AYUDANTÍA 5.

Cálculo.
Segundo semestre 2020.
Profesor: Gonzalo Robledo Veloso.
Ayudante: Nicolás Rodríguez Águila.
21 de Octubre, 2020.

Definición:
Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ (I abierto, $I \subseteq \mathbb{R}$) es estrictamente creciente si para todo par $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$ se verifica $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.

Definición:
Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ (I abierto, $I \subseteq \mathbb{R}$) es estrictamente decreciente si para todo par $x_1 \in I$ y $x_2 \in I$ se verifica $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.

Teorema:
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ (I abierto, $I \subseteq \mathbb{R}$). Se tiene que:

a. Si $f'(x) > 0, \forall x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.

b. Si $f'(x) < 0, \forall x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.

Teorema: Criterio de la Primera Derivada.
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua y c tal que $f'(c) = 0$ o f no es derivable en c. Si f es derivable en I (con posible excepción de c), entonces:

a. Si $f'(x) < 0, \forall x < c$ y $f'(x) > 0, \forall x > c$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.

b. Si $f'(x) > 0, \forall x < c$ y $f'(x) < 0, \forall x > c$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

Definición:
Sea f derivable en un intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$. Se dice que la gráfica de f es:

a. Convexa si f' es estrictamente creciente en I.

b. Cóncava si f' es estrictamente decreciente en I.

Teorema: Criterio de convexidad.
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función cuya segunda derivada existe en el intervalo I. Entonces:

a. Si $f''(x) > 0, \forall x \in I$, entonces f es convexa en I.

b. Si $f''(x) < 0, \forall x \in I$, entonces f es cóncava en I.

Teorema: Criterio de la Segunda Derivada.
Sea $f : I\mathbb{R}$ (I intervalo abierto) tal que $x \in I$ y $f'(c) = 0$. Entonces:

a. Si $f''(x) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

b. Si $f''(x) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.

c. Si $f''(c) = 0$ entonces el criterio falla, f puede tener un máximo o mínimo relativo en $x = c$. En este caso es conveniente utilizar el Criterio de la Primera Derivada.

Ejercicio 1.
Demuestre que

$$|sin(a) - sin(b)| \leq |a - b|, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Solución:
Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sin(x)$.
Sabemos que f es continua en todo su dominio, en particular es continua en [b,a].
Sabemos que f es derivable en todo su dominio, en particular es diferenciable en]b,a[.
Entonces, por T.V.M., $\exists \alpha \in]b, a[$ tal que $\frac{\sin(a)-\sin(b)}{a-b} = f'(\alpha)$.
Se tiene que si $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$. En particular $f'(\alpha) = \cos(\alpha)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \tfrac{\sin(a)-\sin(b)}{a-b} &= \cos(\alpha) \\ \implies \sin(a) - \sin(b) &= \cos(\alpha)(a - b) \\ \implies |\sin(a) - \sin(b)| &= |\cos(\alpha)(a - b)| \\ \implies |\sin(a) - \sin(b)| &= |\cos(\alpha)||(a - b)| \end{aligned}$$

Sabemos que $|\cos(\alpha)| \leq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} |\sin(a) - \sin(b)| = |\cos(\alpha)||(a - b)| &\leq 1|a - b| \\ \implies |\sin(a) - \sin(b)| &\leq 1|a - b| \\ \implies |\sin(a) - \sin(b)| &\leq |a - b| \end{aligned}$$

Entonces queda demostrado el ejercicio.

Ejercicio 2.
Usando el signo de la derivada determine en qué intervalos la función, cuya regla de asignación es

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 3},$$

es estrictamente creciente y estrictamente decreciente.
Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + \tfrac{1}{2\sqrt{x^2+3}} \cdot 2x \\ \implies f'(x) &= \tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \tfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} \end{aligned}$$

Debemos ahora igualar la derivada a 0. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \tfrac{x}{\sqrt{x^2+3}} = 0 \\ &\iff x[\tfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \tfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}] = 0 \end{aligned}$$

Lo cual ocurre solo cuando $x = 0$, ya que la otra expresión es siempre mayor que cero.Luego:

- Si $x \in]-\infty, 0[$, entonces $f'(x) < 0$.
- Si $x \in]0, +\infty[$, entonces $f'(x) > 0$.

Finalmente, es posible concluir que la función f es estrictamente decreciente en $]-\infty, 0[$ y es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$.

