FACULTAD DE CIENCIAS UNIVERSIDAD DE CHILE

AYUDANTÍA 3.

Cálculo.
Segundo semestre 2020.
Profesor: Gonzalo Robledo Veloso.
Ayudante: Nicolás Rodríguez Águila.
30 de Septiembre, 2020.

Ejercicios.

1. ¿Para qué valores de a y b reales, los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3$ tienen una tangente en común en el punto $(2, 2)$?
   Recuerdo.
   Sea f una función derivable en x_0. La ecuación de la recta tangente a f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es:

   $$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

   donde $f'(x_0)$ es la pendiente de dicha recta tangente (interpretación geométrica de la derivada).
   Solución:
   Debemos encontrar las ecuaciones de ambas rectas tangentes en el punto $(2, 2)$ y luego igualarlas, ya que es lo que nos dice el enunciado.

   a. Sabemos que $f'(x) = 2x + a$. Además, $f'(2) = 4 + a$. Entonces, la ecuación de la recta tangente a f en $(2, 2)$ será:

   $$y_1 = 2 + (4 + a)(x - 2)$$
   $$y_1 = 2 + 4x - 8 + ax - 2a$$
   $$y_1 = (4 + a)x + (-6 - 2a)$$

   b. Sabemos que $g'(x) = 3x^2$. En particular, $g'(2) = 12$. Entonces, la ecuación de la recta tangente a g en $(2, 2)$ será:

   $$y_2 = 2 + (12)(x - 2)$$
   $$y_2 = 2 + 12x - 24$$
   $$y_2 = (12)x + (-22)$$

   Ahora que tenemos ambas ecuaciones de la recta, podemos igualarlas. De este procedimiento, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\left.\begin{matrix} 4+a=12 \\ -6-2a=-22 \end{matrix}\right\}$$

   Cuya solución es $a = 8$. Finalmente, los valores a y b para que las rectas tangentes a f y g en el punto $(2, 2)$ sean iguales es $a = 8$ y $b \in \mathbb{R}$ (no tiene restricciones).

2. Calcule:

   a. La primera derivada de la función $f(x) = \frac{x+\cos^3(x)}{1+\cos^3(x)}$
   Solución:
   $f'(x) = \frac{(x+\cos^3(x))'(1+\cos^3(x))-(x+\cos^3(x))(1+\cos^3(x))'}{(1+\cos^3(x))^2}$
   $= \frac{(1+3\cos^2(x)[\cos(x)]')(1+\cos^3(x))-(x+\cos^3(x))(3\cos^2(x)[\cos(x)]')}{(1+\cos^3(x))^2}$
   $= \frac{(1-3\cos^2(x)\sin(x))(1+\cos^3(x))-(x+\cos^3(x))(-3\cos^2(x)\sin(x))}{(1+\cos^3(x))^2}$
   $= \frac{1+\cos^3(x)-3\cos^2(x)\sin(x)-3\cos^5(x)\sin(x)+3x\cos^2(x)\sin(x)+3\cos^5(x)\sin(x)}{(1+\cos^3(x))^2}$
   $= \frac{1-3\cos^2(x)\sin(x)+3x\cos^2(x)\sin(x)+\cos^3(x)}{(1+\cos^3(x))^2}$
   Por lo tanto:
   $$f'(x) = \frac{1-3\cos^2(x)\sin(x)+3x\cos^2(x)\sin(x)+\cos^3(x)}{(1+\cos^3(x))^2}$$

   b. Si $f(x) = \sin(\sin(x))$, demuestre que $f''(x) + \tan(x)f'(x) + f(x)\cos^2(x) = 0$.
   Solución:
   Necesitamos calcular $f'(x)$ y $f''(x)$. Entonces:
   $f'(x) = \cos(\sin(x))(\sin(x))'$
   $= \cos(\sin(x))\cos(x)$

