Estabilidad Estructural

martes, 3 de noviembre de 2020 16:37

* Exposiciones

Viernes 13/11/2020

Comienzo: ~~Martes 10/11/~~2020

Martes 8/12/2020

Finaliza: ~~Viernes 4/12/~~2020

Temas)
* Estabilidad estructural
* Teorema de Sarkovskii
* Derivada Schwarziana

3 Secciones del Devaney

Estabilidad Estructural

En S.D, est. estructural significa que hay "persistencia del sistema ante pequeñas perturbaciones"

o "que una aplicación f es estructuralmente estable si cada aplicación g cercana a f es topológicamente conjugada a f y por lo tanto tiene la misma dinámica"

Notación) f es conjugada a g : $f \sim g$

¿Qué es ser cercano entre mapas o aplicaciones?

Def: Sea $C^r(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \,/\, f$ es r veces derivable $\}$,

La distancia $d_{C^0} : C^r(\Omega) \times C^r(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$

es definida por:

$$d_{C^0}(f,g) = \sup_{x \in \Omega} \{ |f(x) - g(x)| \}$$

y la distancia $d_{C^r} : C^r(\Omega) \times C^r(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$

dada por

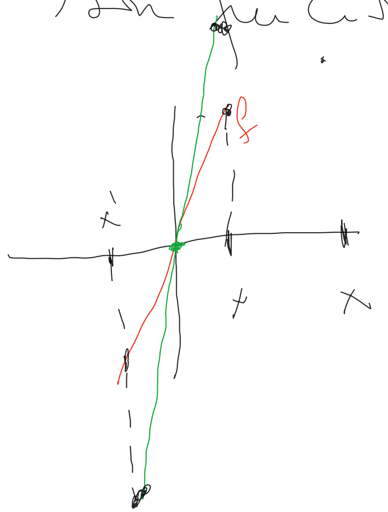
$$d_{C^r}(f,g) = \sup_{x \in \Omega} \{ |f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)| \}$$

obs: 1) Intuitivamente, dos mapas están cercanos

C^r si todos ellos, ellos y sus derivados) hasta el orden r, están cercanos.

Ej 1) ① $f(x) = 2x$ y $g(x) = (2+\varepsilon)x$

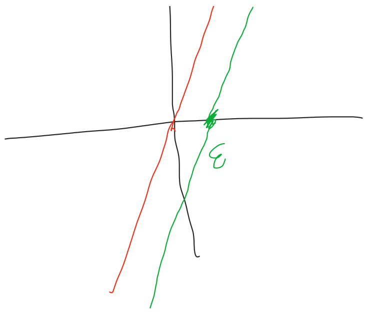
Son funciones que NO son C^0 cercanos.



$$d_{C^0}(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \{ |f(x)-g(x)| \} = +\infty$$

② $f(x) = 2x$ $\qquad g(x) = 2x + \varepsilon$

f y g son C^r cercanos.



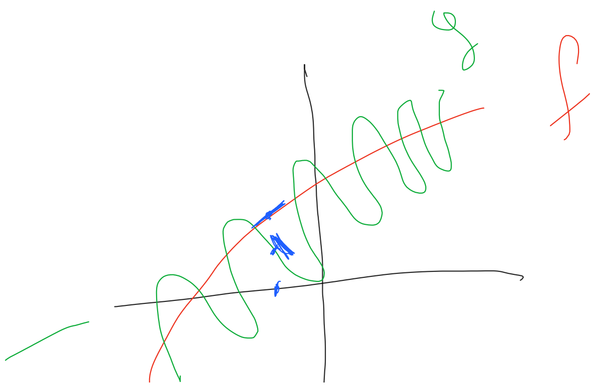
$$d_{C^r}(f,g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ |\overset{f(x)}{2x} - (\overset{g(x)}{2x+\varepsilon})|, |2-2|, |0-0|, \dots, |0-0| \}$$

$$= \varepsilon \quad \checkmark$$

Obs: En el curso nos preocupamos de ser C^1 cercanos o como máximo C^2 cercanos.

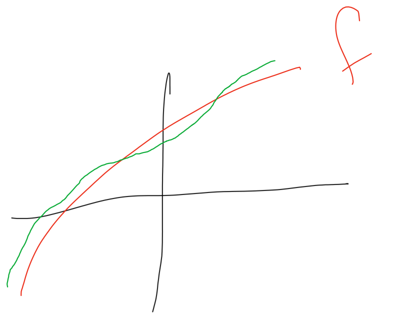
Obs

③



- f y g son C^0 cercanos ✓
- f y g No son C^1 cercanos
- f y g No son C^r cercanos.

4



- f y g son C^1 cercanos
- f y g No son C^2 cercanos

Def: Sea $f: J \to J$, f es $\underline{C^r}$ estructuralmente estable, si:

$\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\forall\, g: J \to J$

satisfaciendo

$d_{C^r}(f,g) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ f y g son topológicamente conjugados.

~~Ej~~: $f(x) = \frac{1}{2}x$ es C^1 estructuralmente estable.

~~Dem~~: Aquí, tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Entonces

$\forall\, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaciendo

$d_{C^1}(f,g) < \frac{1}{2}$

$<$

$$\left|\frac{1}{2}-g'(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \left|\frac{1}{2}x - g(x)\right|, \left|\frac{1}{2} - g'(x)\right| \right\} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - g'(x) < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < g'(x) < 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Así, podemos concluir algunas cosas de g

1º) g es siempre creciente.

