

Topología

Luis Arenas

December 16, 2019

Contents

1	Conjuntos abiertos y vecindades	3
2	Continuidad	10
3	Redes	16
4	Filtros y Ultrafiltros	32
5	Topología inducidas y co-inducidas	41
6	Axiomas de separación	52
7	Compacidad	59
8	Compacidad secuencial	70
9	Espacios conexos	74
10	Espacios arco-conexos	81
11	Espacios totalmente desconexos	89
12	Grupos Topológicos	97
13	Homotopías	111
14	La propiedad de extensión de homotopías	127
15	El grupo fundamental	141

16	Triangulaciones y homotopías explícitas	151
17	El teorema de Van Kampen.	159
18	Recubrimientos	176
19	Acciones propiamente discontinuas	189
20	El teorema de clasificación de superficies.	194
21	Teorías de homología.	195
22	Homotopías de Cadenas.	207
23	Sucesiones exactas de grupos de homología.	218
24	Teoría del grado y homología celular.	227
25	Cohomología.	244

Chapter 1

Conjuntos abiertos y vecindades

Un espacio topológico se define como un par (X, τ) donde τ es una colección de subconjuntos de X llamados abiertos, tales que:

1. Si $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son elementos de τ , también lo es $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$.
2. Si $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de elementos de τ , también $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ es un elemento de τ .
3. El conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto X mismo son elementos de τ .

Si un mismo conjunto X tiene dos topologías τ y τ_0 , diremos que τ_0 es mas fina que τ si $\tau_0 \supseteq \tau$.

ejemplo 1.1. En todo conjunto X existe la topología indiscreta $\{X, \emptyset\}$ y la topología discreta $\wp(X)$ formada por todos los subconjuntos de X . La topología indiscreta es la menos fina de todas las topologías de X y la discreta la más fina.

ejemplo 1.2. En el conjunto $S = \{1, 2\}$ existe la topología

$$\tau = \left\{ \{1\}, S, \emptyset \right\}$$

llamada la topología de Sierpinski.

ejemplo 1.3. En todo conjunto X existe la topología

$$\tau = \{T \subseteq X | T^c \text{ es finito}\}$$

llamada la topología cofinita. La topología conumerable se define análogamente.

Si (X, τ) es una topología, los conjuntos de la forma $\mathcal{O}^c$ con $\mathcal{O} \in \tau$ se denominan los conjuntos cerrados de la topología. El conjunto $\bar{\tau} = \{\mathcal{O}^c | \mathcal{O} \in \tau\}$ determina únicamente a la topología τ . Los elementos de $\bar{\tau}$ satisfacen las condiciones siguientes:

1. Si C_1 y C_2 son elementos de $\bar{\tau}$, también lo es $C_1 \cup C_2$.
2. Si $\{C_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de elementos de $\bar{\tau}$, también $\bigcap_{i \in I} C_i$ es un elemento de $\bar{\tau}$.
3. Si $\emptyset$ y X son elementos de $\bar{\tau}$.

Además, estas condiciones son suficientes para que una colección $\bar{\tau}$ de subconjuntos de un espacio X sea la colección de subconjuntos cerrados de alguna topología.

Si x es un elemento del espacio X , la colección

$$V(x) = \{U \subseteq X | \exists \mathcal{O} \in \tau \text{ tal que } x \in \mathcal{O} \subseteq U\}$$

se llama la colección de vecindades de x en X (con respecto a τ). El conjunto $V(x)$ satisface las condiciones siguientes:

1. Si U_1 y U_2 son elementos de $V(x)$, también lo es $U_1 \cap U_2$.
2. Si U es un elemento de $V(x)$, y si $U \subseteq W$, entonces también W es un elemento de $V(x)$.
3. X es un elemento de $V(x)$.

Además, si a cada elemento x de X se le asigna un conjunto $V(x)$ con las 3 propiedades indicadas entonces

$$\tau = \{\mathcal{O} \subseteq X | \mathcal{O} \in V(x) \text{ para todo } x \in \mathcal{O}\}$$

define una topología en X . Esto se comprueba fácilmente como sigue:

- Si $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de elementos de τ , entonces cada punto x de $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ está contenido en algún $\mathcal{O}_i$, luego por definición $\mathcal{O}_i \in V(x)$ y con mayor razón $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i \in V(x)$.
- Si $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ son elementos de τ , cada elemento x de $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ está en ambos $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$, luego por definición $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in V(x)$ de donde $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in V(x)$.
- $X \in V(x)$ para todo x , luego en particular $X \in \tau$. La afirmación correspondiente sobre $\emptyset$ es vacua y por lo tanto $\emptyset \in \tau$.

Sin embargo, los conjuntos $V(x)$ originales no son necesariamente los conjuntos de vecindades de esta topología. Por ejemplo, si $X = \{x, y, z\}$ y se define

$$V(x) = \{X, \{x, y\}\}, \quad V(y) = V(z) = \{X\},$$

entonces la topología definida de este modo es $\tau = \{\emptyset, X\}$, por lo que $\{x, y\}$ no es una vecindad de x . Para que las vecindades de la nueva topología sean las esperadas, es necesario suponer que:

Para cada U en $V(x)$ existe un elemento $\mathcal{O} \in V(x)$ que está contenido en U y satisface la condición siguiente:

$$\forall y \in \mathcal{O} \left(\mathcal{O} \in V(y) \right).$$

Dicho en otras palabras, cada vecindad debe contener una vecindad abierta. Es inmediato que si esta condición se satisface las colecciones $V(x)$ son de hecho los conjuntos de vecindades de la topología τ definida mas arriba. Dejamos como ejercicio al lector comprobar que la topología τ_1 es mas fina que la topología τ_2 si y sólo si para cada x se tiene $V_1(x) \supseteq V_2(x)$ donde $V_i(x)$ es la colección de vecindades de x con respecto a la topología τ_i ($i = 1, 2$).

Para cada subconjunto A de X se define su interior A° y su clausura $\bar{A}$ por

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{\mathcal{O} \subseteq A \\ \mathcal{O} \text{ Abierto}}} \mathcal{O}, \quad \bar{A} = \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ Cerrado}}} C.$$

Si $B = A^c$, entonces $\bar{B} = (A^\circ)^c$ y $\bar{A} = (B^\circ)^c$ (ejercicio). Para un subconjunto A de X se define su frontera por $\delta A = \bar{A} \cap \bar{A}^c$.

Proposición 1.4. Si A y B son subconjuntos de X con $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Demostración

$$\bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ Cerrado}}} C \subseteq \bigcap_{\substack{C \supseteq B \\ C \text{ Cerrado}}} C,$$

ya que los conjuntos intersectados a la derecha son una subcolección de los que se intersectan a la izquierda. $\square$

Proposición 1.5. *Si A y B son subconjuntos de X con $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.*

Demostración Si $A \subseteq B$, entonces $A^c \supseteq B^c$, de donde $\overline{A^c} \supseteq \overline{B^c}$, y tomando complementos se tiene $A^\circ \subseteq B^\circ$. $\square$

Corolario 1.5.1. $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demostración Por la proposición, se tiene

$$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B}.$$

$\square$

Corolario 1.5.2. $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demostración Por la proposición, se tiene que

$$\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \quad \text{y} \quad \overline{A \cup B} \supseteq \overline{B}.$$

$\square$

Tomando complementos en ambos corolarios, se tiene:

Corolario 1.5.3. $(A \cap B)^\circ \supseteq A^\circ \cap B^\circ$ y $(A \cup B)^\circ \subseteq A^\circ \cup B^\circ$.

Una manera alternativa de definir la clausura es la siguiente:

Proposición 1.6. *Un elemento x de X está en $\overline{A}$ si y sólo si cada vecindad de x contiene puntos de A .*

Demostración Si existe una vecindad U de x que no contiene puntos de A , entonces tomando una vecindad menor si es necesario podemos suponer que U es abierto, luego U^c es un cerrado que contiene a A y no a x , luego $\overline{A} \subseteq U^c$, por lo que $\overline{A}$ no contiene a x . Por otro lado, si x no está en $\overline{A}$, entonces $(\overline{A})^c$ es un abierto que contiene a x (luego es una vecindad de x) y no contiene puntos de A . $\square$

Proposición 1.7. Si A y B son subconjuntos de X , entonces $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Demostración Basta ver que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ y el resto se obtiene de los corolarios y tomando complementos. Si x es un punto de $\overline{A \cup B}$, entonces cada vecindad de x contiene puntos de A o de B . Si hay una vecindad U que no contiene puntos de A y una vecindad W que no contiene puntos de B , entonces $U \cap W$ no contiene puntos de ninguno, lo que contradice la afirmación anterior. Se sigue que cada vecindad de x contiene puntos de A o que cada vecindad de x contiene puntos de B . En cualquier caso $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. $\square$

Bases

Una Colección $\mathfrak{B}$ de subconjuntos abiertos de un espacio topológico (X, τ) se llama base de la topología τ si cada elemento de τ es una unión de elementos de $\mathfrak{B}$. En particular, si $\mathfrak{B}$ es una base de una topología τ , se tiene que si B_1 y B_2 son elementos de $\mathfrak{B}$, entonces $B_1 \cap B_2$ es unión de elementos de $\mathfrak{B}$ (por ser un elemento de τ). Por otro lado, cualquier colección $\mathfrak{B}$ de subconjuntos de un conjunto X que satisface esta propiedad es base de una topología τ definida por

$$\tau = \left\{ \bigcup_{B \in T} B \mid T \subseteq \mathfrak{B} \right\}.$$

Es claro que τ así definida satisface las propiedades 2 y 3 de la definición de topología. Satisface también la propiedad 1 ya que

$$\left(\bigcup_{B \in T} B \right) \cap \left(\bigcup_{D \in S} D \right) = \bigcup_{(B,D) \in T \times S} B \cap D,$$

y cada uno de los subconjuntos $B \cap D$ es unión de elementos de $\mathfrak{B}$ por hipótesis. Si $\mathfrak{A}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de X , entonces

$$I(\mathfrak{A}) = \left\{ \bigcap_{A \in T} A \mid T \subseteq \mathfrak{A} \text{ finito} \right\},$$

es base de una topología τ . En este caso se dice que $\mathfrak{A}$ es sub-base de τ . Es posible definir una topología mediante una base o sub-base.

ejemplo 1.8. En la recta real $\mathbb{R}$, los intervalos abiertos son base de una topología, llamada la topología usual o métrica de $\mathbb{R}$.

ejemplo 1.9. Mas generalmente, si Λ es un conjunto totalmente ordenado arbitrario, los intervalos abiertos de Λ de los tipos

1. $(a, b) = \{c \in \Lambda \mid a < c < b\}$,
2. $(a, \infty) = \{c \in \Lambda \mid a < c\}$,
3. $(-\infty, b) = \{c \in \Lambda \mid c < b\}$,

son base de una topología, llamada la topología del orden en Λ . Si cada elemento x de Λ tiene un antecesor a_x y un sucesor s_x se tiene $\{x\} = (a_x, s_x)$, por lo que todo subconjunto de Λ es abierto y la topología de Λ es discreta.

ejemplo 1.10. En la recta real $\mathbb{R}$, los intervalos semi-abiertos del tipo $[a, b[$ son base de una topología τ_r , llamada la topología de Sorgenfrey de $\mathbb{R}$. El espacio $(\mathbb{R}, \tau_r)$ se denota usualmente $\mathbb{R}_r$. Del mismo modo, los intervalos semi-abiertos del tipo $]a, b]$ son base de una topología τ_l . El espacio $(\mathbb{R}, \tau_l)$ se denota usualmente $\mathbb{R}_l$.

ejemplo 1.11. En la recta real $\mathbb{R}$, los intervalos infinitos del tipo $]a, \infty[$ son base de una topología τ_L . El espacio $(\mathbb{R}, \tau_L)$ se denota usualmente $\mathbb{R}_L$. Del mismo modo, los intervalos infinitos del tipo $]-\infty, b]$ son base de una topología τ_R . El espacio $(\mathbb{R}, \tau_R)$ se denota usualmente $\mathbb{R}_R$.

ejemplo 1.12. En el conjunto $\mathbb{Z}$, los subconjuntos de la forma

$$U_{a,t} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv a \pmod{p^t}\}$$

son base de una topología (ejercicio). Esta se llama la topología p -ádica de $\mathbb{Z}$.

ejemplo 1.13. En el conjunto $\mathbb{Z}$, los subconjuntos de la forma

$$\mathcal{O}_{a,n} = \{x \in \mathbb{Z} | x \equiv a \pmod{n}\}$$

son base de una topología (usar el ejemplo anterior y el Teorema Chino de los Restos). Esta se llama la topología profinita de $\mathbb{Z}$.

ejemplo 1.14. En un espacio métrico (X, d) , los conjuntos de la forma

$$B(x, r) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

son base de una topología llamada la topología métrica de (X, d) . De hecho, si $y \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$, entonces

$$B(y, r_3) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2), \quad \forall r_3 < \min \{r_1 - d(x_1, y), r_2 - d(x_2, y)\},$$

de donde $B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ es una union (en general infinita) de conjuntos de la forma $B(y, r_3)$.

Similarmente, si x es un elemento de un espacio topológico X , una base de vecindades de x es una colección $\mathfrak{B}$ de vecindades de x tal que para cada vecindad U de x existe una vecindad $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subseteq U$. Con esta definición, una base de vecindades $\mathfrak{B}$ de un punto $x \in X$ tiene la propiedad de que dadas vecindades B_1 y B_2 en $\mathfrak{B}$ existe una vecindad $B_3 \in \mathfrak{B}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Es posible identificar bajo que condiciones si para cada x en X se asocia una colección $\mathfrak{B}_x$ estas colecciones son base de vecindades de alguna topología. Los detalles se dejan al lector interesado.

Ejercicios

1. Probar que en un espacio topológico, dos conjuntos abiertos no vacíos minimales son disjuntos.
2. Calcule cuantas topologías existen en un conjunto con tres elementos.
3. Sea $\mathbb{R}_C$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(-a, a)$. Encuentre la clausura de $\{0\}$ y de $\{7\}$.

Chapter 2

Continuidad

Una función $f : X \rightarrow X'$ entre dos espacios topológicos (X, τ) y (X', τ') se dice continua si para todo abierto $\mathcal{O}$ de τ' su preimagen $f^{-1}(\mathcal{O})$ es un abierto de la topología τ . Equivalentemente, cada conjunto cerrado C con la topología τ' tiene una preimagen $f^{-1}(C)$ cerrada con respecto a la topología τ . Es inmediato de la definición que la composición de funciones continuas es continua.

ejemplo 2.1. Si X es un espacio discreto, entonces toda función $f : X \rightarrow X'$ es continua.

ejemplo 2.2. Si X' es un espacio indiscreto, entonces toda función $f : X \rightarrow X'$ es continua.

ejemplo 2.3. Si X es un espacio indiscreto y X' es un espacio discreto, entonces las únicas funciones continuas $f : X \rightarrow X'$ son las constantes.

ejemplo 2.4. Si S es el espacio de sierpinski, entonces $f : X \rightarrow S$ es continua si y sólo si $f^{-1}(1)$ es abierto.

ejemplo 2.5. Si X' es un espacio discreto, entonces una función $f : X \rightarrow X'$ es continua si y sólo si para cada elemento $x' \in X'$, el conjunto $f^{-1}(x')$ es abierto. En este caso $f^{-1}(x')$ es abierto y cerrado.

ejemplo 2.6. Si τ y τ_0 son dos topologías en X , entonces la identidad $i : (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_0)$ es continua si y sólo si τ es mas fina que τ_0 .

Proposición 2.7. Sea $\mathfrak{A}$ una sub-base de la topología de X' . Una función $f : X \rightarrow X'$ es continua si y sólo si para cada $A \in \mathfrak{A}$ se tiene que $f^{-1}(A)$ es abierto.

