Familia cuadrática

martes, 6 de octubre de 2020 16:31

A continuación veremos la dinámica de una familia de aplicación y estudiaremos sus bifurcaciones.

Ej 1) $Q_c(x) = x^2 + c$, c es c

Pts fijos de la familia: $Q_c(x)$

$$x^2 + c = x$$

$$x^2 - x + c = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

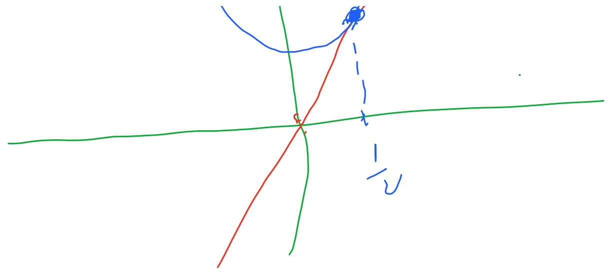
$\nearrow x = \frac{1+}{}$

$\searrow x =$

Vamos a estudiar $1-4c$ para ver si hay bifurcaciones.

Caso 1) $1-4c = 0 \implies c = \frac{1}{4}$

$\implies x = \frac{1}{}$



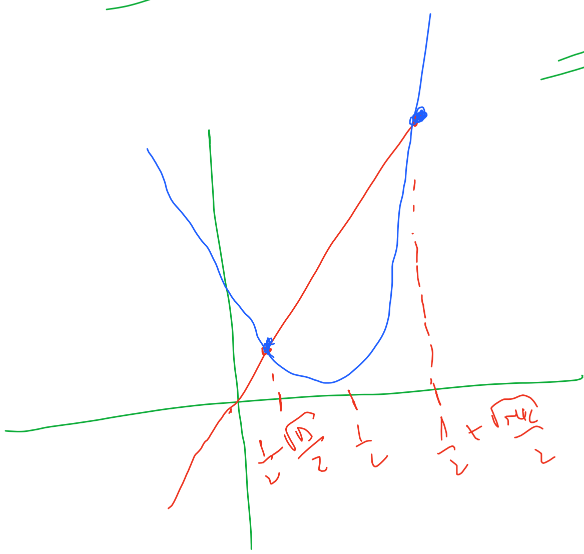
2

Caso 2) $1-4c > 0$ ⇒ 2 pt

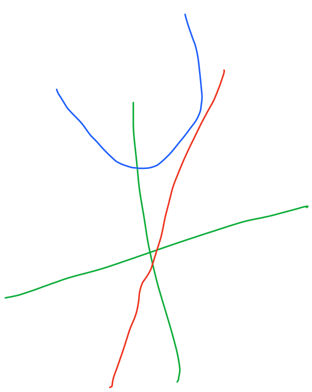
⇒ $c < \frac{1}{4}$ Rea

$x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{}$



Caso 3) $1-4c < 0$ ⇒ $c > \frac{1}{2}$



⇒ No hay ptos fi
reales

obs: Debido a que para dife
valores de c, cambia la

cantidad de pts fijos ...

nos dice que existen bifurcac...

② $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$, $\mu >$

Pts fijos: $F_\mu(x) = x$

$$\mu x(1-x) = x$$

$$\mu x - \mu x^2 - x = 0$$

$$x(\mu - 1 - \mu x) = 0$$

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{x_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu}}$$

Pts fijos

$|f'(p)|$

Naturaleza de ptos fijos (Atractor o repulsor o nada)

$$f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$$

pto fijo $\boxed{x=0}$ $\quad |F_\mu'(0)| = |\mu| = \mu.$

$\Rightarrow$ $x=0$ es repulsor

pto fijo $x_\mu = \dfrac{\mu-1}{\mu}$

$$\left|F_\mu'\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)\right| = \left|\mu - 2\mu \cdot \frac{\mu-1}{\mu}\right|$$
$$= |\mu - 2\mu + 2|$$
$$= |2-\mu|$$

Según sea μ, x_μ será repulsor, atractor o nada.

x_μ sea atractor

$$|F_\mu'(x_\mu)| < 1$$

$$|2-\mu| < 1$$

$$-1 < 2-\mu < 1$$

$$-3 < -\mu < -1$$

$$1 < \mu < 3$$

Para $\mu \in (1,3) \Rightarrow X_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ es

X_μ repulsor $\quad |F_\mu'(X_\mu)| >$

$$|2-\mu| > 1$$

$2-\mu > 1$ o $2-\mu < -1$

$1 > \mu \Rightarrow \boxed{\mu > 3}$

Por Hip $\mu > 1$

Para $\mu > 3 \Rightarrow X_\mu$ es repu

obs!! Si $\mu = 3$

$|F_\mu'(X_\mu)| = |2-\mu| =$

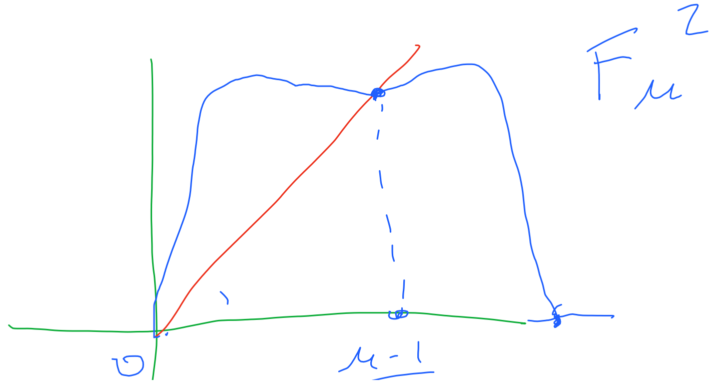
$|F_\mu'(x_\mu)| = 1$

ahí no sabemos qué es.

