



Tarea 1

Dinámica Unidimensional - 2do semestre, 2020

Instrucciones: Escoger y resolver (sólo) tres ejercicios. Enviar documento final en formato pdf por correo a nelda.jaque@uchile.cl.

Fecha de entrega: Martes 22 de septiembre, 16:30 hrs.

1. Decida cuál de estas funciones es uno a uno, sobre, homeomorfismo o difeomorfismo sobre su dominio de definición.

- a) $f(x) = x^{5/3}$
- b) $f(x) = x^{4/3}$
- c) $f(x) = 3x + 5$
- d) $f(x) = e^x$
- e) $f(x) = 1/x$
- f) $f(x) = 1/x^2$

2. Identifique cuál de los siguientes subconjuntos en \mathbb{R} son cerrados o no.

- a) $\{x/x \text{ es entero}\}$
- b) $\{x/x \text{ es numero racional}\}$
- c) $\{x/x = \frac{1}{n} \text{ para algun natural } n\}$
- d) $\{x/\sin(\frac{1}{x}) = 0\}$
- e) $\{x/x \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$
- f) $\{x/\sin(\frac{1}{x}) > 0\}$

3. Pruebe que el conjunto de los números racionales de la forma $p/2^n$ para $p, n \in \mathbb{Z}$ es denso en \mathbb{R} .

El objetivo de los siguientes ejercicios es construir funciones especiales las cuales pueden ser usadas despues, cuando perturbamos ligeramente una función dada. Estas funciones son llamadas "bump functions". Defina

$$B(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

4. Bosqueje la gráfica de $B(x)$.

5. Pruebe que $B'(0) = 0$.
6. Pruebe inductivamente que $B^{(n)}(0) = 0$ para todo n . Concluya que $B(x)$ es una función C^∞ .
7. Modifique $B(x)$ para construir una función C^∞ que satisfice
 - a) $C(x) = 0$ si $x \leq 0$.
 - b) $C(x) = 1$ si $x \geq 1$.
 - c) $C'(x) > 0$ si $0 < x < 1$.
8. Modifique $C(x)$ para construir una *bump function* C^∞ $D(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, esto es, $D(x)$ satisfice
 - a) $D(x) = 1$ para $a \leq x \leq b$.
 - b) $D(x) = 0$ para $x < \alpha$ y $x > \beta$, donde $\alpha < a$ y $\beta > b$.
 - c) $D'(x) \neq 0$ sobre los intervalos (α, a) y (b, β) .
9. Use una bump function para construir un difeomorfismo $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ el cual satisfice $f'(a) = f'(b) = 1$ y $f(a) = c$, $f(b) = d$.