Demostración Si f es continua y $A \in \mathfrak{A}$, entonces en particular A es abierto y por lo tanto $f^{-1}(A)$ es abierto. Por otro lado si $f^{-1}(A)$ es abierto para todo $A \in \mathfrak{A}$ entonces para

$$B = \bigcap_{i=1}^n A_i \in I(\mathfrak{A}),$$

con cada A_i en $\mathfrak{A}$ se tiene que

$$f^{-1}(B) = \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(A_i)$$

es abierto. Como cada abierto $\mathcal{O}$ en X es de la forma

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad B_i \in I(\mathfrak{A}),$$

entonces

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

es abierto. □

Proposición 2.8. *Una función $f : X \rightarrow X'$ es continua si y sólo si para todo punto $x \in X$ y toda vecindad U' de $f(x)$ existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq U'$.*

Demostración Si f es continua y U' es una vecindad de $f(x)$, donde x es un punto de X , entonces existe un abierto $\mathcal{O}' \in \tau'$ que satisface

$$f(x) \in \mathcal{O}' \subseteq U'.$$

Sea $U = f^{-1}(\mathcal{O}')$ entonces $x \in U$ y U es abierto, de donde U es una vecindad de x que satisface $f(U) \subseteq \mathcal{O}' \subseteq U'$. Por otro lado, si f satisface la segunda condición del enunciado, y si $\mathcal{O}'$ es un abierto de τ' , entonces $\mathcal{O}'$ es una vecindad de cada uno de sus puntos. Sea $x \in \mathcal{O} = f^{-1}(\mathcal{O}')$. Como $\mathcal{O}'$ es vecindad de $f(x)$, por hipótesis existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq \mathcal{O}'$. De donde $U \subseteq \mathcal{O}$. Se sigue que $\mathcal{O}$ es una vecindad de cada uno de sus puntos, luego es abierto. □

Proposición 2.9. *Una función $f : X \rightarrow X'$ es continua si y sólo si para todo punto $x \in X$ y toda vecindad B' en alguna base $\mathfrak{B}_x$ de vecindades de $f(x)$ existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq B'$.*

Demostración Sigue inmeditamente del resultado precedente ya que cada vecindad de $f(x)$ contiene alguna vecindad de la base. $\square$

ejemplo 2.10. En $\mathbb{Z}$ con la topología p -ádica (o profinita) toda función de la forma $x \mapsto p(x)$ donde p es un polinomio es continua. Por otro lado, la función $x \mapsto [\sqrt{x}]$ no lo es (ejercicio).

Una función $f : X \rightarrow X'$ se dice continua en un punto x de X si para toda vecindad U' de $f(x)$ existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq U'$. Con esta definición, se sigue inmeditamente de los resultados precedentes que una función $f : X \rightarrow X'$ es continua si y sólo si es continua en cada punto de X .

ejemplo 2.11. Si (X, d) e (Y, d') son espación métricos entonces $f : X \rightarrow Y$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para cada vecindad del tipo $B(f(x), \epsilon)$ en Y existe una vecindad del tipo $B(x, \delta)$ tal que

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon),$$

o en otras palabras

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) > \epsilon.$$

Se recupera así la definición de continuidad usual en análisis.

ejemplo 2.12. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_L$ es continua en x si para cada vecindad de la forma $]f(x) - \epsilon, \infty[$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(]x - \delta, x + \delta[) \subseteq]f(x) - \epsilon, \infty[,$$

o dicho en otras palabras si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow f(y) > f(x) - \epsilon.$$

Una función que satisface esta propiedad se dice semicontinua inferiormente. Del mismo modo una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_R$ es continua en x si y sólo si es semicontinua superiormente.

ejemplo 2.13. Una función $f : \mathbb{R}_r \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en x si para cada vecindad de la forma $]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f([x, x + \delta[) \subseteq]f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon[,$$

o dicho en otras palabras si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \leq y < x + \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon.$$

Una función que satisface esta propiedad se dice continua por la derecha en x . Del mismo modo una función $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en x si y sólo si es continua por la izquierda.

definición 2.14. Una función continua $f : X \rightarrow X'$ se dice un homeomorfismo si es biyectiva y su inversa f^{-1} es también continua. Dos espacios se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. Como es usual para muchas categorías de estructuras matemáticas, espacios homeomorfos pueden considerarse como un mismo objeto con un cambio de language.

ejemplo 2.15. Para todo espacio topológico X , la función identidad $\text{id}_X : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo.

ejemplo 2.16. Para todo par de espacios topológicos discretos X e Y , toda biyección es un homeomorfismo. Lo mismo ocurre si X e Y son indiscretos.

ejemplo 2.17. Si $X = \{0, 1\}$ con la topología de Sierpinski

$$\tau_1 = \{X, \{1\}, \emptyset\},$$

e $Y = \{0, 1\}$ con la topología de Sierpinski opuesta

$$\tau_0 = \{X, \{0\}, \emptyset\},$$

la función $f : X \rightarrow Y$ definida por $f(x) = 1 - x$ es un homeomorfismo, mientras que la identidad, vista como función de X en Y , no lo es.

ejemplo 2.18. Si $X = \mathbb{Z}$ con la topología p -ádica o profinita, la función $n \mapsto -n$, así como cualquier translación $n \mapsto n + m$, es un homeomorfismo.

ejemplo 2.19. Una isometría entre dos espacios métricos (X, d) e (Y, d') es una función $f : X \rightarrow Y$ que satisface

$$d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2).$$

Dos espacios métricos isométricos son homeomorfos.

ejemplo 2.20. El espacio métrico $\mathbb{R}$ y el intervalo abierto $Y =]0, 1[$ son homeomorfos ya que las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad g(x) = \frac{x}{1 - |x|}$$

son continuas e inversas. Estos espacios no son, sin embargo, isométricos.

Ejercicios

1. Sea $\mathbb{R}_L$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(-\infty, a)$. Probar que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_L$ es continua si y sólo si es semicontinua superiormente como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
2. Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(a, b]$. Probar que una función $f : \mathbb{R}_l \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es continua por la izquierda en cada punto como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
3. En las notaciones del problema anterior, probar que una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_l$ es continua si y sólo si es constante. (Sugerencia: probar que debe ser continua con la topología usual y que cada punto debe ser un máximo local).
4. Un espacio topológico X se dice homogéneo si para cada par de puntos x e y en X existe un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ tal que $f(x) = y$. Probar que:
 - (a) Si un espacio homogéneo tiene un punto denso, entonces cada punto es denso.
 - (b) Si un espacio homogéneo tiene un punto cerrado, entonces cada punto es cerrado.

- (c) Si un espacio homogéneo tiene un punto abierto, entonces el espacio es discreto.
- (d) En un espacio homogéneo finito, los abiertos no vacíos minimales tienen el mismo número de elementos.

Chapter 3

Redes

Un conjunto dirigido es para nosotros un conjunto parcialmente ordenado Λ tal que para cada par de elementos λ_1 y λ_2 de Λ existe un tercer elemento λ_3 tal que $\lambda_3 \geq \lambda_1, \lambda_2$. Una red en un conjunto X es una función $\phi : \Lambda \rightarrow X$, o equivalentemente una familia de elementos de X indexada por Λ . Una red se denota $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en un espacio topológico X se dice converger a un elemento x_∞ si para todo $U \in V(x_\infty)$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $x_\mu \in U$ para todo $\mu \in \Lambda$ tal que $\mu \geq \lambda$. Simbólicamente se escribe $x_\lambda \rightarrow x_\infty$. Si es necesario especificar la topología τ de X o el conjunto dirigido Λ utilizaremos también las notaciones

$$x_\lambda \xrightarrow{\tau} x_\infty, \quad x_\lambda \xrightarrow{\lambda \in \Lambda} x_\infty.$$

Observación 3.1. Nótese que si $\mathfrak{B}$ es una base de vecindades de x es suficiente comprobar que la condición se cumple para cada $U \in \mathfrak{B}$, ya que todo elemento $U \in V(x)$ contiene un elemento $W \in \mathfrak{B}$ de donde $x_\mu \in W$ implica $x_\mu \in U$.

ejemplo 3.2. Supongamos que Λ tiene un último elemento ω . Entonces $x_\lambda \rightarrow x_\infty$ si y sólo si x_ω está contenido en cada vecindad de x_∞ . En particular, $x_\lambda \rightarrow x_\omega$ para toda red indiciada por Λ .

ejemplo 3.3. El conjunto $\Lambda = \{\omega\}$ es un conjunto dirigido con el único orden posible. Se sigue que la definición tiene sentido en este caso. Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ con este conjunto de índices está totalmente determinada por el elemento x_ω por lo que en este caso escribiremos simplemente $x_\omega \rightarrow x_\infty$ en vez de $x_\lambda \rightarrow x_\infty$. Por ejemplo en el espacio de Sierpinski usual, se tiene $1 \rightarrow 0$ pero no es cierto que 0 converja a 1.

ejemplo 3.4. Un ejemplo importante de conjunto dirigido es la colección $V(x)$ de entornos de un punto $x \in X$ con la relación de orden $\leq$ definida por la contención inversa ($U \leq U'$ debe interpretarse como $U \supseteq U'$), ya que $U_1 \cap U_2$ está contenido en ambos U_1 y U_2 , y es por lo tanto "mayor" que ambos. Si x_U es un punto de U para cada $U \in V(x)$, entonces $x_U \rightarrow x$. De hecho Si $U' \geq U$ (es decir $U' \subseteq U$) entonces $x_{U'} \in U' \subseteq U$.

ejemplo 3.5. Si $\mathfrak{B}$ es una base de vecindades de x en un espacio topológico X , entonces $\mathfrak{B}$ es un conjunto dirigido con respecto a la contención inversa. Si x_B es un punto de B para cada $B \in \mathfrak{B}$, se tiene $x_B \rightarrow x$ como en el ejemplo anterior.

Observación 3.6. La construcción de una red convergente que aparece en los ejemplos anterior depende de el axioma de selección, ya que debe escogerse un elemento en cada vecindad U . Un modo de evitar esta dependencia es el siguiente: Se define un conjunto dirigido $\tilde{V}(x)$ como el conjunto de pares (U, y) con $U \in V$ e $y \in U$. Se dice que $(U, y) \leq (U', y')$ si U contiene a U' estrictamente o bien si $(U, y) = (U', y')$. Con este conjunto dirigido la red $x_{(U, y)} = y$ esta bien definida y por cierto $x_{(U, y)} \rightarrow x$. Nótese que para que el conjunto de pares (U, y) sea realmente un conjunto dirigido es necesario que se cumpla al menos una de las condiciones siguientes:

1. $V(x)$ no tenga un último elemento,
2. el último elemento de $V(x)$ es $\{x\}$,

ya que Si U es la vecindad mas pequeña de x , y si y, y' son dos de sus elementos no hay con nuestra definición un conjunto que sea menor que (U, y) y (U, y') simultaneamente. Esto se resuelve a su vez mediante una generalización del concepto de conjunto dirigido. Un conjunto dirigido generalizado es un conjunto Λ con una relación $\leq$ reflexiva y transitiva (pero no necesariamente antisimétrica). Una red generalizada $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ donde Λ es un conjunto dirigido generalizado se define del mismo modo que una red, y la definición de convergencia es la misma. Con esta definición el conjunto de pares (U, y) con $U \in V(x)$ e $y \in U$ es un conjunto dirigido generalizado con la relación $(U, y) \leq (U', y')$ si U contiene a U' , y la red $x_{(U, y)} = y$ converge a x aún si $V(x)$ tiene un último elemento. En estas notas, preferiremos construcciones que usan el axioma de selección como la del ejemplo anterior por simplicidad técnica.

Proposición 3.7. *Un elemento x de X pertenece a la clausura $\overline{A}$ del conjunto A si y sólo si existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ con $x_\lambda \in A$ tal que $x_\lambda \rightarrow x$.*

Demostración Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en A . Supongamos que $x_\lambda \rightarrow x \in X$. Si $x \notin \overline{A}$, entonces $\mathcal{O} = (\overline{A})^c$ es un abierto que contiene a x . Por definición de convergencia, debe existir $\lambda \in \Lambda$ tal que si $\mu \geq \lambda$, se tiene $x_\mu \in \mathcal{O}$, en particular, $x_\mu \notin \mathcal{O}^c \supseteq A$. Esto contradice la elección de la red.

Sea $\Lambda = V(x)$ el conjunto dirigido de entornos de un punto $x \in X$. Sea $U \in V(x)$ un entorno. Sea $\mathcal{O} \subseteq U$ un abierto que contiene a x (que existe por definición de entorno). Entonces $x \in \overline{A}$ implica que $\mathcal{O}^c$ no contiene a A (ya que este es un subconjunto cerrado que no contiene a x). Se concluye que $A \cap \mathcal{O}$ es no vacío y podemos escoger un elemento $x_U \in A \cap \mathcal{O} \subseteq A \cap U$. Como $x_U \in U$ para todo $U \in V(x)$, se tiene $x_U \rightarrow x$. $\square$

Corolario 3.7.1. *Un elemento x de X pertenece a la frontera $\delta(A)$ del conjunto A si y sólo si existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ con $x_\lambda \in A$ tal que $x_\lambda \rightarrow x$ y una red $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ con $y_\mu \in A^c$ tal que $y_\mu \rightarrow x$.*

Observación 3.8. Es posible dar una demostración de la proposición precedente que no utilice el axioma de selección como sigue:

Sea $\Lambda = \{(U, y) | U \in V(x), y \in U \cap A\}$ con la relación de orden del ejemplo 3.6. Se demuestra como en la primera demostración que para cada vecindad U existe al menos algún par (U, y) en Λ . De nuevo, si definimos $x_{(U, y)} = y$, esta red está bien definida y se tiene $x_{(U, y)} \rightarrow x$. Si $V(x)$ tiene un último elemento que no es un punto, es necesario utilizar redes generalizadas como antes.

Sin embargo, utilizando la demostración dada de la proposición 3.7 puede suponerse que de hecho $\Lambda = M = V(x)$ en el corolario. Puede también suponerse que $\Lambda = M = \mathfrak{B}$ para una base de vecindades $\mathfrak{B}$ de x .

ejemplo 3.9. Utilizando redes podemos dar una segunda demostración de que si A y B son subconjuntos de X con $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Si $x \in \overline{A}$, existe una red de elementos de A que converge a x , pero esta es también una red de elementos de B .

ejemplo 3.10. Si X es el espacio de Sierpinski con $\{1\}$ abierto, se tiene $1 \rightarrow 0$. Se concluye que 0 pertenece a la clausura de $\{1\}$.

Proposición 3.11. *Si un conjunto X tiene dos topologías τ_1 y τ_2 , entonces τ_1 es mas fina que τ_2 si y sólo si cada red que converge con respecto a τ_1 es convergente con respecto a τ_2 .*

Demostración Si τ_1 es mas fina que τ_2 , y si $x_\lambda \xrightarrow{\tau_1} x$ entonces para cada vecindad U de x en τ_1 existe un λ_0 a partir del cual los elementos x_λ están en U . Como toda vecindad de x con respecto a τ_2 es en particular una vecindad de x con respecto a τ_1 se tiene también que $x_\lambda \xrightarrow{\tau_2} x$. Por otro lado, si τ_1 no es mas fina que τ_2 , existe un cerrado A con respecto a τ_2 que no es cerrado con respecto a τ_1 . Sea x un punto de la clausura de A en la topología τ_1 que no está en A (que existe ya que A no es cerrado en esa topología). Entonces por la proposición 3.7 existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en A que converge a x con respecto a τ_1 . Esta red no puede converger a x con respecto a τ_2 , ya que A es cerrado en esa topología. $\square$

Corolario 3.11.1. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías en X , entonces τ_1 coincide con τ_2 si y sólo si cada red que converge con respecto a τ_1 es convergente con respecto a τ_2 y conversamente.* $\square$

ejemplo 3.12. Si $\Lambda = \mathbb{N}$ ordenado de la manera usual, la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ se denomina una sucesión. En un espacio métrico, el concepto de convergencia de sucesiones aquí introducido coincide con el concepto usual en análisis.

ejemplo 3.13. Si $\Lambda = \mathbb{R}^+$ ordenado de la manera usual, la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R}$ converge a un elemento $L \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{r \rightarrow \infty} x_r = L$$

en el sentido usual.

ejemplo 3.14. Si al conjunto $\Lambda = \mathbb{R} - \{a\}$ se le dá el orden $\leq$, donde

$$b \leq c \iff |b - a| < |c - a| \text{ o } b = c,$$

la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathbb{R}$ converge a un elemento $L \in \mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{r \rightarrow a} x_r = L$$

en el sentido usual.

ejemplo 3.15. Sea X un conjunto incontable y sea τ la topología cofinita en X . Entonces

$$\Omega = \{T \subseteq X \mid T \text{ es finito}\}$$

es un conjunto dirigido con la contención (directa, no inversa esta vez). Para $T \in \Omega$, sea χ_T su función característica (con valores reales). Entonces para cada $x \in X$ se tiene $\chi_T(x) \rightarrow 1$, ya que para cada x existe un T' suficientemente grande (de hecho $T' = \{x\}$ es suficiente) para que si $T \supseteq T'$ entonces $\chi_T(x) = 1$. Dejamos al lector la tarea de comprobar que ninguna sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con soporte finito satisface $f_n(x) \rightarrow 1$ para todo x .