obs// Pese a que si μ cambia la cantidad de pts fijos se mantiene, la naturaleza del pto fijo es lo que cambia, a esto también se le llama bifurcación.

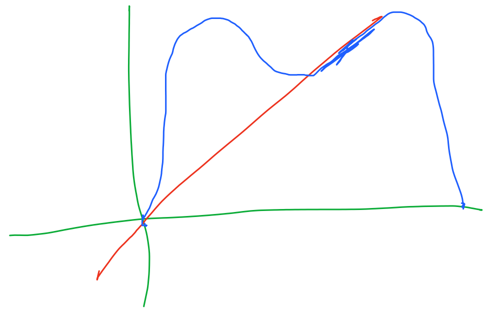
obs: El libro también estudia por medio de gráficos los pts fijos para $F_\mu^2(x)$, esto es los pts periódicos de periodo 2 de F_μ.

$\boxed{1 < \mu < 3}$

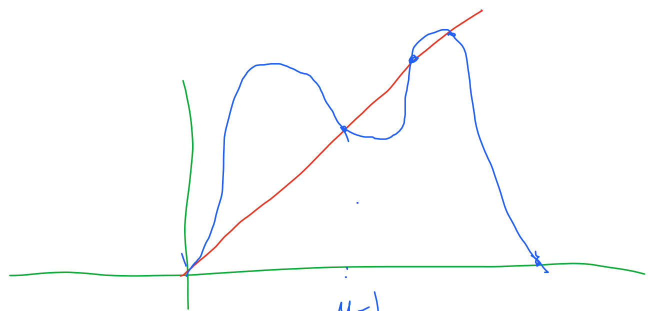


$$\frac{\quad 1 \quad}{\quad \mu}$$

$\boxed{\mu = 3}$



$\boxed{\mu > 3}$



$\frac{\mu-1}{\mu}$

$F_\mu = \mu x(1-x)$

Debido a que la familia cuadrática ilustra fenómenos de muchos sistemas dinámicos interesantes, vamos a continuar estudiándola en detall

Prop 1 i) $F_\mu(0) = 0 = F_\mu(1)$

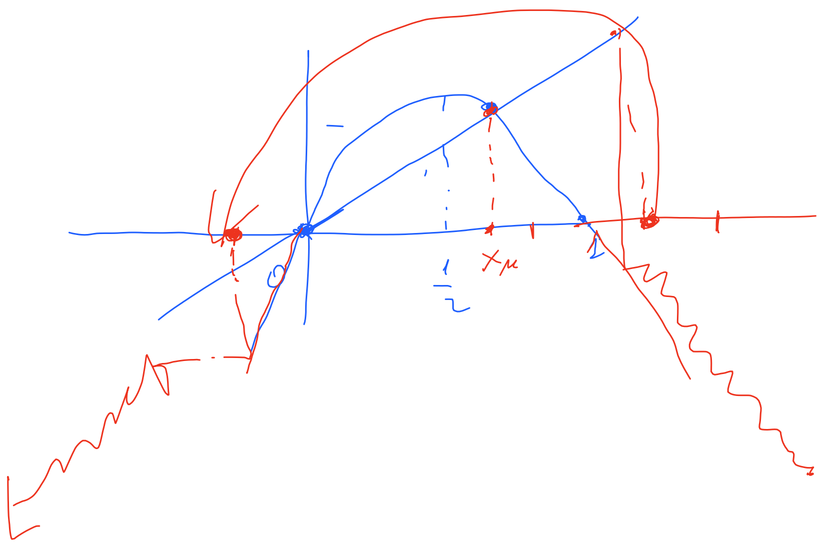
2i) si $\mu > 1$

$\Rightarrow 0 < x_\mu < 1$

Prop ② Suponga que $\mu > 1$

Si $x < 0 \Rightarrow F_\mu^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{}$

si $x > 1 \Rightarrow F_\mu^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{}$



Dem || Si $x < 0 \Rightarrow \mu x(1-x) <$

$\Rightarrow F_\mu(x) < x$

$\Rightarrow F_\mu^n(x) < F_\mu^{n-1}(x) < \cdots < F_\mu(x) < x$

F_μ^n decrece. $F_\mu^n(x) = F_\mu($

$< F$

$a \ -\infty$ $<$ ✓

a un pto x p

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^{n}(x) = p$$

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^{n+1}(x) = F_\mu \quad \times$$

