Tarea 2

Dinámica Unidimensional - 2do semestre, 2020

Instrucciones: Escoger y grabar la solución de (sólo) un ejercicio. Enviar documento final en formato mp4 por correo a nelda.jaque@uchile.cl, con asunto "Tarea 2, Dinámica Unidimensional".

Fecha de entrega: Martes 6 de octubre, 23:59 hrs.

1. Usando el gráfico de la función, identifique los puntos fijos para cada una de las siguientes funciones.

   a) $C(x) = \cos(x)$

   b) $S(x) = \sin(x)$

   c) $E(x) = e^x$

   d) $F(x) = \frac{1}{e}e^x$

   e) $A(x) = \arctan(x)$

2. Enumere todos los puntos periódicos de cada una de las siguientes aplicaciones. Luego, use la gráfica de $f(x)$ para bosquejar el retrato de fase de $f(x)$ sobre el intervalo indicado.

   a) $f(x) = -\frac{1}{2}x$, $-\infty < x < \infty$

   b) $f(x) = -3x$, $-\infty < x < \infty$

   c) $f(x) = x - x^2$, $0 \leq x \leq 1$

   d) $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin(x)$, $0 \leq x \leq \pi$

   e) $f(x) = -x^3$, $-\infty < x < \infty$

   f) $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x)$, $-1 \leq x \leq 1$

3. Identifique el conjunto estable de cada uno de los puntos fijos para la aplicación del Ejercicio 2.

4. Para cada una de las siguientes funciones, enumere todos los puntos críticos y decida cuándo son degenerados o no-degenerados.

   a) $f(x) = x^3 - x$

   b) $f(x) = \sin(x)$

   c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

   d) $f(x) = x^3 + x^4$

5. Describa el retrato de fase de las aplicaciones del círculo dada por

$$f(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{n} + \epsilon \sin(n\theta),$$

para $0 < \epsilon < 1/n$.

6. Pruebe que un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ no puede tener puntos periódicos con primer periodo mayor o igual que 2. De un ejemplo de un homeomorfismo que tenga un punto periódico de periodo 2.

7. Pruebe que un homeomorfismo no puede tener puntos eventualmente periódicos.

8. Sea $S : S^1 \to S^1$ dado por $S(\theta) = \theta + \omega + \epsilon \sin(\theta)$, donde ω y ϵ son constantes. Pruebe que S es un homeomorfismo del círculo si $|\epsilon| < 1$.

9. Sea $f(\theta) = 2\theta$ la aplicación de S^1 discutida en el Ejemplo 3.4, página 18 de [1]. Pruebe que los puntos periódicos de f son densos en S^1.

10. Pruebe que los puntos fijos eventualmente periódicos para la aplicación del Ejercicio 9, también son densos en S^1.

Referencias

[1] Robert L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*