Observación 3.16. Para quienes conozcan la teoría de la medida, el ejemplo anterior demuestra que el teorema de convergencia dominada de Lebesgue no se extiende a redes.

ejemplo 3.17. Si $\mathbb{N}_d$ es el conjunto dirigido de enteros ordenados por divisibilidad, la red $\{n\}_{n \in \mathbb{N}_d}$ converge a 0 en la topología profinita (o en la topología p -ádica para todo primo p). Esto no es cierto para la sucesión $x_n = n$. Por otro lado, si una sucesión converge entonces también converge como red indexada por $\mathbb{N}_d$.

ejemplo 3.18. Mas generalmente, sean $(X, \leq)$ y $(X, \trianglelefteq)$ dos conjuntos dirigidos con el mismo conjunto subyacente. Si para cada $a \in X$ existe $c = c(a)$ tal que $c \leq b$ implica $a \trianglelefteq b$, entonces cada red que converge con respecto a $\trianglelefteq$ converge con respecto a $\leq$.

ejemplo 3.19. Sea $[a, b]$ un intervalo en $\mathbb{R}$ y sea $\wp[a, b]$ el conjunto de particiones

$$P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$$

del intervalo ordenado por contención. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Para $P \in \wp[a, b]$, definimos la suma superior de Riemann por

$$S^+(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \max_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

Entonces $S^+(f, P) \rightarrow \int^- f$ en el sentido de redes. Lo mismo es válido para sumas inferiores de Riemann.

ejemplo 3.20. Sea ahora $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann integrable. Sea $y : \wp[a, b] \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que satisface $y(P, i) \in [x_{i-1}, x_i]$ para

$P \in \wp[a, b]$ y para cada $i = 1, \dots, n = n(P)$. Diremos que y es una elección de elementos de cada partición. Sea

$$I_y(f, P) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(y(P, i)).$$

Entonces nuevamente $I_y(f, P) \rightarrow \int f$, para todo y . De hecho, una función f acotada en $[a, b]$ es integrable sí y sólo si este límite existe para todo y y no depende de y , ya que puede escogerse siempre el mínimo o siempre el máximo. Dejamos al lector la tarea de determinar si es suficiente asumir que el límite siempre existe.

ejemplo 3.21. En algunos libros de cálculo se define la integral como sigue: Una función f acotada es Riemann-integrable si existe el límite de $I_y(f, P)$ cuando $|P| \rightarrow 0$ y es independiente de y . Aquí $|P|$ es el tamaño de la partición que se define por

$$|P| = \max_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}), \quad P = \{x_0, \dots, x_n\}.$$

En términos de redes, esta definición es equivalente a la de límite de $I_y(f, P)$ con respecto al conjunto dirigido $\wp_0[a, b]$ de particiones con el orden

$$P \trianglelefteq P' \iff |P| < |P'| \text{ o } P = P'.$$

Si $P'' \subseteq P'$ con $|P'| < |P|$, entonces $P'' \trianglelefteq P$. Se sigue que si una función es Riemann-integrable con esta definición también lo es con la anterior. La converso es también cierta como veremos luego.

ejemplo 3.22. En análisis se dice que una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones medibles en un espacio de medida (Ω, Σ, μ) converge en medida a una función f si para todo $\epsilon > 0$ y todo $\delta > 0$ existe N tal que $n > N$ implica:

$$\mu \left(\left\{ x \in \Omega \mid |f(x) - f_n(x)| < \epsilon \right\} \right) < \delta.$$

Nótese que esto puede re-escribirse del siguiente modo:

Para cada par de funciones f y g sea

$$A_{f,g,\epsilon} = \left\{ x \in \Omega \mid |f(x) - g(x)| < \epsilon \right\},$$

y sea

$$\mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta} = \left\{ g \text{ medible en } \Omega \mid \mu(A_{f,g,\epsilon}) < \delta \right\}.$$

Entonces f_n converge a f en medida si para cada nonjunto de la forma $\mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta}$ existe N tal que $n > N$ implica $f_n \in \mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta}$.

Esto equivale a decir que f_n converge a f con respecto a la topología ¹ τ_μ que tiene como sub-base los conjuntos de la forma $\mathcal{O}_{f,\epsilon,\delta}$.

definición 3.23. Una función creciente $\phi : \Lambda \rightarrow M$, donde Λ y M son conjuntos dirigidos, se dice cofinal si para todo $\mu \in M$ existe $\lambda \in \Lambda$ tal que $\phi(\lambda) \geq \mu$. Si $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ es una red en X , entonces $\{y_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es la sub-red definida por ϕ . Si $\Lambda = \mathbb{N}$ con el orden usual se dice que $\{y_{\phi(\lambda)}\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una sub-sucesión.

ejemplo 3.24. Si Λ es un conjunto dirigido y M es un subconjunto tal que para todo $\lambda \in \Lambda$ existe un elemento $\mu \in M$ tal que $\mu \geq \lambda$, entonces la inclusión $M \hookrightarrow \Lambda$ es cofinal. En particular, si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red, entonces $\{x_\mu\}_{\mu \in M}$ es una subred. En particular, toda red indexada por $V(x)$ tiene una subred indexada por una base $\mathfrak{B}$ de vecindades de B . Una sub-red definida por una inclusión se dice fundamental.

Proposición 3.25. Si una red converge a un elemento y del espacio topológico X , también lo hace cualquier sub-red.

Demostración Sea $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ una red que converge a y y sea $\phi : \Lambda \rightarrow M$ una función cofinal. Para toda vecindad $U \in V(x)$ existe $\mu_0 \in M$ tal que si $\mu \geq \mu_0$, entonces $y_\mu \in U$. Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\phi(\lambda_0) \geq \mu_0$. Entonces, para todo $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene $\phi(\lambda) \geq \mu_0$ y por lo tanto $y_{\phi(\lambda)} \in U$. $\square$

definición 3.26. Una red $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ en X permanece lejos de y si existe una vecindad V de y en X tal que $y_\mu \notin V$ para todo μ .

¹Cuando Ω tiene medida finita, esta topología está definida por la métrica ρ , donde

$$\rho(f, g) = \int_{\Omega} \max\{|f(x) - g(x)|, 1\} d\mu(x).$$

Similarmente, si (Ω, Σ, μ) es no-atómica uno puede definir una métrica mediante

$$\rho(f, g) = \sup_{\mu(F)=1} \int_F \max\{|f(x) - g(x)|, 1\} d\mu(x).$$

Lema 3.27. *Sea $y \in X$. Sea $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ una red en X que permanece lejos de y . Entonces ninguna sub-red de $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ converge a y .*

Demostración Sea $\phi : \Lambda \rightarrow M$ una función cofinal tal que $y_{\phi(\lambda)} \rightarrow y$. Entonces $y_{\phi(\lambda)} \in V$ para algún λ . Esto contradice la hipótesis. $\square$

Proposición 3.28. *Sea $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ una red en el espacio topológico X . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ converge a y .
2. toda sub-red de $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ tiene un sub-red convergente a y .
3. toda sub-red fundamental de $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ tiene un sub-red convergente a y .

Demostración Basta probar que (3) implica (1). En particular, basta ver que si $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ no converge a y , existe un sub-red fundamental que permanece lejos de y . Por definición de convergencia, existe una vecindad V de y tal que para todo $\mu \in M$ existe $\mu' > \mu$ tal que $y_{\mu'} \notin V$. Basta ver que

$$\Lambda = \{\mu \in M \mid y_\mu \notin V\}$$

es un subconjunto dirigido cofinal en M , ya que la sub-red correspondiente ciertamente permanece lejos de y . Es también inmediato del párrafo precedente que Λ contiene un elemento mayor o igual a cada elemento de M . Si λ_1 y λ_2 son elementos de Λ , entonces existe $\mu \in M$ mayor o igual a ambos. Como existe $\lambda_3 \in \Lambda$ mayor a μ , se sigue que Λ es un conjunto dirigido, y por lo que precede es cofinal. $\square$

ejemplo 3.29. La función $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \wp_0[a, b]$ definida por

$$\phi(n) = P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, b \right\}$$

que asocia una partición a cada entero n es cofinal (ver el ejemplo 3.21 para la definición del orden en $\wp_0[a, b]$). Se sigue que por lo que si una función es integrable con nuestra segunda definición de integrabilidad, se tiene

$$\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \left(a + \frac{i(b-a)}{n} \right).$$

Nótese sin embargo que $n \mapsto P_n$ no es cofinal si se considera como una función de $\mathbb{N}$ al el conjunto de particiones $\wp[a, b]$ que está ordenado por contención (ver el ejemplo 3.19). Dejamos como ejercicio al lector comprobar que si $\wp_{\mathbb{Q}}[a, b]$ es el conjunto dirigido de particiones con extremos en $a + \mathbb{Q}(b - a)$ con la restricción del orden $\wp[a, b]$, entonces la función $\phi : \mathbb{N}_d \rightarrow \wp_{\mathbb{Q}}[a, b]$ definida por $\phi(m) = P_m$ es cofinal.

Nótese que si Λ es un subconjunto cofinal del conjunto de particiones $\wp_0[a, b]$ (ver ejemplo 3.21), entonces Λ tiene un sub-sucesión. De hecho, basta tomar cualquier sucesión de elementos $\{P_n\}_n$ de Λ tales que la sucesión $\{|P_n|\}_n$ sea estrictamente decreciente y tienda a 0. Tal sucesión existe por la hipótesis de cofinalidad. Se sigue que para terminar la demostración de que ambas definiciones de integral coinciden, basta ver que toda sucesión de particiones $\{P_n\}_n$ tal que $|P_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ y toda elección y de elementos de cada partición satisface

$$I_y(f, P_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Basta ver que $I_y(f, P_n) = \int f_{P_n, y}(t) dt$ donde $f_{P_n, y}$ es una función escalonada apropiada. Si $|P_n| \rightarrow 0$, entonces $f_{P_n, y}$ converge a f puntualmente en cada punto de continuidad de f . Como una función Riemann integrable es continua en casi todo punto el resultado sigue del teorema de convergencia dominada.

Otra aplicación de las funciones cofinales es la siguiente:

Proposición 3.30. *Si $\phi : \Lambda \rightarrow V(x)$ es una función creciente cofinal y $x_\lambda \in \phi(\lambda)$ para toda λ en Λ entonces $x_\lambda \rightarrow x$.*

Demostración Sea U una vecindad de x . Por definición de cofinal existe λ tal que $\phi(\lambda) \subseteq U$. Luego si $\mu > \lambda$ se tiene $x_\mu \in \phi(\mu) \subseteq \phi(\lambda) \subseteq U$. $\square$

definición 3.31. Un espacio topológico X se dice primero contable si para cada $x \in X$ existe una base numerable de vecindades de x . Equivalentemente, X es primero contable si para cada $x \in X$ existe una función cofinal $\phi : \Lambda \rightarrow V(x)$ con Λ numerable. Diremos que una red $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ es numerable si M lo es. En particular, en un espacio primero contable toda red indexada por $V(x)$ tiene una sub-red numerable.

Proposición 3.32. *Si Λ es un conjunto dirigido numerable, entonces existe una función cofinal $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$.*

Demostración Sea $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$. Se define $\mu_1 = \lambda_1$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ se escoge μ_{n+1} de modo que $\mu_{n+1} \geq \mu_n$ y $\mu_{n+1} \geq \lambda_{n+1}$. Entonces la función $n \mapsto \mu_n$ es cofinal. $\square$

Corolario 3.32.1. *En un espacio primero contable cada red indexada por $V(x)$ tiene una sub-sucesión.* $\square$

Corolario 3.32.2. *En un espacio primero contable X , un elemento x está en la clausura de un subconjunto A si y sólo si existe una sucesión de elementos de A que converge a x .*

Demostración Por la demostración 1 de la proposición 3.7, se tiene que existe una red de elementos de A indexada por $V(x)$ que converge a x . Por el corolario precedente, tal red tiene un sub-sucesión. $\square$

ejemplo 3.33 (Espacios métricos). Si (X, d) es un espacio métrico, entonces para cada x en X los conjuntos $B(x, \frac{1}{n})$ son una base numerable de vecindades de x . De hecho $n \mapsto B(x, \frac{1}{n})$ es cofinal. Se sigue que todo espacio métrico es primero contable. En particular, un elemento x está en la clausura de un subconjunto A si y sólo si hay una sucesión de elementos de A que convergen a x . Con esto recuperamos la noción usual de clausura en análisis.

ejemplo 3.34 (Redes de Cauchy en espacios métricos). Sea (X, d) un espacio métrico. Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en x se dice de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $\lambda(\epsilon) \in \Lambda$ tal que

$$\mu, \nu \geq \lambda(\epsilon) \Rightarrow d(x_\mu, x_\nu) < \epsilon.$$

Un espacio métrico se dice completo si cada sucesión de Cauchy converge. De hecho, es cierto que toda red de Cauchy en un espacio métrico completo converge. Para ver esto, sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de Cauchy. Para cada n sea

$$\lambda_n > \lambda(1/n), \quad m = 1, \dots, n,$$

entonces en particular $\lambda_n \geq \lambda(1/n)$, de donde la sucesión $\{x_{\lambda_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene un límite x . Además, tomando el límite $m \rightarrow \infty$ en

$$d(x_{\lambda_m}, x_\mu) < \frac{1}{n}, \quad \forall m > n, \quad \forall \mu > \lambda_n,$$

se tiene

$$d(x, x_\mu) < \frac{1}{n}, \quad \forall \mu > \lambda_n,$$

por lo que la red original converge al mismo límite ².

²Nótese, sin embargo, que $n \mapsto \lambda_n$ no es necesariamente cofinal.

Redes y continuidad

Proposición 3.35. *Sean X y X' espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow X'$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f es continua en $x \in X$.
2. para toda red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ que converge a x se tiene $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$.
3. para toda red $\{x_U\}_{U \in V(x)}$ que satisface $x_U \in U$ se tiene $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$.
4. para toda red $\{x_U\}_{U \in V(x)}$ que satisface $x_U \in U$ y para toda vecindad U' de $f(x)$ se tiene que $f(x_U) \in U'$ para algún U .