Si $x > 1 \Rightarrow$ como $F_\mu(1) =$

$\Rightarrow F_\mu(x) < 0$

$\Rightarrow F_\mu^{n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$

Prop ③ Sea $1 < \mu < 3$, entonces

(i) F_μ tiene pto fijo atractor en $x_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ y repulsor $x=0$. ✓

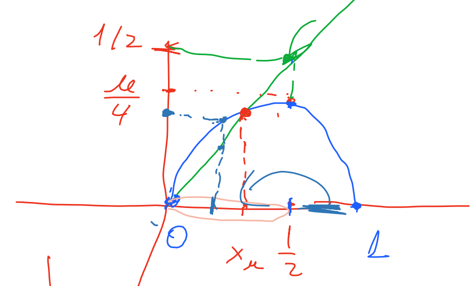
(ii) Si $0 < x < 1$

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = x_\mu .$$

Dem (2i) Para demostrar esto vamos a separar $\mu \in (1,3)$.

Si $\mu \in (1,2)$. | $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$

y $x \in (0, \frac{1}{2}]$



$$|F_\mu(x) - x_\mu| < |x - x_\mu| \quad , \quad x \neq x_\mu$$

$$\Rightarrow |F_\mu(x) - x_\mu| \leq \lambda |x - x_\mu| ,$$

donde $\lambda < 1$

$$\Rightarrow |F_\mu^n(x) - x_\mu| \leq \lambda |F_\mu^{n-1}(x) - x_\mu|$$

$$\leq \lambda^n |x - x_\mu|$$

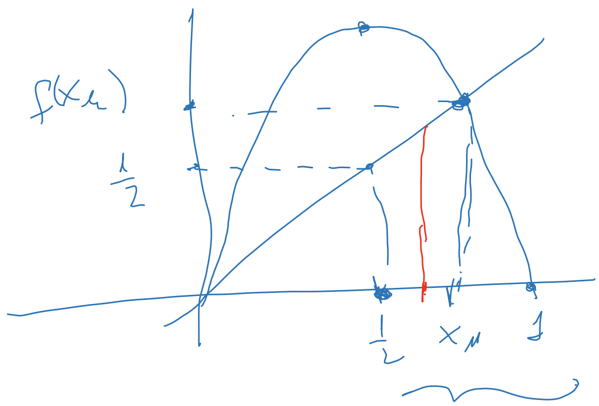
$$\left(\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = x_\mu \right)$$

Si $\mu < 2$

Si $x > \frac{1}{2}$ $\quad F_\mu\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right)\right) \subset \left(0, \frac{1}{2}\right.$

$$\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = x_\mu .$$

$2 < \mu < 3$



observe que

$$\frac{1}{2} < x_\mu < 1$$

denote $\hat{x}_\mu = f(x_\mu)$.

$\mu \in (1, 2)$

$\mu \in (2, 3)$

$$\Rightarrow F_\mu^n(\hat{x}_\mu) \to x_\mu$$

$$\Rightarrow F_\mu^{n+1}(x_\mu) \to x_\mu .$$

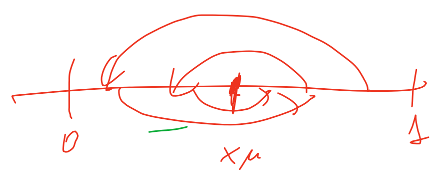
Si $x < \hat{x}_\mu \Rightarrow \exists\, K$ tq

$F_\mu^k(x) \to x_\mu$.

$\mu \in (1,3)$ $\quad x_\mu$ atrae

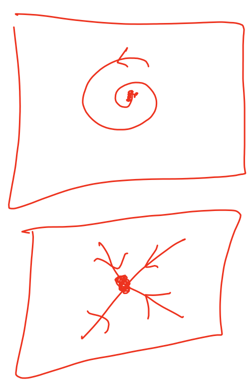
Si $\mu \in (1,2)$ $\quad x_\mu$ atrae de una forma

Si $\mu \in (2,3)$ $\quad x_\mu$ atrae de otra forma $\Big\}$ C^1



Obs: Esto también se le llama bifurcación.

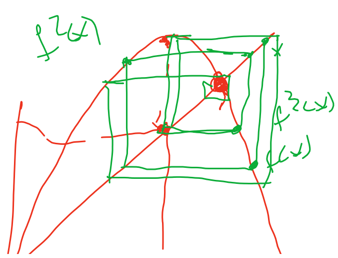
Sist.

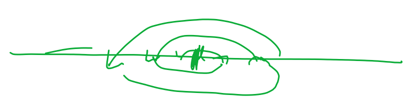


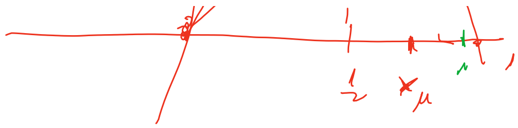
$\Big\}$ C^1 no parecido

$\mathbb{R}$

$2 < \mu < 3$







$F^n_\mu = id \rightarrow \mu$

Tercera lista evaluada

→ Hiperbolicidad Pag 30-31

Devaney.