2º) g tiene un único Pto fijo atractor, digamos P, ... lo implica que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \to \infty} g^n(x) = p$.

3) Como $|g'(x)| < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

g es un atractor global.

Esto nos dice que f y g tienen la misma dinámica.

Pero no nos dice que son top. conjugadas.

Para ver que son top conjugadas buscamos lo que se llama

"Dominio fundamental".

$$(f_x = \tfrac{1}{2}x, \mathbb{R}) \xrightarrow{h} (g, \mathbb{R})$$

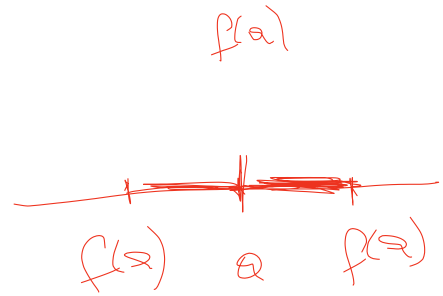
$$f \circ h = h \circ g .$$

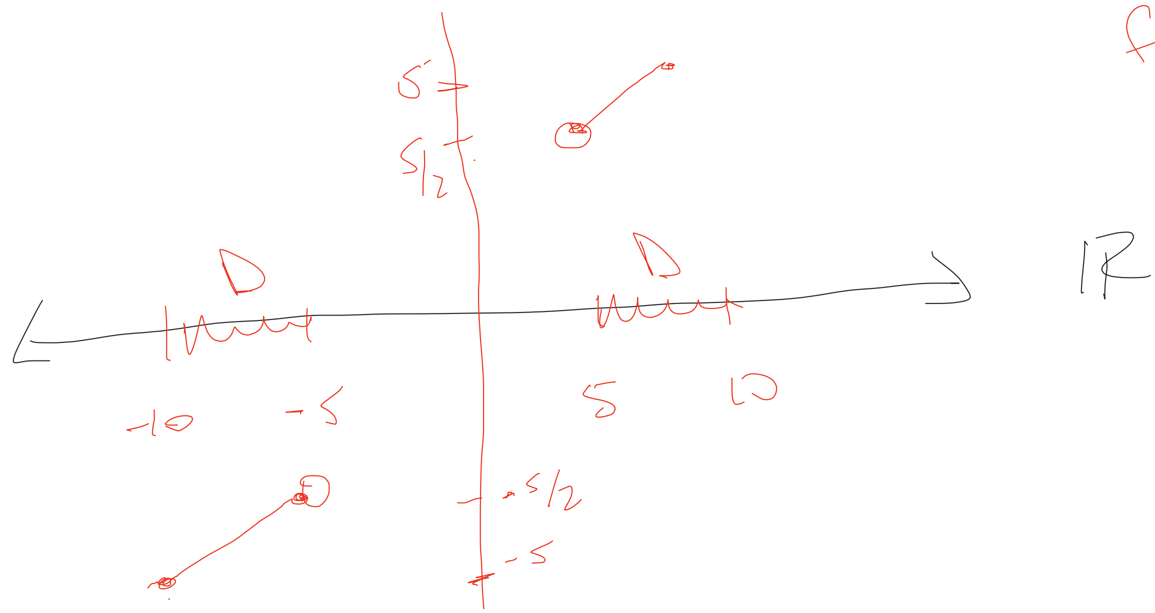
El dominio fundamental es un conjunto de $\mathbb{R}$. y tendremos Dom. fund. en $(f, \mathbb{R})$ y $(g, \mathbb{R})$

$$h : \underbrace{D_f}_{\text{Dominio de } (f,\mathbb{R})} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \underbrace{D_g}_{\text{Dominio del sistema } (g,\mathbb{R})} \subset \mathbb{R}$$

Aquí el Dmio de $\left(\frac{1}{2}x, \mathbb{R}\right)$ es

$D_f = \{ x \,/\, 5 < |x| \leq 10 \}$





y el dmio fundamental de $(S, \mathbb{R})$

es

$$D_g = \{ x \,/\, g(10) < x \leq 10 \ \wedge\ -10 < x \leq g(-10) \}$$

El homeomorfismo h que hace que f y g conjugadas es dado por $h : D_f \longrightarrow D_g$

- h lineal
- h creciente.
- $h(10) = 10$ $\quad h(-10) = -10$.

Así f y g son C^1 estructuralmente estable.

eorem 9.5. *The quadratic map* $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ *is* C^2 *structurally ble if* $\mu > 2+\sqrt{5}$.

ıeorem 9.8. *Let* p *be a hyperbolic fixed point for* f *and suppose* $f'(p) = \lambda$ *h* $|\lambda| \neq 0, 1$. *Then there are neighborhoods* U *of* p *and* V *of* $0 \in \mathbf{R}$ *and ıomeomorphism* $h: U \to \mathbf{R}$ *which conjugates* f *on* U *to the linear map* $r) = \lambda x$ *on* V.

ıeorem 10.1. *Let* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *be continuous. Suppose* f *has a periodic nt of period three. Then* f *has periodic points of all other periods.*

heorem 10.2. *Suppose* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *is continuous. Suppose* f *has a periodic ɔint of prime period* k. *If* $k \rhd \ell$ *in the above ordering, then* f *also has a ɛriodic point of period* ℓ.

Proposition 11.2. *Let $P(x)$ be a polynomial. If all of the roots of $P'(x)$ are real and distinct, then $SP < 0$.*