Demostración Supongamos que f es continua en x . Sea U' una vecindad de $f(x)$. Entonces existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq U'$. Por definición de convergencia, existe λ_0 tal que para $\lambda > \lambda_0$ se tiene $x_\lambda \in U$, de donde $f(x_\lambda) \in U'$. Se sigue que (1) implica (2). Es trivial que (2) implica (3) y que (3) implica (4). Por otro lado, si f no es continua en x existe una vecindad U' de $f(x)$ tal que en cada vecindad U de x existe algún punto x_U tal que $f(x_U) \notin U'$. Se sigue que (4) implica (1). $\square$

Se deja como ejercicio al lector escribir una versión de (1) $\iff$ (2) que no dependa de el axioma de selección (usando conjuntos dirigidos generalizados). Este resultado permite estudiar propiedades de la continuidad en término de convergencia como es usual en análisis.

ejemplo 3.36. Puede demostrarse que la composición de funciones continuas es continua, usando esta caracterización, como sigue: Si $f : X \rightarrow X'$ y $g : X' \rightarrow X''$ son continuas entonces

$$x_\lambda \rightarrow x_\infty \quad \Rightarrow \quad f(x_\lambda) \rightarrow f(x_\infty) \quad \Rightarrow \quad g \circ f(x_\lambda) \rightarrow g \circ f(x_\infty).$$

Proposición 3.37. *Supongamos que X es primero contable. Una función $f : X \rightarrow X'$ es continua en un punto x de X si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x se tiene $f(x_n) \rightarrow f(x)$.*

Demostración Si f es continua en x , entonces cada sucesión es en particular una red y se aplica el resultado precedente. Si f no es continua en x , existe una red $\{x_U\}_{U \in V(x)}$ tal que $x_U \in U$ y tal que existe una vecindad U' de $f(x)$ que no contiene a ningún $f(x_U)$. Como X es primero contable, la

red $\{x_U\}_{U \in V(x)}$ tiene una subsucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y cada y_n es uno de los x_U , de modo que $f(y_n) \notin U'$. Por otro lado la hipótesis implica que $f(y_n)$ converge a $f(x)$. La contradicción termina la prueba. $\square$

Proposición 3.38. *Sea $\mathfrak{B}$ una base de vecindades de un punto x de X . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f es continua en $x \in X$.
2. para toda red $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{B}}$ que satisface $x_U \in U$ se tiene $f(x_U) \rightarrow f(x)$.
3. para toda red $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{B}}$ que satisface $x_U \in U$ y para toda vecindad U' de $f(x)$ se tiene que $f(x_U) \in U'$ para algún U .

Demostración Es inmediato que (1) implica (2) y que (2) implica (3). Para ver que (3) implica (1), basta ver que (3) implica la condición (4) de la proposición 3.35. $\square$

Existe también un modo de deducir propiedades de la convergencia utilizando propiedades de la continuidad. Para ello, a cada conjunto dirigido Λ se le asocia un espacio topológico $\tilde{\Lambda}$ que como conjunto es simplemente $\Lambda \cup \{\infty\}$, donde ∞ es un elemento arbitrario que no pertenece a Λ . Para definir la topología en $\tilde{\Lambda}$, observamos que la colección

$$B = \wp(\Lambda) \cup \{[\lambda, \infty[\cup \{\infty\}]\},$$

donde $\wp(\Lambda)$ es la colección de todos los subconjuntos de Λ y

$$[\lambda, \infty[= \{\mu \in \Lambda \mid \mu \geq \lambda\},$$

entonces B es base de una topología en $\Lambda \cup \{\infty\}$ (ejercicio). Con esta topología las vecindades de un elemento $\lambda \in \Lambda$ son simplemente todos los conjuntos que lo contienen. Las vecindades de ∞ son aquellas que contienen a un conjunto de la forma $]\lambda, \infty[$.

Proposición 3.39. *Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a un elemento x_∞ si y sólo si la función $f : \tilde{\Lambda} \rightarrow X$ definida por $f(\lambda) = x_\lambda$ y $f(\infty) = x_\infty$ es continua.*

Demostración Supongamos primero que $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a x_∞ . Probaremos que f es continua. Para $\lambda \in \Lambda$, $\{\lambda\}$ es una vecindad de λ en X_λ tal que $f(\{\lambda\}) \subseteq U'$ para toda vecindad U' de x_λ . Basta por lo tanto considerar la continuidad en ∞ . Sea U' una vecindad de x_∞ . Entonces existe λ_0 tal que si $\lambda \geq \lambda_0$ se tiene $x_\lambda \in U'$. Se sigue que $f(U_{\lambda_0}) \subseteq U'$, donde

$$U_\lambda = [\lambda, \infty[\cup \{\infty\}.$$

Supongamos ahora que f es continua. Como $\lambda \mapsto U_\lambda$ es una función cofinal entre los conjuntos dirigidos Λ y $V(\infty)$, y se tiene $\lambda \in U_\lambda$, se concluye que $\lambda \rightarrow \infty$. En particular, como f es continua

$$x_\lambda = f(\lambda) \rightarrow f(\infty) = x_\infty.$$

□

Convergencia uniforme en espacios métricos

Sea X un conjunto arbitrario. Sea Y un espacio métrico completo. El espacio $\mathfrak{B}(X, Y)$ de funciones acotadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un espacio métrico con $d_u(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy entonces para cada $x \in X$ la sucesión $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y , luego converge a un elemento $f(x)$. La función f así definida es acotada y es el límite de la sucesión en la topología de $\mathfrak{B}(X, Y)$, pues tomando $n \rightarrow \infty$ en $d(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon$ se tiene $d(f(x), f_m(x)) < \epsilon$ y como x es arbitrario, $d_u(f, f_m) < \epsilon$. En particular, si $Y = \mathbb{R}$ y si $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que satisface $|g_i(x)| \leq m_i$ con $\sum_i m_i$ convergente, entonces la serie $\sum_i g_i(x)$ es uniformemente convergente. Usaremos este hecho mas adelante.

Proposición 3.40. *Sea X un espacio topológico y sea Y un espacio métrico. Si una red $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de funciones continuas acotadas $f_\lambda : X \rightarrow Y$ converge uniformemente en X a una función acotada f , entonces f es continua.*

Demostración Sea $\{x_\mu\}_{\mu \in M}$ una red en X que converja a un punto $x \in X$. Sea $\epsilon > 0$ entonces existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\lambda \geq \lambda_0 \Rightarrow d(f(z), f_\lambda(z)) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall z \in X.$$

Por otro lado, como f_{λ_0} es continua, se tiene $f_{\lambda_0}(x_\mu) \rightarrow f_{\lambda_0}(x)$, en particular existe μ_0 tal que si $\mu > \mu_0$ se tiene

$$d(f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(x_\mu)) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Se sigue que

$$d(f(x), f(x_\mu)) \leq d(f(x), f_\lambda(x)) + d(f_{\lambda_0}(x), f_{\lambda_0}(x_\mu)) + d(f(x_\mu), f_\lambda(x_\mu)) < \epsilon.$$

De donde $f(x_\mu) \rightarrow f(x)$ como se requería. $\square$

Ejercicios

1. Probar que $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es un espacio primero contable, pero que para todo subconjunto A y todo elemento $a \in X$ se tiene $a \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión en A que converge a a .
2. La topología connumerable en $\mathbb{R}$ es la que tiene por abiertos a los complementos de los conjuntos que son a lo sumo numerables. Probar que toda sucesión convergente con esta topología es eventualmente constante pero la clausura de cualquier conjunto no numerable es el espacio completo.
3. Probar que en un espacio topológico X un punto a es un límite de cada red si y sólo si X es el único conjunto abierto que contiene a a .
4. Probar que en un espacio topológico X un punto a es un límite de cada red que converge a un punto b si y sólo si cada vecindad de b es una vecindad de a e inversamente.
5. Probar que en un espacio topológico X un punto a es un punto interior de un conjunto A si y sólo si para cada red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en X que converge a a existe un elemento $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\lambda > \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in A.$$

6. Sea $\mathbb{R}_C$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(-a, a)$. Pruebe que toda red que converge a 3 converge a -4 . Pruebe con un ejemplo que el recíproco no se cumple.

7. Probar que en la topología del problema anterior una sucesión a_n converge a un punto $x \geq 0$ si y sólo si

$$-x \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq x.$$

8. Probar que en la topología cofinita una sucesión converge a cada punto si y sólo si toma cada valor sólo un número finito de veces. Es esto cierto para redes?

9. Sea $\mathbb{R}_L$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(-\infty, a)$. Probar que una sucesión a_n converge a un punto x en $\mathbb{R}_L$ si y sólo si

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq x.$$

10. Sea $\mathbb{R}_l$ el conjunto de los números reales provisto de la topología generada por los intervalos de la forma $(a, b]$. Probar que una sucesión a_n converge a un punto x en $\mathbb{R}_l$ si y sólo si converge a x en el sentido usual y existe un número natural N tal que

$$n \geq N \Rightarrow a_n \leq x.$$

11. Sea $\Lambda = \mathbb{N}$ ordenado por divisibilidad. Sea $a_\lambda = \lambda$. Sea $X = \mathbb{Z}$ con la topología que tiene como base los conjuntos de la forma $a + b\mathbb{Z}$ (esta se conoce como la topología profinita). Probar que $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una subred convergente de la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $b_n = n$.

12. Un espacio topológico X se dice irreducible si todo par de subconjuntos abiertos de X tienen intersección no vacía. Probar que un espacio topológico X es irreducible si y sólo si existe una red en X que converge a cada punto de X .

13. Probar que toda red creciente y acotada en $\mathbb{R}$ converge a su supremo.

14. Sea f una función continua en $[0, 1]$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min_{\frac{i-1}{n} \leq x \leq \frac{i}{n}} f(x).$$

Probar que los S_n forman una red creciente si se ordena $\mathbb{N}$ por divisibilidad, pero no necesariamente por el orden usual.

15. Sea X el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es $\mathbb{R}^2$ y cuyos cerrados no triviales son las uniones finitas de rectas y puntos. Describa el conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid (n, n^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \vec{x}\}$. Justifique.

Chapter 4

Filtros y Ultrafiltros

Otro modo de estudiar la noción de convergencia es mediante filtros. Si X es un conjunto, un filtro en X es una colección no vacía $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X tal que

- Si $F \in \mathfrak{F}$ y $G \supseteq F$, entonces $G \in \mathfrak{F}$.
- Si $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$.
- $\emptyset \notin \mathfrak{F}$.

Si x es un elemento de un espacio topológico, entonces el conjunto $V(x)$ de vecindades de x es un filtro. Un filtro $\mathfrak{F}$ en un espacio topológico X se dice que converge a un elemento x si para toda vecindad $U \in V(x)$ existe un $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subseteq U$. En este caso escribimos $\mathfrak{F} \rightarrow x$. En particular, $V(x) \rightarrow x$. De hecho la contención $F \subseteq U$ implica que U está también en el filtro $\mathfrak{F}$, de modo que un filtro $\mathfrak{F}$ converge a x si y sólo si $V(x) \subseteq \mathfrak{F}$.

Una colección no vacía B que satisface

- Si $F_1, F_2 \in B$, entonces $F_1 \cap F_2$ contiene algún elemento de B .
- $\emptyset \notin B$.

se dice una base de filtro y el filtro generado por B es la colección $\mathfrak{F}(B)$ de todos los subconjuntos de X que contienen un elemento de B .

ejemplo 4.1. Si A es un conjunto no vacío, entonces $\{A\}$ es base de filtro. Al filtro generado se le llama el filtro principal $\mathfrak{F}(A)$ generado por A . El filtro principal $\mathfrak{F}(A)$ converge a un elemento x si y sólo si cada vecindad de x contiene al conjunto A . En particular, $\mathfrak{F}(\{x\})$ converge a x .

ejemplo 4.2. Todo filtro en un conjunto finito es principal, y generado por el único elemento minimal. En particular, en el espacio de Sierpinski con $\{1\}$ abierto hay exactamente tres filtros. Las convergencias son como siguen:

- $\mathfrak{F}(\{0\}) \rightarrow 0$.
- $\mathfrak{F}(\{1\}) \rightarrow 0, 1$.
- $\mathfrak{F}(\{0, 1\}) \rightarrow 0$.

ejemplo 4.3. Sea C_n el círculo de radio $1/n$ con $n \in \mathbb{Z}$ y sea $B_n = \bigcup_{k \geq n} C_k$. Sea $\mathfrak{B} = \{B_n | n = 1, 2, \dots\}$. Entonces $\mathfrak{B}$ es base de filtro y el filtro generado $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ converge a 0.

ejemplo 4.4. Si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$ son filtros tales que para todo $F \in \mathfrak{F}$ y todo $F' \in \mathfrak{F}'$ se tiene $F \cap F' \neq \emptyset$, entonces el conjunto

$$\mathfrak{F}'' = \{F \cap F' | F \in \mathfrak{F}, F' \in \mathfrak{F}'\}$$

es un filtro. En este caso diremos que los filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$ se intersectan no trivialmente. El filtro $\mathfrak{F}''$ se llama el filtro generado por $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$.

ejemplo 4.5. Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en un espacio topológico X . Entonces la colección $\mathfrak{F}$ de todos los conjuntos que contienen a algún conjunto de la forma

$$F_{\lambda_0} = \{x_\lambda | \lambda \geq \lambda_0\}$$

es un filtro y de hecho $\mathfrak{F} \rightarrow x$ si y sólo si la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a x . Los conjuntos de la forma F_λ son una base de este filtro. El filtro $\mathfrak{F}$ se llama el filtro generado por la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

ejemplo 4.6. Nótese que todo filtro es en particular un conjunto dirigido. Sea $\phi : \Lambda \rightarrow \mathfrak{F}$ una función cofinal. Se sigue que si $\mathfrak{F} \rightarrow x$, y si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red indiciada por Λ tal que $x_\lambda \in \phi(\lambda)$ para toda $\lambda \in \Lambda$, entonces $x_\lambda \rightarrow x$. Mas aún, si $\mathfrak{F}$ no converge a x existe una vecindad U de x que no contiene a ningún $F \in \mathfrak{F}$, luego existe una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ indiciada por Λ que satisface $x_\lambda \in [\phi(\lambda) - U]$ para toda $\lambda \in \Lambda$, y en particular no converge a x . Sea B una base de filtro. En particular se sigue que B es un conjunto dirigido con respecto a la inclusión inversa. Sea $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(B)$ el filtro generado por B . La inclusión $B \hookrightarrow \mathfrak{F}$ es cofinal, luego podemos tomar $\Lambda = B$ en todo lo que precede. Se sigue que si $\mathfrak{F} \rightarrow x$ y si para cada $U \in B$ se tiene

un elemento $x_U \in U$, entonces la red $\{x_U\}_{U \in B}$ converge a x . En particular podemos tomar $B = \mathfrak{F}$. y obtenemos que toda red $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{F}}$ que satisface $x_U \in U$ para todo $U \in \mathfrak{F}$ converge a x .

Los ejemplos anteriores permiten establecer una equivalencia entre la teora de filtros y la de redes. Explotaremos esta equivalencia para utilizar filtros o redes según nos convenga. Para poder utilizar la teoría de filtros para caracterizar, por ejemplo, la clausura, necesitamos definir lo que significa que un filtro $\mathfrak{F}$ esté en un conjunto A , ya que un filtro en A no es un filtro en X . Sin embargo un filtro $\mathfrak{F}$ en A es base de filtro en X . El filtro generado se denota $\mathfrak{F}_X$. Un filtro de este tipo se dice generado en A . Equivalentemente un filtro es generado en A si y sólo si tiene una base de filtro formada por subconjuntos de A .

Proposición 4.7. *Un elemento x de un espacio topológico X pertenece a la clausura de un conjunto A si existe un filtro $\mathfrak{F}$ generado en A tal que $\mathfrak{F} \rightarrow x$.*

Demostración Si x pertenece a la clausura de A entonces existe una red en A que converge a x y tomamos el filtro generado por esa red, el cual es un filtro generado en A y converge a x . Por otro lado, si $\mathfrak{F}$ es un filtro generado en A que converge a x , los subconjuntos F de A en $\mathfrak{F}$ forman una base de filtro B y cualquier red $\{x_F\}_{F \in B}$ que satisface $x_F \in F \subseteq A$ es una red en A que converge a x . $\square$

Tal como se hizo en el caso de redes, si la topología no es clara del contexto utilizaremos la notación $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau} x$ para denotar que $\mathfrak{F}$ converge a x con respecto a la topología τ .

