

Profesor: M. I. Molina

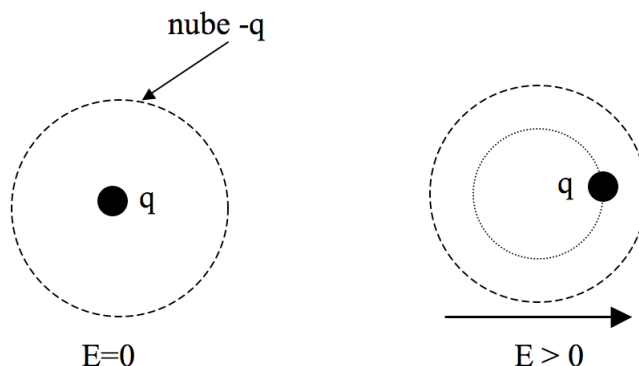
Ayudante: C. Aravena

Guía Óptica no lineal

1. Considere un modelo primitivo de átomo (neutro) consistente en una carga q rodeada de una distribución continua de carga negativa $\rho(r) = A r \exp(-r/r_0)$, donde A y r_0 son constantes. Calcule las susceptibilidades atómicas de primer, segundo y tercer orden $\chi^{(j)}$, definidas por

$$p(E) \approx \chi^{(1)} E + \chi^{(2)} E^2 + \chi^{(3)} E^3$$

donde $p(E)$ es el momento dipolar inducido por la presencia de un débil campo externo aplicado E . Exprese las susceptibilidades en términos de q y r_0 . Existe un campo externo crítico, mas allá del cual no es posible establecer una situación de equilibrio?



Considere el siguiente índice de refracción obtenido de un modelo de Lorentz, para un sistema con muchas frecuencias de resonancia:

$$n^2 \approx 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

(donde se ha tomado $\gamma_j \sim 0$). Usando $n^2 = \epsilon/\epsilon_0$, exprese $\epsilon - \epsilon_0$ (que es real) como una integral sobre frecuencias. A partir de este resultado y usando las relaciones de Kramers-Kronig, obtenga una expresión para la parte imaginaria de ϵ , como función de ω . Luego, utilizando $\sum_j f_j = 1$, encuentre el valor de $\int_0^\infty \omega \text{Im}[\epsilon(\omega)] d\omega$ en forma cerrada.

2. **(Tarea)** Sea el índice de refracción de un cierto medio no lineal una función de la longitud de onda: $n(\lambda_0) \approx n_0 - \xi \lambda_0$, donde λ_0 es la longitud de onda en el espacio vacío y n_0 y ξ son constantes. Muestre que tres ondas de longitudes de onda λ_{01} , λ_{02} y λ_{03} viajando en la misma dirección no pueden ser acopladas eficientemente por el efecto no lineal de segundo orden. Sería posible el acoplamiento eficiente si una de las ondas viajara en la dirección opuesta?
3. **(Tarea)** Al considerar el problema de la conjugación de fase mediante mezcla de cuatro ondas degeneradas, es posible obtener que las envolventes de las ondas “pump” evolucionan desacopladas de la onda entrante y la onda conjugada, satisfaciendo

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{6\pi i \omega}{nc} \chi^{(3)} [|A_1|^2 + 2|A_2|^2] A_1$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{-6\pi i \omega}{nc} \chi^{(3)} [|A_2|^2 + 2|A_1|^2] A_2$$

Demuestre, a partir de estas ecuaciones que $|A_1|^2$ y $|A_2|^2$ son constantes en el espacio.

4. Considere la ecuación no lineal de Schrödinger

$$i \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{1}{2} k_2 \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (1)$$

(a) Demuestre que

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau |A(z, \tau)|^2 \quad (2)$$

y

$$H = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ k_2 \left| \frac{\partial A(z, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 + \gamma |A(z, \tau)|^4 \right\} \quad (3)$$

son constantes de movimiento (o sea, $(dN/dz) = 0$ y $(dH/dz) = 0$).

(b) Demuestre que $A(z, \tau) = A^0 \operatorname{sech}(\tau/\tau_0) e^{i\kappa z}$ es solución. Encuentre τ_0 y κ como función de A^0 .

5. Complete lo visto en clases y deduzca las 3 ecuaciones de onda acopladas para la generación de suma de frecuencias, o sea, las ecuaciones satisfechas por dA_1/dz , dA_2/dz y dA_3/dz . El método consiste en usar la ecuación de onda no lineal y la aproximación de amplitud lentamente variable.
6. Considere el proceso de generación de segunda armónica dentro de un medio cuadrático de extensión L , vista en clases. Si escribimos los campos como $E_j(z, t) = A_j(z) \exp(i(k_j z - \omega_j t) + c.c.)$, donde $j = 1, 2$, después de reemplazar en la ecuación de ondas, se arriva al siguiente sistema acoplado para la evolución dentro del medio no lineal de las envolventes lentamente variables $A_1(z)$, $A_2(z)$:

$$\frac{i}{dz} \frac{dA_1}{dz} = \frac{-16 \pi \omega_1^2 \chi^{(2)}}{k_1 c^2} A_2 A_1^* \exp(-i\Delta k z) \quad (4)$$

$$\frac{i}{dz} \frac{dA_2}{dz} = \frac{-8 \pi \omega_2^2 \chi^{(2)}}{k_2 c^2} A_1^2 \exp(i\Delta k z) \quad (5)$$

donde $\Delta k \equiv 2k_1 - k_2$. Las intensidades (energía por unidad de tiempo y unidad de área) vienen dadas por $I_j = (n_j c / 2\pi) |A_j|^2$. Usando las condiciones iniciales $A_1(0) = \sqrt{A_0}$ y $A_2(0) = 0$, **integre numéricamente** estas ecuaciones y **grafique** $I_2(z)/A_0$ vs (z/L) , para $L \Delta k = 0, 2, 10, 20$.

7. Considere la ecuación no lineal de Schrodinger para un sistema de guías ópticas acopladas:

$$i \frac{dC_n}{dz} + V(C_{n+1} + C_{n-1}) + \gamma |C_n|^2 = 0 \quad (6)$$

Demuestre que

$$N \equiv \sum_n |C_n(t)|^2 \quad (7)$$

and

$$H = \sum_n \{V(C_n C_{n+1}^* + C_n^* C_{n+1}) + (\gamma/2) |C_n|^4\} \quad (8)$$

son constantes de movimiento.

8. Considere la ecuación anterior para 2 sitios:

$$i \frac{dC_1}{dz} + V C_2 + \gamma |C_1|^2 = 0, \quad i \frac{dC_2}{dz} + V C_1 + \gamma |C_2|^2 = 0 \quad (9)$$

Asuma como condición inicial $C_1(0) = 1$ y $C_2(0) = 0$.

- (a) Grafique $|C_1(t)|^2$ y $|C_2(t)|^2$ como función de t , para varios valores de $0 < \gamma < 8$
(b) Grafique el *promedio temporal* de $|C_1(t)|^2$ vs el parámetro no lineal γ . Haga un barrido en $0 < \gamma < 8$ e identifique la transición de atrapamiento de potencia óptica.

Los problemas de tarea deben entregarse a mas tardar el 11 de Agosto