   $f''(x) = [\cos(\sin(x))]'\cos(x) + \cos(\sin(x))[\cos(x)]'$
   $= -\sin(\sin(x))(\sin(x))'\cos(x) + \cos(\sin(x)) - \sin(x)$
   $= -\sin(\sin(x))\cos^2(x) - \cos(\sin(x))\sin(x)$

   Entonces:
   $f''(x) + \tan(x)f'(x) + f(x)\cos^2(x)$
   $= -\sin(\sin(x))\cos^2(x) - \cos(\sin(x))\sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos(\sin(x))\cos(x) + \sin(\sin(x))\cos^2(x)$
   $= 0.$

   c. La primera derivada de la función $g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$
   Solución:
   $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}(x + \sqrt{x^2+1})'$
   $= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)')$
   $= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$
   $= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}} + \frac{x}{2\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}}$

3. Resuelve los siguientes límites:

   a. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{\sin(4x)}$
   Solución:

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}x}{\cos(x)4x\frac{\sin(4x)}{4x}}$

Antes de seguir, verificaremos la existencia de los siguientes límites:

i. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$

ii. $\lim_{x\to 0} x = 0$

iii. $\lim_{x\to 0}\cos(x) = 1$

iv. $\lim_{x\to 0} 4x = 0$

v. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x} = 1$ (Se resuelve utilizando la sustitución u=4x, sabiendo que si x tiende a 0, u también lo hará).

Luego, como estos límites existen, es que podemos realizar lo siguiente:

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{x}x}{\cos(x)4x\frac{\sin(4x)}{4x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\lim_{x\to 0}x}{\lim_{x\to 0}\cos(x)\lim_{x\to 0}4x\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}} = \frac{1\cdot\lim_{x\to 0}x}{1\cdot\lim_{x\to 0}4x\cdot 1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Finalmente,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{\sin(4x)} = \frac{1}{4}$$

b. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi}$

Solución:

Sea $u = x-\pi \implies x = u+\pi$. Además, si $x\to\pi \implies u\to 0$

Reemplazando:

$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin(u+\pi)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{-\sin(u)}{u} = -1\cdot 1 = -1$

Finalmente,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi} = -1$$

c. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\frac{h}{2})-f(x_0)}{h}$, sabiendo que f es derivable en x_0.

Solución:

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\frac{h}{2})-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\frac{h}{2})-f(x_0)}{\frac{2h}{2}}$

Sea $u = \frac{h}{2}$. Notemos que si $h\to 0 \implies u\to 0$. Reemplazando:

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\frac{h}{2})-f(x_0)}{\frac{2h}{2}} = \lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{2u} = \frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u} = \frac{1}{2}f'(x_0)$

Finalmente,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\frac{h}{2})-f(x_0)}{h} = \frac{1}{2}f'(x_0)$$

AYUDANTÍA 3.

4. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones:

   a. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
   Solución:
   $f'(x) = \frac{1'(1+x^2)-1(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
   x es punto crítico de $f \iff f'(x) = 0$, entonces:
   $f'(x) = 0 \iff \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0$
   $\iff -2x = 0$
   $\iff x = 0$
   Por lo tanto x=0 es un punto crítico de f.

   b. $f(x) = \sin(2x)$
   Solución:
   $f'(x) = \cos(2x)(2x)' = 2\cos(2x)$
   $f'(x) = 0 \iff 2\cos(2x) = 0$
   $\iff \cos(2x) = 0$
   Sea $\theta = 2x(\implies x = \frac{\theta}{2})$ Se tiene que:
   $\cos(\theta) = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
   Luego $x = \frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$, son los puntos críticos de f.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que si $f(x + \omega) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(x + \omega) = f'(x)$
   Demostración:
   $f'(x+\omega) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((x+\omega)+h)-f(x+\omega)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((x+h)+\omega)-f(x+\omega)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f((x+h))-f(x)}{h} = f'(x)$.
   Observación:
   Esta enunciado quiere decir que si una función f es derivable y periódica, entonces su derivada también será periódica. Por ejemplo, $f(x) = \sin(x)$.