Corolario 4.7.1. *Si un conjunto X tiene dos topologías τ_1 y τ_2 , entonces τ_1 es mas fina que τ_2 si y sólo si cada filtro que converge con respecto a τ_1 converge con respecto a τ_2 al mismo límite.*

Demostración Si τ_1 es mas fina que τ_2 , y si $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau_1} x$ entonces para cada vecindad U de x en τ_1 existe un elemento $F \in \mathfrak{F}$ contenido en U . Como toda vecindad de x con respecto a τ_2 es en particular una vecindad de x con respecto a τ_1 se tiene que $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau_2} x$. Por otro lado si τ_1 no es mas fina que τ_2 , existe un cerrado A con respecto a τ_2 que no es cerrado con respecto a τ_1 . Sea x un punto de la clausura de A en la topología τ_1 que no está en A (que existe ya que A no es cerrado en esa topología). Entonces por la proposición existe

un filtro $\mathfrak{F}$ generado en A tal que $\mathfrak{F} \xrightarrow{\tau_1} x$. Este filtro no puede converger a x con respecto a τ_2 , ya que A es cerrado en esa topología. $\square$

Si $f : X \rightarrow X'$ es una función, y si $\mathfrak{F}$ es un filtro en X entonces $\{f(F) | F \in \mathfrak{F}\}$ es base de filtro ya que

$$f(F_1) \cap f(F_2) \supseteq f(F_1 \cap F_2).$$

El filtro generado se denota $f(\mathfrak{F})$.

ejemplo 4.8. Si $\mathfrak{F}$ es el filtro generado por la red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, entonces $f(\mathfrak{F})$ es el filtro generado por la red $\{f(x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$.

ejemplo 4.9. Si A es un subconjunto de X e $i : A \rightarrow X$ es la inclusión canónica, y si $\mathfrak{F}$ es un filtro en A entonces $i(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}_X$.

Proposición 4.10. Si $f : X \rightarrow X'$ es una función arbitraria, y si $\mathfrak{F}$ es un filtro en X entonces $A \in f(\mathfrak{F})$ si y sólo si $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$.

Demostración Si $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$, el resultado sigue de $A \supseteq f(f^{-1}(A)) \in f(\mathfrak{F})$. Por otro lado si $A \in f(\mathfrak{F})$, entonces A debe contener un conjunto de la forma $f(B)$ con $B \in \mathfrak{F}$. Se sigue que

$$f^{-1}(A) \supseteq f^{-1}(f(B)) \supseteq B,$$

de donde $f^{-1}(A) \in \mathfrak{F}$. $\square$

Proposición 4.11. Una función $f : X \rightarrow X'$ es continua en un punto x de X si y sólo si cada filtro $\mathfrak{F}$ convergente a x satisface $f(\mathfrak{F}) \rightarrow f(x)$.

Demostración Supongamos que f es continua y sea $\mathfrak{F}$ un filtro que converge a x . Entonces para toda vecindad U' de $f(x)$ existe una vecindad U de x tal que $f(U) \subseteq U'$ y un elemento F de $\mathfrak{F}$ tal que $F \subseteq U$. Como $f(F) \subseteq U'$ el resultado sigue. Por otro lado, si cada filtro $\mathfrak{F}$ convergente a x satisface $f(\mathfrak{F}) \rightarrow f(x)$, en particular es cierto para $\mathfrak{F} = V(x)$, luego para toda vecindad U' de $f(x)$ existe un elemento F' del filtro $f(V(x))$ contenido en U' , pero $f(V(x))$ está generado por las imágenes de las vecindades de x . $\square$

Si $f : X \rightarrow X'$ es una función epiyectiva, y si $\mathfrak{F}'$ es un filtro en X' entonces $\{f^{-1}(F) | F \in \mathfrak{F}'\}$ es base de filtro ya que

$$f^{-1}(F_1) \cap f^{-1}(F_2) = f^{-1}(F_1 \cap F_2).$$

El filtro generado se denota $f^{-1}(\mathfrak{F})$.

Proposición 4.12. *Si $f : X \rightarrow X'$ es una función epiyectiva, y si $\mathfrak{F}'$ es un filtro en X' entonces $f(f^{-1}(\mathfrak{F}')) = \mathfrak{F}'$.*

Demostración Basta ver que para cada $F \in \mathfrak{F}'$ se tiene $f(f^{-1}(F)) = F$ por ser f epiyectiva. $\square$

Dados filtros $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{F}'$, diremos que $\mathfrak{F}'$ es un subfiltro de $\mathfrak{F}$ si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$. En particular, si $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}$, y si $\mathfrak{F}' \rightarrow x$, entonces $\mathfrak{F} \rightarrow x$. Es inmediato de la definición que si $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ es subred de $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ el filtro $\mathfrak{F}_x$ generado por $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es un subfiltro del filtro $\mathfrak{F}_y$ generado por $\{y_\mu\}_{\mu \in M}$ (y no al revés). Un filtro maximal recibe el nombre de Ultrafiltro. Es inmediato del lema de Zorn que cada filtro está contenido en un ultrafiltro.

Proposición 4.13. *Un filtro $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro si y sólo si para todo subconjunto A de X se tiene $A \in \mathfrak{F}$ o $A^c \in \mathfrak{F}$.*

Demostración Es claro que si para todo subconjunto A de X se tiene $A \in \mathfrak{F}$ o $A^c \in \mathfrak{F}$, entonces todo filtro estrictamente mayor a $\mathfrak{F}$ debe contener un par $\{A, A^c\}$, lo que es imposible para un filtro. Por otro lado, si $\mathfrak{F}$ no contiene a A^c (ni, por lo tanto, a ningún subconjunto de A^c), se tiene que $A \cap F$ es no vacío para todo $F \in \mathfrak{F}$, y por lo tanto el filtro principal $\mathfrak{F}(A)$ intersecta a $\mathfrak{F}$ no trivialmente y el filtro generado por $\mathfrak{F}(A)$ y $\mathfrak{F}$ contiene a A y a cada elemento de $\mathfrak{F}$. En particular, si $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro, debe contener a A . $\square$

Corolario 4.13.1. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función arbitraria. Si $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro, entonces también lo es $f(\mathfrak{F})$.*

Demostración Si A es un subconjunto de Y entonces $f^{-1}(A)$ o su complemento $f^{-1}(A^c)$ está en $\mathfrak{F}$, por lo que A o A^c está en $f(\mathfrak{F})$. $\square$

Proposición 4.14. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una función epiyectiva. Si $\mathfrak{F}'$ es un ultrafiltro de Y , entonces existe un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ de X tal que $f(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}'$.*

Demostración Si $\mathfrak{F}'$ es un ultrafiltro de Y entonces $\mathfrak{F}_0 = f^{-1}(\mathfrak{F}')$ es un filtro de X que satisface $f(\mathfrak{F}_0) = \mathfrak{F}'$. En particular, si $\mathfrak{F}$ es cualquier ultrafiltro que contiene a $\mathfrak{F}_0$ se tiene $f(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}'$. $\square$

Un elemento x de X se dice un punto de acumulación del filtro $\mathfrak{F}$ si $\mathfrak{F}$ es subfiltro de un filtro que converge a x . En particular, un ultrafiltro tiene un punto de acumulación si y sólo si converge. También es inmediato que un filtro $\mathfrak{F}$ tiene a x como punto de acumulación si existe un ultrafiltro que contiene a $\mathfrak{F}$ y converge a x .

Proposición 4.15. *x es punto de acumulación del filtro $\mathfrak{F}$ si y sólo si para cada vecindad U de x y cada elemento F de $\mathfrak{F}$ se tiene $F \cap U \neq \emptyset$.*

Demostración Si $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}'$ con $\mathfrak{F}' \rightarrow x$, entonces para cada vecindad U de x existe un elemento $F' \in \mathfrak{F}'$ tal que $U \supseteq F'$. Como F y F' están en $\mathfrak{F}'$, se tiene que $F \cap F' \neq \emptyset$, luego $F \cap U \neq \emptyset$. Por otro lado si $F \cap U \neq \emptyset$ para cada vecindad U de x y cada elemento F de $\mathfrak{F}$, entonces los filtros $\mathfrak{F}$ y $V(x)$ se intersectan no trivialmente. En particular el filtro generado por $\mathfrak{F}$ y $V(x)$ contiene a $\mathfrak{F}$ y converge a x . $\square$

ejemplo 4.16. Sea C_n el círculo de radio $1 + 1/n$ con $n \in \mathbb{Z}$ centrado en 0 y sea $B_n = \bigcup_{k \geq n} C_k$. Sea $\mathfrak{B} = \{B_n | n = 1, 2, \dots\}$. Entonces $\mathfrak{B}$ es base de filtro y el filtro generado $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$ tiene como puntos de acumulación a todos los puntos del círculo de radio 1 centrado en 0.

ejemplo 4.17. Si $A \subseteq B$ son conjuntos no vacíos, entonces $\mathfrak{F}(B) \subseteq \mathfrak{F}(A)$. En particular, si $A = \{x\}$, entonces $\mathfrak{F}(\{x\})$ es un ultrafiltro principal, ya que para todo subconjunto F de X se tiene $x \in F$ o bien $x \in F^c$. Claramente $\mathfrak{F}(\{x\}) \rightarrow x$ con cualquier topología, pues $\{x\} \in \mathfrak{F}(\{x\})$. Se sigue que todo elemento de B es un punto de acumulación de $\mathfrak{F}(B)$. Más generalmente, si x es un punto de $\overline{B}$ entonces cada vecindad de x contiene puntos de B y por lo tanto de cada elemento de $\mathfrak{F}(B)$. Por otro lado, si x no es un punto de $\overline{B}$, existe una vecindad de U que no corta a B que es un elemento de $\mathfrak{F}(B)$. Se concluye que x no es un punto de acumulación de $\mathfrak{F}(B)$. Es decir los puntos de $\overline{B}$ son exactamente los puntos de acumulación de $\mathfrak{F}(B)$.

ejemplo 4.18. Mas generalmente, si x es punto de acumulación de un filtro $\mathfrak{F}$, entonces para cada $F \in \mathfrak{F}$, tenemos $\mathfrak{F}(F) \subseteq \mathfrak{F}$, por lo que x es también un punto de acumulación de $\mathfrak{F}(F)$. En particular, si x es punto de acumulación de $\mathfrak{F}$, entonces x está en la clausura de cada elemento en el filtro $\mathfrak{F}$.

Si A es un subconjunto de X y $\mathfrak{F}$ es un filtro en X tal que todo elemento F de $\mathfrak{F}$ intersecta no trivialmente a A entonces

$$\mathfrak{F}_A = \{A \cap F \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

es un filtro de A , ya que

$$(F_1 \cap A) \cap (F_2 \cap A) = (F_1 \cap F_2) \cap A$$

Y si $A \supseteq E \supseteq F \cap A$ entonces $E = (F \cup E) \cap A$. De hecho, en este caso se tiene $(\mathfrak{F}_A)_X \supseteq \mathfrak{F}$.

Proposición 4.19. *Si $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro de X entonces $\mathfrak{F}_A$ es un ultrafiltro de A .*

Demostración Si B es un subconjunto de A que no está en $\mathfrak{F}_A$, entonces en particular no está en $\mathfrak{F}$, luego B^c está en $\mathfrak{F}$ y por lo tanto el complemento de B en A que es $A \cap B^c$ está en $\mathfrak{F}_A$. $\square$

Obsérvese que si $f : X \rightarrow X'$ es una función arbitraria e $Y = f(X)$, entonces para todo filtro $\mathfrak{F}$ que satisfaga la condición siguiente:

Todo elemento F de $\mathfrak{F}$ intersecta no trivialmente a Y

se tiene que $f^{-1}(\mathfrak{F}) = f^{-1}(\mathfrak{F}_Y)$ está bien definido. El resultado precedente tiene, en este contexto, la siguiente generalización:

Proposición 4.20. *Si $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro, también lo es $f^{-1}(\mathfrak{F})$.*

Demostración Si B es un subconjunto de X que no está en $f^{-1}(\mathfrak{F})$, entonces su imagen $f(B)$ no está en $\mathfrak{F}$. Como $\mathfrak{F}$ es ultrafiltro, su complemento $f(B)^c$ está en $\mathfrak{F}$ por lo que también está su preimagen

$$f^{-1}[f(B)^c] = [f^{-1}f(B)]^c \subseteq B^c,$$

Se sigue que $B^c \in f^{-1}(\mathfrak{F})$. $\square$

Ejercicios

1. Sean $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ dos filtros en un conjunto X . Probar que existe un filtro que los contiene a ambos si y sólo si para todo par de conjuntos $U_1 \in \mathfrak{F}_1$ y $U_2 \in \mathfrak{F}_2$ se tiene $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

2. Probar que existe un filtro que converge simultaneamente a dos puntos a y b de un espacio topológico X si y sólo si para cada par de vecindades U de a y V de b se tiene $U \cap V \neq \emptyset$.
3. Probar que si $\mathfrak{F}_1$ y $\mathfrak{F}_2$ son ultrafiltros distintos en un mismo conjunto X , se tiene que existen $U_1 \in \mathfrak{F}_1$ y $U_2 \in \mathfrak{F}_2$ tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
4. Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto arbitrario. Probar que un punto a de X está en la clausura $\bar{A}$ de A si y sólo si existe un ultrafiltro de A que converge a a .
5. Sean X e Y espacios topológicos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función arbitraria. Probar que f es continua en un punto a de X si y sólo si para cada ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en X que converge a a el ultrafiltro imagen $f(\mathfrak{F})$ en Y converge a $f(a)$.
6. Probar que todo punto de acumulación de un ultrafiltro es un límite.
7. Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto arbitrario. Probar que un punto a de X está en la clausura $\bar{A}$ de A si y sólo si existe un filtro de A que tiene a a como punto de acumulación.
8. Probar que en un espacio topológico X un punto a es un punto interior de un conjunto A si y sólo si para cada filtro $\mathfrak{F}$ en X que converge a a se tiene $A \in \mathfrak{F}$.
9. Probar que en un espacio topológico X un punto a es un límite de cada filtro que converge a un punto b si y sólo si $\mathcal{V}(b) \rightarrow a$.
10. Probar que la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ con complemento a lo sumo numerable es un filtro y determine sus puntos de acumulación si $\mathbb{R}$ tiene la topología
 - (a) usual,
 - (b) discreta,
 - (c) cofinita.
11. Describa explícitamente un filtro en $\mathbb{R}$ que contenga al filtro del ejemplo anterior y que converja a 0.

12. Sea $(X, <)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $x \in X$ definimos $B(x) = \{y \in X | x \leq y\}$. Sea $\mathbb{B} = \{B(x) | x \in X\}$. Probar que $\mathbb{B}$ es base de una topología $\tau_{\mathbb{B}}$. Probar que si $x < y$ entonces cada red o filtro que converge a y converge también a x .
13. dé un ejemplo explícito de un filtro en $\mathbb{R}$ sin puntos de acumulación.
14. Probar que el filtro $\mathfrak{F}$ en $\mathbb{R}$ generado por los conjuntos de la forma (a, ∞) no tiene puntos de acumulación, pero para cada elemento z en el círculo unitario $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{C}$ existe un ultrafiltro $\mathfrak{F}_z$ que contiene a $\mathfrak{F}$ cuya imagen en $\mathbb{U}$ bajo la función $t \mapsto e^{it}$ converge a z .
15. Sea X un espacio topológico cualquiera y sea $\mathfrak{F}$ un filtro en X . Probar que el conjunto $\{x \in X | \mathfrak{F} \rightarrow x\}$ es cerrado.
16. Sea B_r la bola de centro 0 y radio r en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathfrak{B} = \{B_r | r > 1\}$. Sea $\mathfrak{F}$ el filtro en $\mathbb{R}^n$ generado por $\mathfrak{B}$. Encuentre todos los puntos de acumulación de $\mathfrak{F}$. Justifique.

