada del campo de
vectores se preserva.

✓ - - -