

Preliminares del cálculo

viernes, 4 de septiembre de 2020 16:30

 $\mathbb{R}$ contexto $I, J \subset \mathbb{R}$ Mostrar Teo Intermedio medio Sea $f: I \rightarrow J$ continua $c \in I = [a, b]$

Suponga que $f(a) = u \neq f(b) = v$ y $\forall z$ entre u y v
 existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$.

Mostrar Teo Función implícitas Sea $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C¹

(i.e. Ambos derivados parciales existe y son continuos).

Suponga que G cumple

$$(1) \quad G(x_0, y_0) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

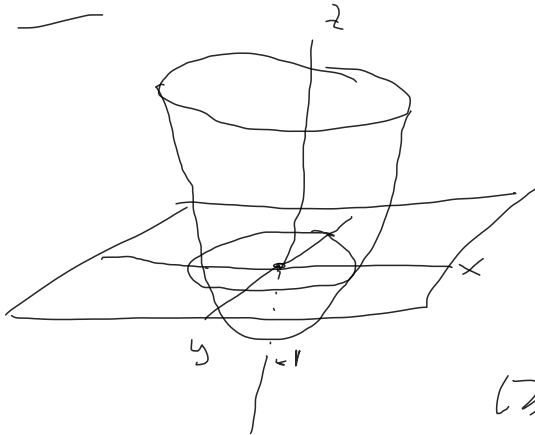
Entonces existe un vecindad de x_0 digamos I ,
 y un vecindad de y_0 digamos J y una
 función $p: I \rightarrow J$ tal que

$$(1) \quad p(x_0) = y_0$$

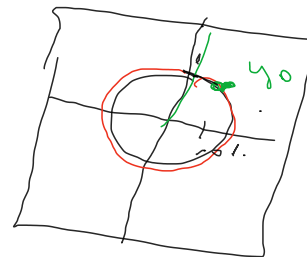
$$(2) \quad G(x, p(x)) = 0$$

Obs $G(x, y) = z$ func prop (1) y (2)
 $\Rightarrow y(x), z(x)$

Ej : ① $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ es $\checkmark$



Tip : $G(x_0, y_0) = 0$



$\rightarrow \text{gráf } G(x_0, y_0) = 0$

$$(2) \quad \frac{d}{dy} G(x_0, y_0) = 2y_0 \quad \underline{\text{obs}} \quad y_0 \neq 0$$

Si $y_0 > 0$, $\forall x$ cerca de x_0 ¿cómo es $p(x)$?

En este ejemplo lo podemos construir y llamarle

$\Rightarrow p(x) = \sqrt{1 - x^2}$ el cual es C^∞

Tesis : (1) $p(x_0) = y_0$

(2) $G(x, \sqrt{1-x^2}) = 0$ ✓

(2) $G(x, y) = \underline{x^5} y^4 - \underline{x} y^5 - y \underline{x^2} + 1$

2.1 ¿Vale Tco de función implícita?

2.2 ¿Se puede construir P ?

2.1 C.F.I Hip: (1) $G \in C^1$ ✓

(2) $G(x_0, y_0) = 0$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$

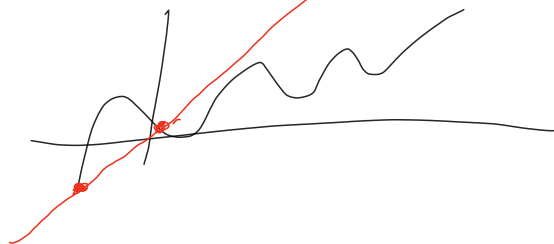
(3) $\frac{\partial G}{\partial y}(1, 1) = 4x^5 y^3 - 5xy^4 - x^2$
 $= -2 \neq 0$ ✓ (f.i.d.)

Vale T. F. I.

2.2 NO //

Puntos Fijos

Def: Sea $f: I \rightarrow I$. $x \in I$ es
punto fijo si $f(x) = x$

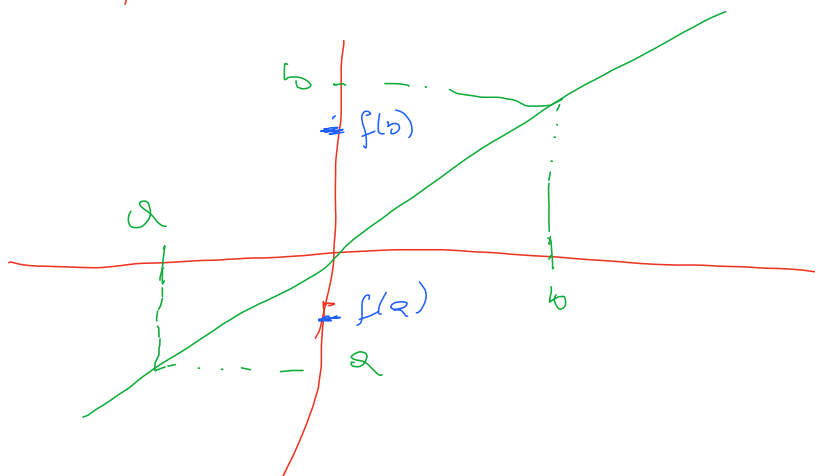


Lema (existencia de pts fijos).

sea $f: I \rightarrow I$ ($I = [a, b]$) continua
entonces existe $c \in I$ tal que $f(c) = c$.
(No nec. unico)

Dem (Usando Tco Valor intermedio)

// sea $g(x) = f(x) - x$ continua
 suponga que $f(a) > a$ y $f(b) < b$



$$\Rightarrow g(a) = f(a) - a > 0$$

$$\text{y } g(b) = f(b) - b < 0$$

Con esto consigo las h.p. del T.V. - Int (Bolzano)

$\Rightarrow \exists c$ entre a y b tq

$$g(c) = 0$$

$$f(c) = c$$

$$f(c) = c$$

$\Rightarrow$ existe un pto fijo.

Teo (unicidad del pto fijo)

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que
 $|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$ (*)

Entonces existe un único pto fijo y además

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall x \neq y \in I.$$

Dem: Por las anteriores como f es
 continua existe ~~al~~ $f(x) = x$.
unicidad Supongamos que $\exists y \neq x$ tal

$f(y) = y$. Como $|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$

f es C^1 en I , puedo usar el T.V.M

$$\Rightarrow \exists c \in I \quad \text{tg} \quad f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Como $x \neq y$ son fijos

$$\Rightarrow f'(c) = 1 \quad \text{X} \quad (c)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y} \quad \text{único} \quad \checkmark$$

Calculamos

$$|f(y) - f(x)| \stackrel{\text{M.V.M.}}{=} |f'(c)| |y - x| \stackrel{\text{contracción}}{<} |y - x| \quad \checkmark$$

(*) Contracción

Topología en $\mathbb{R}$

Definiciones

① Sea $S \subset \mathbb{R}$. Un pto $x \in \mathbb{R}$ es punto límite de S si existe una sucesión $\{x_n\}$ en S que converge a $x \in \mathbb{R}$.

② S es un cto cerrado si:
contiene a todos sus pto límites

Ej: ① Un intervalo cerrado es un cto cerrado en $\mathbb{R}$: $[a, b]$.

② $I_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n \geq 1$

Obs: ① La unión de intervalos cerrados no necesariamente es cerrado

no es ya un intervalo
 Considera $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = (0, 1]$ Este no es Cerrado.

(2) Lo intersección $\bigcap I_n$. En este ejemplo
 $I_{n+1} \subset I_n$