Chapter 5

Topología inducidas y co-inducidas

El propósito de este capítulo es desarrollar algunas de las principales herramientas que nos permiten crear nuevos espacios topológicos a partir de los ya conocidos. Por ejemplo, queremos dar topologías a subconjuntos o a productos cartesianos de espacios conocidos, o ser capaces de describir matemáticamente el proceso de construir un cilindro o una banda de Moebius identificando o *pegando* extremos de un cuadrado. Esto ultimo requiere que podamos dar una topología a un conjunto de clases de equivalencia o conjunto cociente. También nos gustaría poder hablar de la unión o suma de espacios topológicos como un nuevo espacio. Las propiedades naturales que uno espera en todos estos conjuntos se traducen en la continuidad de ciertas funciones, lo que puede tomarse como un requisito mínimo que debe cumplir la topología *natural* a definir en el nuevo espacio. Por ejemplo, en el caso de un subconjunto, es natural utilizar la topología menos fina que haga de la inclusión una función continua. Veremos también que esta topología puede caracterizarse como la única topología en la cual las redes (o filtros) convergentes son aquellas que convergen en el espacio mayor. Todas las construcciones consideradas en este capítulo siguen uno de dos procesos, o una combinación de ellos. Son la inducción y la co-inducción de topologías. Comenzaremos por el primero que es técnicamente más simple.

definición 5.1. Si $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$ es una familia de funciones $\phi_i : X \rightarrow Y_i$, donde cada (Y_i, τ_i) con $i \in I$ es un espacio topológico, entonces la colección

$$\{\phi_i^{-1}(\mathcal{O}) | i \in I, \mathcal{O} \in \tau_i\}$$

es sub-base de una topología τ . Esta topología es la topología menos fina en X para la cual cada ϕ_i es continua. La topología τ se llama la topología inducida por la familia Φ y se denota $\Phi^*(\tau_i)$. Si $\Phi = \{\phi_0\}$, con $\phi_0 : X \rightarrow Y_0$ entonces la topología inducida $\Phi^*(\tau_i)$ está generada por

$$\{\phi_0^{-1}(\mathcal{O}) | \mathcal{O} \in \tau_0\},$$

donde τ_0 es la topología de Y_0 . Esta colección es de hecho una base de $\Phi^*(\tau_i)$ ya que

$$\phi_0^{-1}(\mathcal{O}_1) \cap \phi_0^{-1}(\mathcal{O}_2) = \phi_0^{-1}(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2).$$

En general, sin embargo, la intersección de preimágenes correspondientes a funciones distintas es sólo eso, una intersección. En este caso la topología tiene como base las intersecciones del tipo

$$\bigcup_{i \in T} \phi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$$

donde cada $\mathcal{O}_i$ es un abierto en el correspondiente espacio Y_i , y T es un subconjunto finito de I .

La principal motivación para la definición precedente radica en el siguiente resultado:

Proposición 5.2. *Sea X un conjunto y sea τ la topología inducida por una familia $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de funciones $\phi_i : X \rightarrow Y_i$. Entonces una función $f : Z \rightarrow X$ es continua si y sólo si cada función $\phi_i \circ f : Z \rightarrow Y_i$ es continua.*

Demostración Si $f : Z \rightarrow X$ es continua, entonces cada función $\phi_i \circ f : Z \rightarrow Y_i$ es continua por ser una composición de funciones continuas. Por otro lado, si cada función $\phi_i \circ f : Z \rightarrow Y_i$ es continua, y si $\mathcal{O}$ es un abierto de X de la forma $\phi_i^{-1}(U)$ donde U es un abierto de Y_i , entonces $f^{-1}(\mathcal{O}) = (\phi_i \circ f)^{-1}(U)$ es abierto. Como los conjuntos de este tipo forman una sub-base de la topología inducida, se sigue que f es continua. $\square$

Tenemos, por cierto, también los resultados correspondientes para redes y filtros:

Proposición 5.3. *Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a un elemento x en X con respecto a la topología inducida por $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$ si y sólo si $\phi_i(x_\lambda) \rightarrow \phi_i(x)$ para cada $i \in I$.*

Demostración Sea $\tilde{\Lambda}$ el espacio topológico asociado a Λ . Entonces una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a un elemento x si y sólo si la función definida por

$$\lambda \mapsto x_\lambda, \quad \infty \mapsto x$$

es continua, lo que es equivalente a que para cada i la función

$$\lambda \mapsto \phi_i(x_\lambda), \quad \infty \mapsto \phi_i(x)$$

sea continua, lo que a su vez es equivalente a $\phi_i(x_\lambda) \rightarrow \phi_i(x)$ para todo i . $\square$

Proposición 5.4. *Un filtro $\mathfrak{F}$ en X converge a un elemento x con respecto a la topología inducida por $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$ si y sólo si $\phi_i(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi_i(x)$ para cada $i \in I$.*

Demostración Si $\mathfrak{F}$ converge a x entonces $\phi_i(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi_i(x)$ pues las funciones ϕ_i son continuas. Supongamos ahora que se tiene $\phi_i(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi_i(x)$ para cada $i \in I$. Sea $\{x_F\}_{F \in \mathfrak{F}}$ una red fija, pero arbitraria, que satisface $x_F \in F$ para cada $F \in \mathfrak{F}$. Basta ver que x_F converge a x . Para cada una de estas redes se tiene $\phi_i(x_F) \in \phi_i(F)$ para cada $i \in I$, y la función $F \mapsto \phi_i(F)$ es una función cofinal entre $\mathfrak{F}$ y $\phi_i(\mathfrak{F})$ por definición de filtro imagen, por lo que a posteriori se tiene:

$$\phi_i(x_F) \xrightarrow{F \in \mathfrak{F}} \phi_i(x), \quad \forall i \in I. \quad (5.1)$$

Se concluye que $x_F \rightarrow x$, y como la red era arbitraria, $\mathfrak{F} \rightarrow x$. $\square$

ejemplo 5.5. Sea Y un subconjunto de un espacio topológico X . La topología de subespacio en Y es la topología inducida por la inclusión $Y \hookrightarrow X$. Esta topología tiene las siguientes propiedades, de acuerdo a los resultados precedentes:

1. Una función $f : Z \rightarrow Y$ es continua si y sólo si es continua como una función de Z en X .
2. Una red $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a un punto $y \in Y$ si y sólo si converge con respecto a la topología de X .
3. Un filtro $\mathfrak{F}$ en Y converge a un punto y si y sólo si el filtro generado por $\mathfrak{F}$ en X converge a y con respecto a la topología de X .

ejemplo 5.6. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. En el producto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ se define la topología producto como la topología inducida por las funciones coordenadas $X \rightarrow X_i$. Esta topología tiene las siguientes propiedades, de acuerdo a los resultados precedentes:

1. Una función $f : Z \rightarrow X$ es continua si y sólo si cada función coordenada $f_i : Z \rightarrow X_i$ es continua.
2. Una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a un punto $x \in X$ si y sólo si cada coordenada $x_{i,\lambda}$ de x_λ converge a la coordenada x_i de x con respecto a la topología de X_i .
3. Un filtro $\mathfrak{F}$ en X converge a un punto x si y sólo si para cada $i \in I$ el filtro

$$\mathfrak{F}_i = \left\{ F_i \subseteq X_i \mid F_i \times \prod_{j \neq i} X_j \in \mathfrak{F} \right\}$$

converge a x_i con respecto a la topología de X .

Para comprobar esta última afirmación, basta ver que el filtro $\mathfrak{F}_i$ definido más arriba es igual a la imagen bajo la i -ésima función coordenada del filtro $\mathfrak{F}$. Por un lado es claro que cada elemento F_i de $\mathfrak{F}_i$ es la i -ésima coordenada de $F_i \times \prod_{j \neq i} X_j$. Por otro lado si G_i es la imagen bajo la i -ésima función coordenada de un elemento G de $\mathfrak{F}$, entonces $G \subseteq G_i \times \prod_{j \neq i} X_j$, de donde $G_i \times \prod_{j \neq i} X_j \in \mathfrak{F}$ por definición de filtro.

La inducción de topologías es functorial en el siguiente sentido:

Proposición 5.7. Sea (Y, τ) un espacio topológico, y sean $\phi : X \rightarrow Y$, $\psi : Z \rightarrow X$ funciones arbitrarias. Entonces $\psi^*[\phi^*(\tau)] = (\phi \circ \psi)^*(\tau)$.

Demostración Basta ver que un filtro $\mathfrak{F}$ converge a un punto $z \in Z$ con respecto a la topología $\psi^*[\phi^*(\tau)]$ si y sólo si $\psi(\mathfrak{F})$ converge a $\psi(x)$ con la topología $\phi^*(\tau)$, lo que a su vez equivale a decir que $\psi[\phi(\mathfrak{F})] = \psi \circ \phi(\mathfrak{F})$ converge a $\psi[\phi(x)] = \phi \circ \psi(x)$. $\square$

Corolario 5.7.1. Si Z es subespacio de un espacio topológico Y e Y es subespacio de un espacio topológico X , entonces Z es subespacio de X . $\square$

De hecho el resultado precedente se extiende a familias de funciones como sigue:

Proposición 5.8. *Sea Z un conjunto y sea $\Psi = \{\psi_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones $\psi_i : Z \rightarrow X_i$. Para cada $i \in I$, sea $\{(Y_{i,j}, \tau_{i,j})\}_{j \in J_i}$ una familia de espacios topológicos, y sea $\Phi_i = \{\phi_{i,j}\}_{j \in J_i}$ una familia de funciones $\phi_{i,j} : X_i \rightarrow Y_{i,j}$. Entonces $\Psi^*[\Phi_i^*(\tau_{i,j})] = (\Phi \circ \Psi)^*(\tau_{i,j})$, donde $\Phi \circ \Psi$ es la familia de todas las composiciones $\phi_{i,j} \circ \psi_i$ con $\phi_{i,j} \in \Phi_i$.*

Demostración Basta ver que un filtro $\mathfrak{F}$ converge a un punto $z \in Z$ con respecto a la topología $\Psi^*[\Phi_i^*(\tau_{i,j})]$ si y sólo si $\psi_i(\mathfrak{F})$ converge a $\psi_i(x)$ con la topología $\Phi_i^*(\tau_i)$ para cada i , lo que a su vez equivale a decir que $\phi_{i,j}[\psi_i(\mathfrak{F})] = \psi_i \circ \phi_{i,j}(\mathfrak{F})$ converge a $\phi_{i,j}[\psi_i(x)] = (\psi_i \circ \phi_{i,j})(x)$ para todo $i \in I$ y todo $j \in J_i$. $\square$

Corolario 5.8.1. *Si los conjuntos J_i son disjuntos, el producto*

$$\prod_{i \in I} \left(\prod_{j \in J_i} X_{i,j} \right)$$

es homeomorfo al producto

$$\prod_{j \in \bigcup_{i \in I} J_i} X_{i,j}.$$

$\square$

La principal razón para definir la topología inducida por una familia de funciones es definir productos. Una vez que los productos han sido definidos, puede reducirse el uso de cualquier otro tipo de topología inducida a la topología inducida por una sola función mediante el siguiente resultado.

Proposición 5.9. *Sea X un conjunto y sea $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones $\phi_i : X \rightarrow Y_i$. Entonces la topología inducida por la familia Φ es la misma que la topología inducida por la función*

$$\phi : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i, \quad \phi(x) = (\phi_i(x))_{i \in I}.$$

Demostración Basta ver que un filtro $\mathfrak{F}$ en X converge a un punto $x \in X$ con respecto a la topología inducida por Φ si y sólo si $\phi_i(\mathfrak{F})$ converge a $\phi_i(x)$ para cada i . Esto a su vez equivale a $\phi(\mathfrak{F}) \rightarrow \phi(x)$, de donde sigue lo pedido. $\square$

ejemplo 5.10. Supongamos que $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de espacios topológicos indexada por un conjunto parcialmente ordenado Λ . Supongamos que para cada par de elementos $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \geq \mu$ existe una función continua $\phi_{\lambda, \mu} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$ que es functorial en el sentido siguiente:

$$\phi_{\lambda, \lambda} = \text{Id}_{X_\lambda}, \quad \phi_{\lambda, \mu} \phi_{\mu, \nu} = \phi_{\lambda, \nu}.$$

Entonces el subespacio del producto $\prod_\lambda X_\lambda$ formado por aquellos elementos $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ que satisfacen

$$\phi_{\lambda, \mu}(x_\lambda) = x_\mu, \quad \forall \lambda \geq \mu \text{ en } \Lambda$$

recibe el nombre de límite inverso de la familia.

El concepto de topología co-inducida es similar al anterior pero se define a partir de funciones que tienen como imagen al conjunto en el cual se quiere definir la topología. La propiedad que caracteriza las funciones continuas a la topología inducida tiene su análogo en este contexto, pero no así los resultados concernientes a filtros y redes, ya que filtros y redes carecen de conceptos *duales*.

definición 5.11. Si Φ es una familia de funciones $\phi_i : Y_i \rightarrow X$, donde cada (Y_i, τ_i) con $i \in I$ es un espacio topológico, entonces la colección

$$\Phi_*(\tau_i) = \{\mathcal{O} \in X \mid \phi_i^{-1}(\mathcal{O}) \text{ es abierto } \forall i \in I\}$$

es una topología en X . Se la llama la topología co-inducida por la familia $\{\phi_i\}_{i \in I}$. Es la topología mas fina en X para la cual cada ϕ_i es continua.

Proposición 5.12. Sea X un conjunto y sea τ la topología co-inducida por una familia $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de funciones $\phi_i : Y_i \rightarrow X$. Entonces una función $f : X \rightarrow Z$ es continua si y sólo si cada función $f \circ \phi_i : Y_i \rightarrow Z$ es continua.

Demostración Si $f : X \rightarrow Z$ es continua, entonces cada función $f \circ \phi_i : Y_i \rightarrow Z$ es continua por ser una composición de funciones continuas. Por otro lado, si cada función $f \circ \phi_i : Y_i \rightarrow Z$ es continua, y si $\mathcal{O}$ es un abierto de Z , entonces cada conjunto $(f \circ \phi_i)^{-1}(\mathcal{O}) = \phi_i^{-1}[f^{-1}(\mathcal{O})]$ es abierto. Luego $f^{-1}(\mathcal{O})$ es abierto y como $\mathcal{O}$ era arbitrario f es continua. $\square$

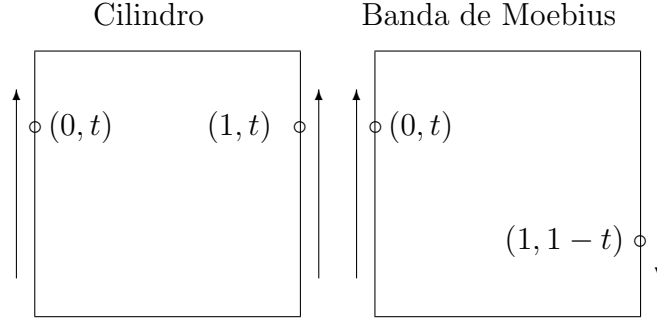


Figure 5.1: El cilindro y la banda de Moebius del ejemplo 5.14.

ejemplo 5.13. Sea X un espacio topológico y sea $\equiv$ una relación de equivalencia en X . La topología cociente en el conjunto de clases de equivalencia $Y = (X/\equiv)$ es la topología co-inducida por la proyección $X \twoheadrightarrow Y$. Con esta topología una función $f : Y \rightarrow Z$ es continua si y sólo si es continua como una función de X en Z .

ejemplo 5.14. Como un ejemplo explícito de topología de identificación mostraremos como construir el cilindro y la banda de Moebius como espacios de identificación. Tomamos $X = [0, 1] \times [0, 1]$.

- Para el cilindro C definimos $\equiv$ como la relación cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma $(0, t) \equiv (1, t)$.
- Para la banda de Moebius M definimos $\equiv$ como la relación cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma $(0, t) \equiv (1, 1 - t)$.

ejemplo 5.15. Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos. El coproducto o union disjunta se define, como conjunto, como la unión

$$X = \coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i \times i.$$

La topología del coproducto se define como la topología inducida por las inclusiones $X_i \hookrightarrow X$. De acuerdo a los resultados precedentes una función

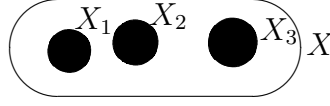


Figure 5.2: Representación gráfica del coproducto de espacios topológicos.

$f : X \rightarrow Z$ es continua si y sólo si cada restricción $f_i : X_i \rightarrow Z$ es continua, donde se identifica X_i con su imagen en el coproducto. Intuitivamente, el coproducto se interpreta como la inclusión en un mismo espacio de los espacios X_i como subconjuntos separados o *disconexos* como en la figura 5.2.

