

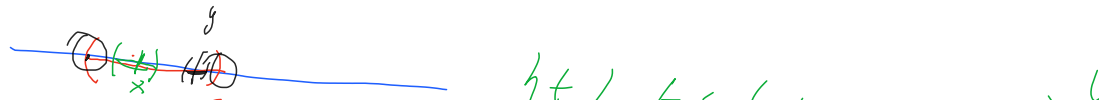
Preliminares del calculo (2)

martes, 8 de septiembre de 2020 16:34

Algunos conceptos de topología en los reales

Definiciones

- ① Sea $S \subset \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ es pto límite de S si existe una sucesión $\{x_n\} \in S$ que converge a x .
- ② S es un conjunto cerrado si contiene todos sus pto límites
- ③ $\underline{S} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto abierto si: $\forall x \in S$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{t \in \mathbb{R} \mid t \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}$ es abierto y está completamente contenido en S



②* $S \subset \mathbb{R}$ es cerrado si $\mathbb{R} \setminus S$ es abto. ... / $\cup (x - \epsilon, x + \epsilon)$

Prop: ① La intersección numerable de cerrados es cerrado
 ② La unión numerable de cerrados no necesariamente es cerrado

Ej $S = I_n = [\frac{1}{n}, 1]$ cerrado $\forall n \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 1]$ no es nec. cerrado.

③ La unión arbitraria de abtos es abto

④ La intersección arbitraria de abtos no es nec. abto.

Ej $J_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\} \quad \text{que es cerrado.}$$

Def : (4) Para $S \subset \mathbb{R}$, denotamos la clausura de S por \overline{S} que consiste de

$$\overbrace{\{ \text{todos los pts de } S \} \cup \{ \text{Pts límites de } S \} }$$

Ej : $\overline{(0,1)} = [0,1]$

(2) S es cerrado si: $\overline{S} = S$

(5) $U \subset S$ es denso en S si:
 $\overline{U} = S$

Ej (1) Cualquier conjunto S es denso en la clausura $\overline{S} = \overline{S}$

en \mathbb{R} ... 0 - 0

$$\textcircled{2} \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad (\text{métrica euclidiana})$$

$$\textcircled{3} \quad \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$$

Obs: No hay que pensar que los subconjuntos densos son arbitrariamente largos. Conjuntos abto y densos pueden ser bastante pequeños en el sentido de su longitud total.

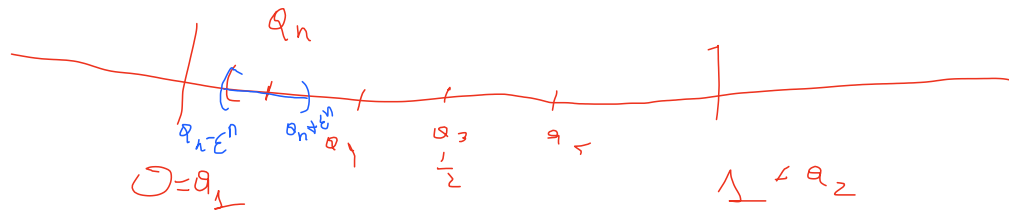
Ej: Este ejemplo muestra un abto y un denso dentro de $\mathbb{I} = [0, 1]$

Considera el conjunto racional en $[0, 1]$ ordenado por:

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

... Considera

Sea $\epsilon > 0$ suf. pequeño
 el intervalo abto de long. ϵ^n del
 n -ésimo término racional en la lista



Obs ① Si $S_n = (a_n - \epsilon^n, a_n + \epsilon^n)$

$\bigcup_{n \geq 1} S_n$ es abto

② $\overline{\bigcup_{n \geq 1} S_n} = \overline{I}$ es denso en \overline{I}

③ El largo total de $\overline{\bigcup S_n}$

U

es: menor que $\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

$n \geq 1$

$$\left| \bigcup_{n \geq 1} S_n \right| = \left| \bigcup_{n \geq 1} (a_n - \varepsilon^n, a_n + \varepsilon^n) \right|$$

$$\leq \sum | \cancel{a_n} - \varepsilon^n - \cancel{a_n} - \varepsilon^n |$$

$$\leq 2 \sum_{n \geq 1} \varepsilon^n = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$