Ejercicio 3.
Considere la función $f : \mathbb{R} - [0] \to]0, +\infty[$ con $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Encuentre puntos críticos y vea si son máximos o mínimos relativos. Estudie además los intervalos de convexidad y concavidad.
Solución:
Primero, buscaremos los puntos críticos de la función:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 1 - \tfrac{1}{x^2} \\
f'(x) = 0 &\iff 1 - \tfrac{1}{x^2} = 0 \\
&\iff \tfrac{1}{x^2} = 1 \\
&\iff 1 = x^2 \\
&\iff x = \pm 1
\end{aligned}
$$

Entonces, $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ son puntos críticos de f.
Tenemos también que

$$f''(x) = \tfrac{2}{x^3}$$

Entonces:

- $f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$. Por Criterio de la Segunda Derivada, se deduce que f tiene un mínimo relativo en $x = 1$.
- $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$. Por Criterio de la Segunda Derivada, se deduce que f tiene un máximo relativo en $x = -1$.

Analicemos ahora el signo de la segunda derivada, recordando que $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

- Si $x < 0$, entonces $f''(x) < 0$. Utilizando el criterio de convexidad, concluimos que f es cóncava en $]-\infty, 0[$.
- Si $x > 0$, entonces $f''(x) > 0$. Utilizando el criterio de convexidad, concluimos que f es convexa en $]0, +\infty[$

Ejercicio 4.
Sea $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ tal que $f(a + b) = f(a)f(b), \forall a, b \in \mathbb{R}$ y además

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{f(h) - 1}{h} = -1.$$

Sabemos que f es derivable en todo $\mathbb{R}$. Demuestre que se cumple que $f'(x) = -f(x)$, que f es estrictamente decreciente y que f es convexa.

Solución:

Sabemos que $\forall x, h \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x+h) = f(x)f(h) \implies f(h) = \frac{f(x+h)}{f(x)}$.

Reemplazamos esta ecuación en la entregada en la hipótesis:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{f(x)} - 1}{h} &= -1 \\
\implies \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}}{h} &= -1 \\
\implies \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{f(x)h} &= -1 \\
\implies \frac{1}{f(x)} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= -1 \\
\implies \frac{1}{f(x)} f'(x) &= -1 \\
\implies f'(x) &= -f(x)
\end{aligned}$$

Luego, sabemos que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto f es estrictamente decreciente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Además:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-f(x))' = -f'(x) = f(x)$$

Entonces, $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, de lo que se deduce que f es convexa, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 5.

Considere la función $g \colon \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ cuya regla de asignación es

$$g(x) = xf(x),$$

donde f es función descrita en el ejercicio 4.

Encuentre el o los puntos críticos de g y determine si son máximos o mínimos relativos. Determine en que intervalos la función g es cóncava hacia abajo y cóncava hacia arriba.

Solución:

Derivemos g para encontrar sus puntos críticos.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (xf(x))' \\
\implies g'(x) &= x'f(x) + xf'(x)
\end{aligned}$$

Sabemos que $f'(x) = -f(x)$, entonces:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= f(x) - xf(x) \\
\implies g'(x) &= f(x)(1-x)
\end{aligned}$$

Luego, tendremos que:

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 &\iff f(x)(1-x) = 0 \\
&\iff f(x) = 0 \lor 1 - x = 0
\end{aligned}$$

Pero $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces $x = 1$ es el único punto crítico de f. Analicemos ahora si corresponde a un mínimo o máximo relativo: para esto, calculamos la segunda derivada.

$$\begin{aligned}
g''(x) &= (f(x)(1-x))' \\
\implies g''(x) &= f'(x)(1-x) + f(x)(1-x)' \\
\implies g''(x) &= f'(x)(1-x) - f(x) \\
\implies g''(x) &= f(x)(-(1-x) - 1) \\
\implies g''(x) &= f(x)(-2+x)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$g''(1) = f(1)(-2+1) = -f(1)$$

Sabemos que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, por lo que $g''(1) < 0$, y según el Criterio de la segunda derivada, $x = 1$ corresponde a un máximo relativo.

Analicemos ahora la segunda derivada de g, $g''(x) = f(x)(x-2)$.

- Si $x < 2$, entonces $g''(x) < 0$. Entonces g es cóncava en $]-\infty, 2[$
- Si $x = 2$, entonces $g''(x) = 0$.
- Si $x > 2$, entonces $g''(x) > 0$. Entonces g es convexa en $]2, +\infty[$

Finalmente, como en $x = 2$ hay un cambio de convexidad, decimos que $x = 2$ corresponde a un punto de inflexión de g.