El proceso de co-inducir una topología es functorial en un sentido similar a la inducción.

Proposición 5.16. *Sea (Y, τ) un espacio topológico, y sean $\phi : Y \rightarrow X$, $\psi : X \rightarrow Z$ funciones arbitrarias. Entonces $\psi_*[\phi_*(\tau)] = (\psi \circ \phi)_*(\tau)$.*

Demostración Basta ver que un conjunto $A \subseteq Z$ pertenece a la topología $\psi_*[\phi_*(\tau)]$ si y sólo si $\psi^{-1}(A) \subseteq X$ pertenece a la topología $\phi_*(\tau)$, lo que a su vez equivale a decir que $\psi^{-1}[\phi^{-1}(A)] = (\phi \circ \psi)^{-1}(A)$ pertenece a τ . $\square$

Corolario 5.16.1. *Sea (Y, τ) un espacio topológico, y sean $\phi : Y \rightarrow X$, $\psi : X \rightarrow Z$ funciones epiyectivas. Entonces si X tiene la topología cociente bajo la identificación correspondiente a ϕ y si con esta topología de X , el espacio Z tiene la topología cociente bajo la identificación correspondiente a ψ , entonces Z tiene la topología cociente bajo la identificación correspondiente a $\psi \circ \phi$. $\square$*

Tal como en el caso de la inducción tenemos una versión de esta última propiedad para familias arbitrarias:

Proposición 5.17. *Sea Z un conjunto y sea $\Psi = \{\psi_i\}_{i \in I}$ una familia de funciones $\psi_i : X_i \rightarrow Z$. Para cada $i \in I$, sea $\{(Y_{i,j}, \tau_{i,j})\}_{j \in J_i}$ una familia de espacios topológicos, y sea $\Phi_i = \{\phi_{i,j}\}_{j \in J_i}$ una familia de funciones $\phi_{i,j} : Y_{i,j} \rightarrow X_i$. Entonces $\Psi_*[\Phi_{i,*}(\tau_{i,j})] = (\Psi \circ \Phi)_*(\tau_{i,j})$, donde $\Psi \circ \Phi$ es la familia de todas las composiciones $\psi_i \circ \phi_{i,j}$ con $\phi_{i,j} \in \Phi_i$.*

Demostración Basta ver que un conjunto $A \subseteq Z$ pertenece a la topología $\Psi_*[\Phi_*(\tau)]$ si y sólo si $\psi_i^{-1}(A) \subseteq X_i$ pertenece a la topología $\Phi_{i,*}(\tau)$ para cada i , lo que a su vez equivale a decir que $\psi_{i,j}^{-1}[\phi_i^{-1}(A)] = (\phi_i \circ \psi_{i,j})^{-1}(A)$ pertenece a τ . $\square$

Corolario 5.17.1. *Si los conjuntos J_i son disjuntos, el coproducto*

$$\coprod_{i \in I} \left(\coprod_{j \in J_i} X_{i,j} \right)$$

es homeomorfo al coproducto

$$\coprod_{j \in \bigcup_{i \in I} J_i} X_{i,j}.$$

$\square$

ejemplo 5.18. Supongamos que $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de espacios topológicos indexada por un conjunto parcialmente ordenado Λ . Supongamos que para cada par de elementos $\lambda, \mu \in \Lambda$ con $\lambda \leq \mu$ existe una función continua $\phi_{\lambda,\mu} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$ que es functorial en el sentido siguiente:

$$\phi_{\lambda,\lambda} = \text{Id}_{X_\lambda}, \quad \phi_{\lambda,\mu} \phi_{\mu,\nu} = \phi_{\lambda,\nu}.$$

Entonces el cociente del co-producto $\coprod_\lambda X_\lambda$, en el que se identifica cada par de elementos $\phi_{\lambda,\mu}(x_\lambda)$ y x_μ de los subespacios correspondientes, recibe el nombre de límite directo de la familia.

ejemplo 5.19. Supongamos que $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjunto abiertos en un espacio topológico X . Supongamos que se tiene una función $f : X \rightarrow Z$ tal que cada restricción $f_i : X_i \rightarrow Z$ es continua. Entonces, para cada conjunto abierto $U \subseteq Z$ se tiene

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U),$$

donde cada uno de los conjuntos de la izquierda es abierto en el correspondiente subconjunto X_i , y por lo tanto también en X . Concluimos que la preimagen bajo f de todo subconjunto abierto de Z es abierta, y por lo tanto f es continua. Se concluye que la topología de X es co-inducida por las inclusiones $e_i : X_i \rightarrow X$. De hecho, para definir una función continua de X en un espacio arbitrario Z , es suficiente con definir $f_i : X_i \rightarrow Z$ continua, cuidando que las definiciones coincidan en las intersecciones $X_i \cap X_j$.

ejemplo 5.20. Supongamos que $\{X_i\}_{i=1}^n$ es una familia finita de subconjunto cerrados en un espacio topológico X . Supongamos que se tiene una función $f : X \rightarrow Z$ tal que cada restricción $f_i : X_i \rightarrow Z$ es continua. Entonces, para cada conjunto cerrado $C \subseteq Z$ se tiene

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{i=1}^n f_i^{-1}(C),$$

donde cada uno de los conjuntos de la izquierda es cerrado en el correspondiente subconjunto X_i , y por lo tanto también en X . Concluimos que la preimagen bajo f de todo subconjunto cerrado de Z es cerrada, y por lo tanto f es continua. Se concluye que la topología de X es co-inducida por las inclusiones $e_i : X_i \rightarrow X$. De hecho, para definir una función continua de X en un espacio arbitrario Z , es suficiente con definir $f_i : X_i \rightarrow Z$ continua, cuidando que las definiciones coincidan en las intersecciones $X_i \cap X_j$. Esta propiedad de los recubrimientos cerrados será usada a menudo en lo que sigue, por lo que la enunciaremos como un lema.

Lema 5.21. Sea X un espacio topológico y supongamos que $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ donde cada X_i es un subconjunto cerrado. Sea $f_i : X_i \rightarrow Y$ una función continua para cada $i = 1, \dots, n$, que satisfacen $f_i(x) = f_j(x)$ para cada $x \in X_i \cap X_j$. Entonces la función $f : X \rightarrow Y$ definida por $f(x) = f_i(x)$ para $x \in X_i$ es continua en X .

ejemplo 5.22. A continuación mostraremos como dar una demostración del resultado precedente utilizando redes, e modo que el lector aprecie las dificultades adicionales del uso de redes para estudiar topologías co-inducidas. Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X que converge a un elemento x_0 . Para cada $i = 1, \dots, n$ definimos

$$\Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda \mid x_\lambda \in X_i\}.$$

Claramente $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$. Afirmamos que al menos uno de estos conjuntos es cofinal. Si no fuese así, para cada Λ_i existe un elemento $\lambda_i \in \Lambda$ que no es mayor o igual a ningún elemento de Λ_i . Sea λ un elemento mayor a cada uno de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, el que existe por ser Λ un conjunto dirigido. Entonces λ no puede pertenecer a ningún conjunto Λ_i lo que contradice $\Lambda = \bigcup_{i=1}^n \Lambda_i$. Reordenando si es necesario, podemos suponer que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son cofinales y los restantes no lo son. En particular, se tiene

$$x_\lambda \xrightarrow{\lambda \in \Lambda_i} x_0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Como la restricción f_i de f a cada X_i es continua, se tiene

$$f(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda \in \Lambda_i} f(x_0), \quad i = 1, \dots, k.$$

Sea V una vecindad de $f(x_0)$ en Y . Para cada $i = 1, \dots, k$, existe un elemento $\mu_i \in \Lambda_i$ tal que $\lambda \in \Lambda_i$ y $\lambda \geq \mu_i$ implican $f(x_\lambda) \in V$. Para cada $i = k+1, \dots, n$ escogemos $\mu_i \in \Lambda$ que no es menor a ningún elemento de Λ_i . Sea $\mu \in \Lambda$ un elemento mayor o igual a cada μ_i . Si $\lambda \geq \mu$ entonces $\lambda \in \Lambda_i$ para algún $i = 1, \dots, k$. Como $\lambda \geq \mu_i$, se sigue que $f(x_\lambda) \in V$. Como V era una vecindad arbitraria de $f(x_0)$ concluimos que

$$f(x_\lambda) \xrightarrow{\lambda \in \Lambda} f(x_0).$$

Por lo tanto f es continua.

Ejercicios

1. Sean $X \subset Y \subseteq Z$ espacios topológicos. Probar que si X tiene la topología de subespacio en Y e Y tiene la topología de subespacio en Z , entonces X tiene la topología de subespacio en Z .
2. Probar en detalle que existen los homeomorfismos naturales $X \times Y \cong Y \times X$ y $X \times (Y \times Z) \cong (X \times Y) \times Z$.
3. Sea X el espacio que se obtiene al identificar los extremos del intervalo $[0, 1]$. Probar que X es homeomorfo al círculo unitario.
4. Sea X es espacio obtenido al identificar todos los enteros en $\mathbb{R}$ y sea Y la union de todos los círculos de radio $\frac{1}{n}$ centrados en $(1/n, 0)$. Probar que X e Y no son homeomorfos.
5. Probar que existe un espacio cociente no numerable e indiscreto de $\mathbb{R}$.

Chapter 6

Axiomas de separación

Algunos ejemplos de espacios topológicos vistos hasta ahora resultan bastante incómodos cuando se intenta trabajar con ellos como se hace por ejemplo en análisis, como es el caso de un espacio indiscreto en el que cada sucesión o filtro converge a cada límite y no existen funciones reales continuas no constantes definidas en este espacio. En este capítulo estudiaremos las condiciones mínimas que debe cumplir un espacio topológico para tener algunas propiedades similares a las que satisfacen los espacios métricos.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Existe una relación de equivalencia natural $\cong$ en X definida por $x \cong y$ si x e y están contenidos en exactamente los mismos conjuntos abiertos, es decir $x \cong y$ si y sólo si se cumple que:

$$x \in \mathcal{O} \iff y \in \mathcal{O}, \quad \forall \mathcal{O} \in \tau.$$

El siguiente resultado es inmediato de la definición de vecindad:

Proposición 6.1. $x \cong y$ si y sólo si $V(x) = V(y)$. □

Proposición 6.2. $x \cong y$ si y sólo si toda red que converge a x converge también a y y viceversa.

Demostración Si $V(x) = V(y)$ es inmediato de la definición de red convergente que una red converge a x si y sólo si converge a y . Por otro lado, si U es una vecindad de x pero no de y entonces $y \in \overline{U^c}$, por lo que existe una red en U^c que converge a y . Como U es vecindad de x , $x \notin \overline{U^c}$, por lo que ninguna red en U^c puede converger a x . □

El mismo razonamiento demuestra:

Proposición 6.3. $x \cong y$ si y sólo si todo filtro que converge a x converge también a y y viceversa. $\square$

Un espacio se dice T_0 si esta relación es la igualdad, es decir

$$x \cong y \iff x = y.$$

Al espacio $X/\cong$ se le llama la T_0 -identificación de X y es automáticamente T_0 . Nótese que para todo espacio topológico X , los abiertos de X están en correspondencia uno-a-uno con los abiertos de la T_0 -identificación de X . En general, no hace gran diferencia si uno remplace cada espacio por su T_0 -identificación.

ejemplo 6.4. Todo espacio métrico y todo espacio discreto es T_0 . El espacio de Sierpinski es T_0 .

ejemplo 6.5. Si X es indiscreto, su T_0 -identificación consta de un único punto.

ejemplo 6.6. Si X es T_0 , su T_0 -identificación es idéntica a X .

En un espacio T_0 puede definirse una relación de orden $\geq$ por:

$$x \geq y \iff V(x) \supseteq V(y).$$

Equivalentemente, $x \geq y$ si todo abierto que contiene a y contiene también a x . En este caso se demuestran por el mismo argumento los siguientes resultados:

Proposición 6.7. $x \geq y$ si y sólo si toda red que converge a x converge también a y . $\square$

Proposición 6.8. $x \geq y$ si y sólo si todo filtro que converge a x converge también a y . $\square$

ejemplo 6.9. Sea Λ un conjunto dirigido con último elemento λ_0 . Entonces una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a y si y sólo si $y \geq x_{\lambda_0}$.

Un espacio es T_1 si la relación $\geq$ coincide con la identidad, es decir

$$x \geq y \iff x = y.$$

. Equivalentemente un espacio es T_1 si y sólo si para cada par de puntos x e y existen vecindades U de x y W de y tales que U no es vecindad de y y W no es vecindad de x . Pasando a sub-vecindades si es necesario, podemos suponer U y W abiertos, de modo que la condición implica $y \notin U$ y $x \notin W$. Equivalentemente, un espacio es T_1 si y sólo si para cada par de puntos x e y existe una red (filtro) que converge a x pero no a y y viceversa.

Un espacio topológico X se dice T_2 (o de Hausdorff) si para cada par de puntos x e y existen vecindades $U \in V(x)$ y $W \in V(y)$ tales que $U \cap W = \emptyset$.

Proposición 6.10. *X es Hausdorff si y sólo si ninguna red converge a más de un punto de X .*

Demostración Si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red que converge a x y a y y si U es una vecindad de x y W una vecindad de y entonces existen $\mu, \nu \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in U$ para $\lambda \geq \mu$ y $x_\lambda \in W$ para $\lambda \geq \nu$. Si $\xi \geq \nu, \mu$ entonces se tiene $x_\xi \in U \cap W$. Como tal ξ existe por definición de conjunto dirigido, entonces $U \cap W \neq \emptyset$. Luego X no es Hausdorff.

Asumamos ahora que X no es Hausdorff. Es decir existen x e y en X tales que para cada par de vecindades $U \in V(x)$ y $W \in V(y)$ se tiene $U \cap W \neq \emptyset$. Entonces $\Lambda = V(x) \times V(y)$ es un conjunto dirigido con la relación producto, y si tomamos una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ con $x_{(U,W)} \in U \cap W$, entonces $x_{(U,W)} \rightarrow x$ y $x_{(U,W)} \rightarrow y$. $\square$

Proposición 6.11. *X es Hausdorff si y sólo si ningún filtro converge a más de un punto de X .*

Demostración Si existe un filtro $\mathfrak{F}$ que converge a dos elementos distintos x e y , entonces cualquier red $\{x_F\}_{F \in \mathfrak{F}}$ con $x_F \in F$ converge a ambos x e y . Por otro lado si una red $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a dos elementos distintos x e y , entonces el filtro $\mathfrak{F}$ generado por los conjuntos $U_\mu = \{x_\lambda | \lambda \geq \mu\}$ converge a x y a y . $\square$

Proposición 6.12. *X es Hausdorff si y sólo si la diagonal $\Delta = \{(x, x) | x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.*

Demostración La diagonal es cerrada si y sólo si ninguna red de la forma $\{(x_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ puede converger a un elemento (x, y) con $x \neq y$. Esto equivale a decir que no puede tenerse simultáneamente $x_\lambda \rightarrow x$ y $x_\lambda \rightarrow y$. $\square$

Proposición 6.13. *Un espacio primero contable X es Hausdorff si y sólo si ninguna sucesión converge a más de un punto.*

Demostración Si X es Hausdorff, ninguna red puede converger a más de un punto, y en particular ninguna sucesión. Por otro lado, si X no es Hausdorff, existen puntos distintos x e y , y una red que converge simultáneamente a x y a y . Por la demostración de la Proposición 6.10, podemos suponer que la red está indexada por $V(x) \times V(y)$. Como X es primero contable, existe una función cofinal $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow V(x)$. Afirmamos que la función

$$\psi : \mathbb{Z} \rightarrow V(x) \times V(y), \quad \psi(x) = (\phi(x), \phi(x)),$$

es cofinal. De hecho para todo par de vecindades U y V de x existe un entero n tal que $\phi(n) \subseteq U \cap V$ por lo que $\psi(x) \geq (U, V)$. La subred correspondiente a esta función cofinal es la sucesión pedida. $\square$

ejemplo 6.14. Todo espacio discreto es Hausdorff. También lo es todo espacio métrico pues si $2r < d(x, y)$ se tiene $B(x; r) \cap B(y; r) = \emptyset$.

ejemplo 6.15. Si Λ es un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden, entonces es un espacio de Hausdorff. De hecho si x e y son dos elementos de Λ , con $x < y$, sin ningún elemento entre ellos (es decir y es el sucesor de x), entonces $(-\infty, y)$ y (x, ∞) son disjuntos. De otro modo existe z con $x < z < y$ de modo que $x \in (-\infty, z)$ e $y \in (z, \infty)$.

definición 6.16. Un espacio de Hausdorff X se dice regular, si para todo conjunto cerrado C y todo elemento x existen abiertos U y W tales que $C \subseteq U$, $x \in W$, y $U \cap W = \emptyset$.

