Dinamica simbolica

viernes, 23 de octubre de 2020 16:36

$([0,1], F_{\mu>4}) \sim$ Dinámica simbólica $((\Sigma_2, d), \sigma)$.

$(([0,1], |\,|), F_{\mu>4})$

Def ① $\Sigma_2 = \{ s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) \,/\, s_j = 0 \text{ ó } 1 \}$

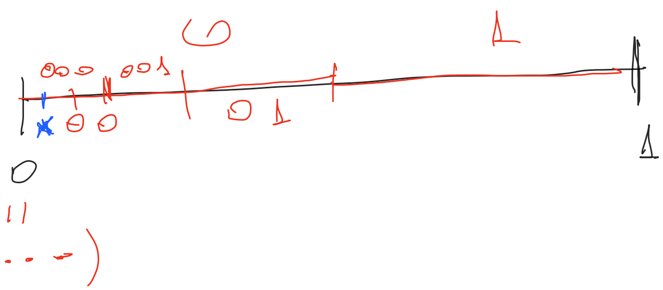
Se llama espacio de sucesiones de 2 símbolos.

Ej ① $s \in \Sigma_2$, $s = 0101010\ldots$

② $r \in \Sigma_2$, $r = 00000000\ldots$

③ $t \in \Sigma_2$, $t = 010010001000001\ldots$

obs los elementos del espacio de sucesiones de 2 símbolos Σ_2 son sucesiones infinitas en entradas que son 0 o 1.



Esta la representación en base 2 de un nº en [0,1].

Def (2) En general $\Sigma_n = \{ s = (s_0 s_1 s_2 \ldots) \ / \ s_i \in \{0, 1, \ldots n-1\} \}$

Dotamos a Σ_2 de una métrica $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}^+_0$ tal que

$$d[s,r] = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|s_i - r_i|}{2^i}$$

$s = s_0 s_1 s_2 \ldots$
$r = r_0 r_1 r_2 \ldots$

Prop: d es métrica.

(1) . $d[s,r] \geq 0$ ✓

$d[s, r] = 0 \iff s = r$ ✓

• $d(s,r) = 0$

(2) $d[s,r] = d[r,s]$ ✓

(3) $d[s,r] \leq d[s,t] + d[t,r]$ ✓

$|s_i - r_i| \leq |s_i - t_i| + |t_i - r_i| \quad \forall i$

obs Como $|s_i - r_i| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq d[s,r] \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Esto es que la distancia converge, entonces es una métrica acotada.

Ej: (1) calcula $d(s,t)$

$s = (000\ldots)$ y $t = (1010\ldots)$

$$d(s,t) = \sum^{\infty} |s_i - t_i| = \sum^{\infty} \frac{1}{} = \frac{1}{} = \frac{4}{}.$$

$$d(s,t) = \sum_{i=0} \frac{\quad}{2^i} = \sum_{i=0} \frac{\quad}{2^{2i}} \quad 1-\frac{1}{4} \quad 3$$

Como $i = \text{impar}$ $|s_i - t_i| = 0$

y si $i = \text{par}$ $|s_i - t_i| = 1$

¿Cuándo dos sucesiones s y t están cercanas?

Prop: sea s y $t \in \Sigma_2$ tq $s_i = t_i$ $\forall i \in \{0,1,\ldots,n\}$

$\Rightarrow d(s,t) \leq \frac{1}{2^n}$. Por otro lado, si

$d(s,t) < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ $\forall i \leq n$.

Dem: sup $s_i = t_i$ $\forall i \leq n$

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

$$= \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

$k = i-(n+1)$

$i = k+n+1$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}$$

- $\exists\, j \leq n$ tq $s_j \neq t_j \Rightarrow d(s,t) \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$

Así, si $d(s,t) < \frac{1}{2^n} \Rightarrow s_i = t_i \;\forall i \leq n$.

Ahora hablaremos de la aplicación que actúa en Σ_2, El mapa de cambios.

Def La aplicación shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es dada por

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 s_3 \dots) = s_1 s_2 s_3 s_4 \dots$$

"σ "olvida la primera entrada y se desplaza a la izquierda".

Obs: σ es una aplicación 2 a 1

pues $\sigma^{-1}(s_1 s_2 \dots) \to 0 s_1 s_2 \dots$, $1 s_1 s_2 \dots$

Prop $\sigma : (\Sigma_2, d) \to (\Sigma_2, d)$ es continua

Def (σ es continua si: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tq $\forall t, s \in \Sigma_2$

si $d(t,s) < \delta \Rightarrow d(\sigma(t), \sigma(s)) < \varepsilon$)

Considere $\varepsilon > 0$ y $s \in \Sigma_2$. Escojo n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Para $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$, tenemos que

$$d(s,t) < \delta = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Por prop anterior $\quad s_i = t_i \quad \forall\, i \le n+1$

$$\sigma(s) = \underbrace{s_1 s_2 \dots s_{n+1}}\, s_{n+2} \dots$$

$$\sigma(t) = (t_1 t_2 \dots t_{n+1}\, t_{n+2} \dots) \quad \text{Por prop}$$

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) < \frac{1}{2^n}$$

obs: Hemos construido un sistema dinámico continuo (Σ_2, σ).

Recordemos que el objetivo de los siguientes capítulos es comparar este sistema ... para mostrar

Con $([0,1], F_{\mu>4})$. Esto [illegible]

que hay propiedades dinámicas

que se prueban en (Σ_2, σ) y que

se pueden traspasar a $([0,1], F_\mu)$.

Ej: • $([0,1], F_\mu)$ los pts periódicos son densos

• (Σ_2, σ)

Veamos que en Σ_2 un elemento periódico

se ve de la forma

$$s = s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1} s_0 s_1 \dots s_{n-1} \dots$$

$$r = 001001001 \dots$$

Prop: (1) La cardinalidad de $Per_n(\sigma)$

es 2^n

(2) $\overline{Per(\sigma)} = \Sigma_2$

(3) $\exists$ una orbita densa en (Σ_2, σ).

~~Dem~~ Tarea.

$$Per(\sigma) = \{ s \in \Sigma_2 \,/\, \exists n \geq 1 \text{ tq } \sigma^n(s) = s \}$$

$$Per_n(\sigma) = \{ s \in \Sigma \,/\, \sigma^n(s) = s \}$$

$$\overline{Per(\sigma)} = Per(\sigma) \cup \{ \text{ptos limites en } \Sigma_2 \}$$

(3) $\exists x \in \Sigma_2$ tq $\overline{\{\sigma^n(x)\}} = \Sigma_2$

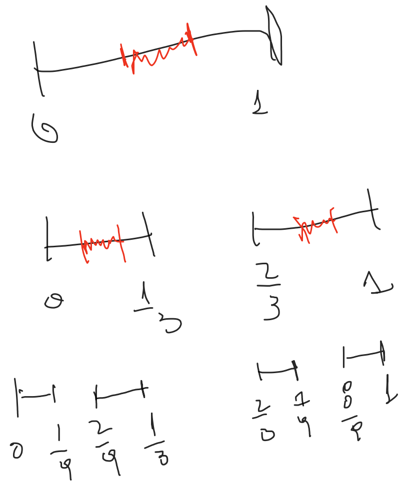
Cantor

$$\boxed{C = \bigcap_{n \geq 0} C_n}$$

$C_0 =$

$C_1 =$

$C_2 =$



⋮

$C_n = \dots$

↓

$F_\mu = \mu x(1-x)$

Cantor ternario

$$\boxed{C_i \subset C_{i-1}}$$

$F_\mu : [0,1]$?

$\mu > 4$