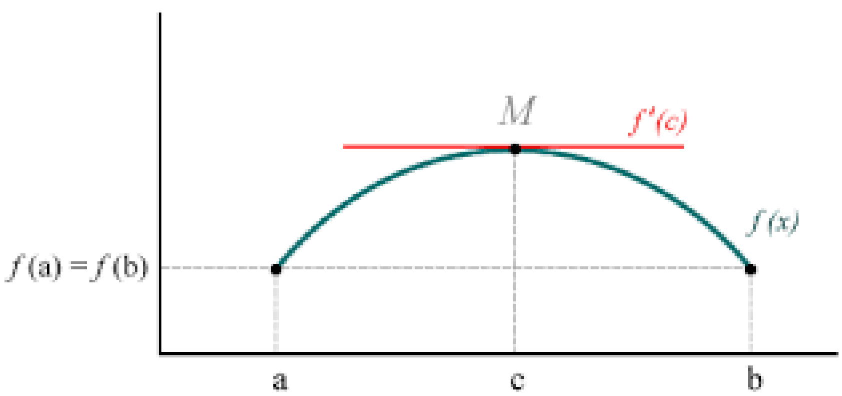
AYUDANTÍA 4.

Cálculo.
Segundo semestre 2020.
Profesor: Gonzalo Robledo Veloso.
Ayudante: Nicolás Rodríguez Águila.
07 de Octubre, 2020.

Teorema de Rolle.
Sea f una función de variable real. Supongamos que:

- f es continua en $[a, b]$
- f es derivable en]a,b[
- $f(a) = f(b)$

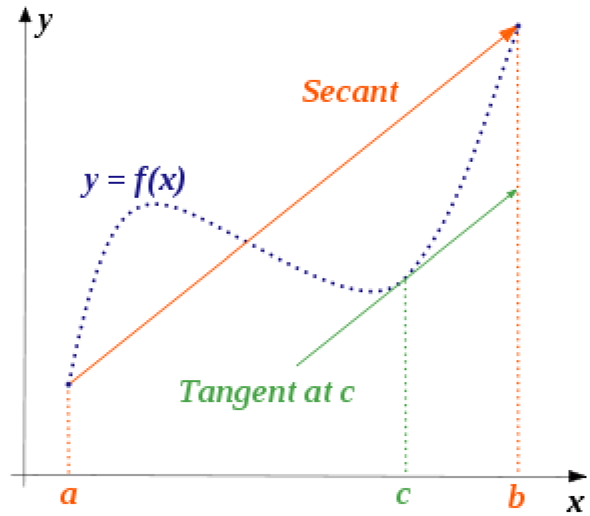
Entonces $\exists c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.



Teorema del Valor Medio (TVM).
Sea f una función de variable real. Supongamos que:

- f es continua en $[a, b]$
- f es derivable en $]a, b[$

Entonces, $\exists c \in]a, b[$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.



Ejercicios:

1. Si a_1, a_2 y a_3 son raíces de $p(x)$, con $a_1 < a_2 < a_3$, demuestre que $p'(x)$ tiene al menos dos raíces.
   Solución:
   Consideremos el intervalo $[a_1, a_2]$

   - p es un polinomio y es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular es continua $\forall x \in [a_1, a_2]$.
   - p es derivable en $]a_1, a_2[$.
   - a_1 y a_2 son raíces de $p(x)$
     $\implies p(a_1) = 0$ y $p(a_2) = 0 \implies p(a_1) = p(a_2)$

   Entonces, por Teorema de Rolle, $\exists \alpha_1 \in]a_1, a_2[$ tal que $p'(\alpha_1) = 0$, y por lo tanto α_1 es raíz de $p'(x)$.
   Consideremos el intervalo $[a_2, a_3]$

   - p es un polinomio y es continua $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular es continua $\forall x \in [a_2, a_3]$.
   - p es derivable en $]a_2, a_3[$.
   - a_2 y a_3 son raíces de $p(x) \implies p(a_2) = 0$ y $p(a_3) = 0 \implies p(a_2) = p(a_3)$

   Entonces, por Teorema de Rolle, $\exists \alpha_2 \in]a_2, a_3[$ tal que $p'(\alpha_2) = 0$, y por lo tanto α_2 es raíz de $p'(x)$.
   Finalmente, α_1 y α_2 son raíces de $p'(x)$, por lo que decimos que $p'(x)$ tiene al menos dos soluciones.

2. Demuestre utilizado el Teorema de Rolle que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene solo una raíz real.
   Solución:
   Definimos la función polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = 3x^5 + 15x - 8$.

