Cuerpos y Algebras.
Tarea 5

Diciembre 2, 2020

Justifique todas sus respuestas. Está permitido buscar información en internet, pero no preguntar a terceros (obviamente).

1. Recuerde que el discriminante de una ecuación cúbica con raices α_1, α_2 y α_3 se define por $d = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$. Sea K el cuerpo base y sea $F = K[\alpha_1]$. Probar que:
   - F/K es Galoisiana si y sólo si $d \in K$ es un cuadrado perfecto.
   - $F = K[\sqrt[3]{b}]$ para algún elemento $b \in K$ si y sólo si $-3d \in K$ es un cuadrado perfecto.
2. Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado cuatro. Sea α una raiz de f. Sea $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ y sea L el cuerpo de descomposición del polinomio. Probar que si L contiene una extensión cúbica de $\mathbb{Q}$ entonces K no contiene una extensión cuadrática de $\mathbb{Q}$.
3. Sea K un cuerpo y sea V un espacio vectorial de dimensión $n < \infty$ sobre K. Sea $\Lambda(V)$ el álgebra alternante de V. Calcule la dimensión de $\Lambda(V)$ como K-espacio vectorial.
4. Encuentre un polinomio cúbico $p(x)$ tal que, si β es una raiz real de p, entonces es posible construir, con regla y compás, un polígono regular de nueve lados, a partir de dos segmentos de longitud d y βd.