- Sabemos que $p(0) = 3 \cdot 0^5 + 15 \cdot 0 - 8 = 0 + 0 - 8 = -8 < 0$
- Sabemos que $p(1) = 3 \cdot 1^5 + 15 \cdot 1 - 8 = 3 + 15 - 8 = 10 > 0$
- p es continua $\forall x \in \mathbb{R}$. En particular, p es continua en $[0, 1]$.

Entonces, por Teorema de Bolzano, $\exists c \in]0, 1[$ tal que $f(c) = 0$, por lo que $p(x)$ tiene, al menos, una solución real en $[0, 1]$.

Supongamos que existen a y b en $[0, 1]$ tal que $p(a) = p(b) = 0$ (es decir, a y b son raíces de p).

- p es continua en $[0, 1]$
- p es derivable en $]0, 1[$

Entonces, por Teorema de Rolle, $\exists \alpha \in]0, 1[$ tal que $p'(\alpha) = 0$.
Pero $p'(x) = 15x^4 + 15$. Luego:
$p'(x) = 0 \iff 15(x^4 + 1) = 0 \iff x^4 = -1$.
Esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$, ya que no existe ningún número (en los reales) que elevado a una potencia par resulte un número negativo.
Esto nos lleva a una contradicción ($\rightarrow\leftarrow$), la que se obtuvo de suponer que existían a y b tales que $f(a) = f(b)$. Entonces, no existen 2 soluciones en [0,1].
Para $x < 0$, $p(x) < 0$, y para $x > 1$, $p(x) > 0$, por lo que se deduce que no hay más soluciones.
Finalmente, la ecuación dada solo tiene una raíz real.

3. ¿Satisface la función $f(x) = 3x^2 - 5$ las hipótesis del Teorema del Valor Medio en [0,2]? Si es así, encuentre $\beta \in]0, 2[$ tal que $f(2) - f(0) = f'(\beta)(2 - 0)$.
   Solución:

   - f es continua en [0,2]
   - f es derivable en]0,2[

   Por Teorema de Valor Medio, $\exists \beta \in]0, 2[$ tal que $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = f'(\beta)$

   - $f(2) = 3 \cdot 2^2 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 7$
   - $f(0) = 3 \cdot 0^2 - 5 = -5$

   Luego:
   $\frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{7-(-5)}{2} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 = f'(\beta)$, y además $f'(x) = 6x$, por lo que se obtiene que $f'(\beta) = 6\beta$

   $$6 = 6\beta \implies \beta = 1.$$

4. Determine a y b para que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & si \quad x < 4 \\ \\ -x^2 + 10x - b & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[2, 6]$.
Solución:

- f debe ser una función continua en $[2, 6]$.
  f es continua en $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
  Tenemos que hacer que el límite exista:

  - $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} ax - 3 = 4a - 3$
  - $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} -x^2 + 10x - b = -(4)^2 + 10(4) - b = 24 - b$.

  Luego. el límite existirá sí y solo sí $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$

  $$\implies 4a - 3 = 24 - b \implies 4a + b = 27(1)$$

- f debe ser derivable en $]2, 6[$

  $$f'(x) = \begin{cases} a & si \quad x < 4 \\ \\ -2x + 10 & si \quad x \geq 4 \end{cases}$$

  La derivada (que recordemos se define a través del límite) existirá si el límite lateral por la izquierda es igual al límite lateral por la derecha, cuando $x \to 4$. Entonces:

  - $f'(4^-) = a$
  - $f'(4^+) = -2 \cdot 4 + 10 = +8 + 10 = 2$

  $$f'(4^-) = f'(4^+) \implies a = 2, \text{ y por lo tanto } b = 19 \text{ (reemplazando en (1))}.$$

Finalmente, los valores de a y b para que f cumpla con las hipótesis del Teorema del Valor Medio son $a = 2$ y $b = 19$.

5. Usando el Teorema del Valor Medio, demuestre que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \tfrac{1}{2N}, \forall n > N^2.$$

Solución:
Sea $f : \mathbb{R}^+ \cup 0 \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$.
En el intervalo [n,n+1] tenemos que:

- f es continua en [n,n+1]
- f es derivable en]n,n+1[

Entonces, por Teorema del Valor Medio, $\exists c \in]n, n+1[$ tal que $\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} = f'(c)$

$$\begin{aligned} &\implies \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} = f'(c) \\ &\implies \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{c}} (1) \end{aligned}$$

Sabemos que $c \in]n, n+1[$ y que $n > N^2$, entonces:

$$\begin{aligned} &N^2 < n < c < n+1 \\ &\implies N < \sqrt{n} < \sqrt{c} < \sqrt{n+1} \\ &\implies 2N < 2\sqrt{n} < 2\sqrt{c} < 2\sqrt{n+1} \\ &\implies \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2N} \end{aligned}$$

Luego, de la ecuación (1) se tiene que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2N}$.
Finalmente, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2N}$.