Proposición 6.17. *Un espacio de Hausdorff X es regular si para cada x en X y cada vecindad abierta $\mathcal{O}$ de x existe una vecindad abierta W de x tal que $\overline{W} \subseteq \mathcal{O}$.*

Demostración Supongamos primero que X es regular, y sea $\mathcal{O}$ una vecindad abierta de $x \in X$. Tomando $C = \mathcal{O}^c$ en la definición de espacio regular, obtenemos abiertos $U \supset C$ y $W \in V(x)$ que satisfacen $U \cap W = \emptyset$. Nótese que la última condición equivale a $W \subseteq U^c$ y U^c es cerrado por lo que $\overline{W} \subseteq U^c$. Por otro lado $U \supseteq \mathcal{O}^c$ implica $U^c \subseteq \mathcal{O}$.

definición 6.18. Un espacio de Hausdorff X se dice normal, si para todo par de conjuntos cerrados C y D existen abiertos U y W tales que $C \subseteq U$, $D \subseteq W$, y $U \cap W = \emptyset$.

Proposición 6.19. Un espacio de Hausdorff X es normal si para cada subconjunto cerrado D en X y cada subconjunto abierto $\mathcal{O}$ de X que contiene a D existe un conjunto abierto W de X que contiene a D satisface $\overline{W} \subseteq \mathcal{O}$.

La demostración es similar a la del resultado precedente.

Proposición 6.20 (Lemma de Urysohn). Si X es un espacio topológico normal, para cada par de conjuntos cerrados disjuntos C y D en X , existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo x en C y $f(x) = 1$ para todo x en D .

Demostración Definimos una familia de conjuntos abiertos U_a para

$$a \in S = \left\{ \frac{r}{2^n} \in [0, 1] \mid n, r \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$$

como sigue:

- U_0 es un abierto que contiene a C y tal que $\overline{U_0} \subseteq D^c$.
- U_1 es un abierto que contiene a $\overline{U_0}$ y tal que $\overline{U_1} \subseteq D^c$.
- Si U_a y U_b están definidos para $a = \frac{r}{2^n}$ y $b = \frac{r+1}{2^n}$, de modo que se satisfaga $\overline{U_a} \subseteq U_b$, entonces para $c = \frac{a+b}{2} = \frac{2r+1}{2^{n+1}}$ se elige U_c de modo que contenga a $\overline{U_a}$ y que $\overline{U_c}$ esté contenido en U_b .

Este procedimiento define U_a para todo $a \in S$. Definimos

$$f(x) = \inf \left\{ a = \frac{r}{2^n} \in [0, 1] \mid x \in \overline{U_a} \right\}.$$

Afirmamos que con esta definición, f es continua. Sea x un elemento de X tal que $f(x) \in]0, 1[$. Entonces una base de entornos de $f(x)$ está formada por intervalos del tipo $]c, d[$ con c y d en S . Nótese que $c < f(x)$ equivale a $x \notin \overline{U_c}$ por definición. Por otro lado $f(x) < d$ entonces $f(x) \leq d'$ para algún $d' \in S$ con $d' < d$. Si tomamos otro $d'' \in S$ con $d' < d'' < d$ se tiene $x \in \overline{U_{d'}} \subseteq U_{d''}$. Por otro lado si $y \in U_{d''}$ se tiene $f(y) \leq d'' < d$. En particular $f(U_{d''} - \overline{U_c}) \subseteq]c, d[$ y $U_{d''} - \overline{U_c}$ es una vecindad abierta de x . Se sigue que f es continua en x . La continuidad en los puntos $x \in X$ tales que $f(x) \in \{0, 1\}$ es similar y se deja como ejercicio al lector. Se sigue que f es continua en cada punto y por lo tanto continua. $\square$

Lema 6.21. *Si X es un espacio topológico normal, y si $h : E \rightarrow [0, a]$ es una función continua en el subconjunto cerrado E de X , entonces existe una función continua $g : X \rightarrow [0, a/3]$ tal que para todo $x \in E$ se tiene $0 \leq h(x) - g(x) < (2/3)a$.*

Demostración Basta probar el caso $a = 1$. Aplicamos el lema de Urysonh con $C = f^{-1}([0, 1/3])$ y $D = f^{-1}([2/3, 1])$. Sea f una función que satisface $f(C) = \{0\}$ y $f(D) = \{1\}$. Entonces $g(x) = (1/3)f(x)$ satisface lo pedido. $\square$

Proposición 6.22 (Teorema de extensión de Tietze). *Si X es un espacio topológico normal, y si $h : C \rightarrow [0, 1]$ es una función continua en el subconjunto cerrado C de X , entonces existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ que extiende h .*

Demostración Aplicamos el lema precedente. Sea $g_1 : X \rightarrow [0, 1/3]$ continua y tal que $0 \leq h(x) - g_1(x) < (2/3)$ para todo $x \in C$. Sea $h_1 = h - g_1$. Entonces $h_1 : C \rightarrow [0, 2/3]$ por lo que aplicando el lema nuevamente se encuentra $g_2 : X \rightarrow [0, 2/9]$ continua y tal que $0 \leq h_1(x) - g_2(x) < (2/3)^2$ para todo $x \in C$. Sea $h_2 = h_1 - g_2 = h - g_1 - g_2$. Iterando obtenemos una serie de pares (h_n, g_n) donde cada h_i es una función continua en C , cada g_i es una función continua en X , y se tiene

$$h_n = h - \sum_{i=1}^n g_i, \quad 0 \leq h_i(x) \leq (2/3)^n, \quad 0 \leq g_i(x) \leq (1/3)(2/3)^{n-1}.$$

En particular la suma $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ es uniformemente convergente y su suma $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ es continua. Por otro lado para $x \in C$ se tiene

$$h(x) = h_n(x) + \sum_{i=1}^n g_i(x),$$

por lo que al tomar el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se tiene $h(x) = f(x)$ en C . $\square$

ejemplo 6.23. Todo espacio métrico es normal, de hecho si A y B son cerrados y disjuntos, la función

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)},$$

satisface las condiciones del lemma de Urysohn.

Ejercicios

1. Probar que un espacio topológico X es Hausdorff si y sólo si la diagonal es un subespacio cerrado de $X \times X$.
2. probar que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es Hausdorff. Lo mismo para espacios T_0 y T_1 .
3. probar que todo producto de espacios de Hausdorff es Hausdorff. Lo mismo para espacios T_0 y T_1 .
4. Probar que si X es un espacio de Hausdorff, el espacio que se obtiene al identificar dos puntos de X es Hausdorff.
5. Probar en detalle que el toro, definido como un espacio de identificación del cuadrado es un espacio de Hausdorff.
6. Probar que todo espacio métrico es normal.
7. Probar que un espacio de Hausdorff X es regular si y sólo si para cada punto x las vecindades cerradas de x forman un subconjunto cofinal.
8. Una superficie es un espacio topológico en el que cada punto tiene una vecindad homeomorfa a $\mathbb{R}^2$. Probar que todas las superficies son regulares.
9. Sea X un espacio regular y sea A un subconjunto cerrado. Probar que el espacio que se obtiene al identificar los puntos de A es un espacio de Hausdorff.
10. Encuentre un espacio normal X y una función continua $f : A \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ definida en un cerrado A que no se extienda a una función continua $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$. Justifique.
11. Probar que todo producto de espacios regulares es regular.

Chapter 7

Compacidad

Un espacio X se dice quasi-compacto si para cada colección de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ con

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X,$$

existe una subcolección finita $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ tal que $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} = X$. Equivalentemente, un espacio X es quasi-compacto si para cada colección de subconjuntos cerrados $\{C_i\}_{i \in I}$ con

$$\bigcap_{i \in I} C_i = \emptyset,$$

existe una subcolección finita $\{C_{i_1}, \dots, C_{i_n}\}$ tal que $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_n} = \emptyset$. En otras palabras, si cada subcolección finita de $\{C_i\}_{i \in I}$ tiene intersección no vacía (en este caso se dice que la colección tiene la propiedad de la intersección finita), entonces la colección misma tiene intersección no vacía.

Proposición 7.1. *X es quasi-compacto si y sólo si cada filtro en X tiene un punto de acumulación.*

Demostración Supongamos primero que U es compacto. Recordemos que x es un punto de acumulación del filtro $\mathfrak{F}$ si y sólo si para cada vecindad U de x existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $U \cap F \neq \emptyset$. Si $\mathfrak{F}$ no tuviera puntos de acumulación, para cada x en X existiría una vecindad U_x que podemos suponer abierta, y un elemento F_x en el filtro $\mathfrak{F}$ tal que $U_x \cap F_x = \emptyset$. Nótese que

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in X} U_x$$

por lo que los conjuntos U_x constituyen un recubrimiento abierto. Si X es quasi-compacto, existen conjuntos $U_1, \dots, U_n$ de entre los U_x tales que $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$. Para cada i existe un $F_i \in \mathfrak{F}$ con $U_i \cap F_i = \emptyset$. Sea $F = \bigcap_{i=1}^n F_i$. Entonces $F \in \mathfrak{F}$, y $F \cap U_i = \emptyset$ para todo i , luego $F = \emptyset$. La contradicción demuestra que todo filtro debe tener puntos de acumulación.

Supongamos ahora que todo filtro en X tiene puntos de acumulación. Sea $\mathfrak{C}$ una colección de conjuntos cerrados con la propiedad de la intersección finita. Sea C la intersección de los elementos de $\mathfrak{C}$. Basta probar que C es no vacío. Sea $\mathfrak{F}$ el filtro generado por $\mathfrak{C}$. En particular, las intersecciones finitas de elementos de $\mathfrak{C}$ son base de $\mathfrak{F}$. Sea x un punto de acumulación de $\mathfrak{F}$. Entonces cada vecindad de x intersecciona a cada elemento de $\mathfrak{C}$. Como C' es cerrado, x está en C' . Se sigue que x está en la intersección C . $\square$

Corolario 7.1.1. *X es quasi-compacto si y sólo si cada ultrafiltro en X converge.* $\square$

Corolario 7.1.2. *Sea X un espacio compacto. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función epiyectiva y continua entonces Y es compacto.*

Demostración Si $\mathfrak{F}'$ es un ultrafiltro en Y entonces es imagen de un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en X . Se sigue que $\mathfrak{F}$ converge a un elemento x de X de donde $\mathfrak{F}' = f(\mathfrak{F})$ converge a $f(x) \in Y$. $\square$

Proposición 7.2 (Teorema de Tychonoff). *Si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de espacios quasi-compactos, su producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ es quasi-compacto.*

Demostración Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios quasi-compactos y sea $X = \prod_{i \in I} X_i$ su producto. Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro en X . Sea $\mathfrak{F}_i$ la imagen de $\mathfrak{F}$ bajo la proyección en la i -ésima coordenada $X \rightarrow X_i$. Entonces cada $\mathfrak{F}_i$ es un ultrafiltro y por lo tanto converge a algún $x_i \in X_i$ ya que X_i es quasi-compacto. Luego $\mathfrak{F}$ converge a $x = (x_i)_{i \in I}$. Como el ultrafiltro $\mathfrak{F}$ era arbitrario el espacio X es quasi-compacto. $\square$

Proposición 7.3. *X es quasi-compacto si y sólo si cada red en X tiene una subred convergente.*

Demostración Supongamos primero que X es quasi-compacto. Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red en X . Entonces el filtro generado por los conjuntos $F_\lambda =$

$\{x_\mu | \mu \geq \lambda\}$ tiene un punto de acumulación, digamos x . En particular, para cada vecindad U de x y cada F_λ el conjunto $U \cap F_\lambda$ es no vacío. Sea

$$M = \{(\lambda, U) \in \Lambda \times V(x) | x_\lambda \in U\}.$$

Si (λ_1, U_1) y (λ_2, U_2) están en M , y si $\lambda_3 \geq \lambda_1, \lambda_2$ entonces existe un $\lambda_4 \geq \lambda_3$ tal que $x_{\lambda_4} \in U_1 \cap U_2$, de donde $(\lambda_4, U_1 \cap U_2)$ es un elemento de M por lo que M es un conjunto dirigido con respecto al orden producto. El mismo argumento demuestra que $\phi : M \rightarrow \Lambda$ definido por $\phi(\lambda, U) = \lambda$ es cofinal. Si definimos $y_{(\lambda, U)} = x_\lambda$ para cada $(\lambda, U) \in M$, la red $\{y_{(\lambda, U)}\}_{(\lambda, U) \in M}$ converge a x y es una subred de la red original.

Supongamos ahora que cada red en X tenga una subred convergente y sea $\mathfrak{F}$ un filtro. Sea $\{x_F\}_{F \in \mathfrak{F}}$ una red que satisface $x_F \in F$ para todo $F \in \mathfrak{F}$. Sea $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una subred que converge a un punto y , digamos $y_\lambda = x_{\phi(\lambda)}$ donde $\phi : \Lambda \rightarrow \mathfrak{F}$ es cofinal. Entonces el filtro generado por los conjuntos $F_\lambda = \{y_\mu | \mu \geq \lambda\}$ converge a y . Afirmamos que este filtro contiene a $\mathfrak{F}$, lo que concluye la demostración. Basta ver que todo elemento de $\mathfrak{F}$ contiene a algún F_λ . Sea $F \in \mathfrak{F}$ y sea $\lambda \in \Lambda$ un elemento que satisface $\phi(\lambda) \geq F$, el que existe por ser ϕ cofinal. Afirmamos que $F \supseteq F_\lambda$. De hecho si $\mu \geq \lambda$ se tiene

$$y_\mu = x_{\phi(\mu)} \in \phi(\mu) \subseteq \phi(\lambda) \subseteq F.$$

□

Proposición 7.4. *Si X es un espacio quasi-compactos, todo subconjunto cerrado es quasi-compacto.*

Demostración Si Y es cerrado en X entonces toda red tiene una subred convergente en X , pero por ser Y cerrado, su límite debe estar en Y . □

Proposición 7.5. *Si X es Hausdorff, todo subconjunto quasi-compacto de X es cerrado.*

Demostración Sea Y un subconjunto compacto de X . Sea $y \in \bar{Y}$. Entonces existe una red $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en Y que converge a y . Como Y es compacto, existe una subred que converge a un elemento y_0 de Y . La subred debe converger también a y por ser subred. Como X es Hausdorff, cada red converge a lo más a un límite. Se sigue que $y = y_0$ y por lo tanto $y \in Y$. Como y era un elemento arbitrario de la clausura, Y es cerrado. □

Una función se dice cerrada si lleva conjuntos cerrados en conjuntos cerrados. Una consecuencia de los resultados precedentes es la siguiente:

Proposición 7.6. *Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, donde X es quasi-compacto e Y Hausdorff, Entonces f es cerrada.* $\square$

Corolario 7.6.1. *Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y biyectiva, donde X es quasi-compacto e Y Hausdorff, Entonces f es un homeomorfismo.* $\square$

Proposición 7.7. *Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y epiyectiva, donde X es quasi-compacto e Y de Hausdorff, Entonces f induce un homeomorfismo de un cociente de X con Y .*

Demostración De hecho, si X_1 es el cociente de X por la relación

$$x \equiv y \iff f(x) = f(y),$$

entonces f induce una función $F : X_1 \rightarrow Y$ tal que $f = F \circ p$ siendo $p : X \rightarrow X_1$ la proyección. Como f es continua, también lo es F por definición de topología co-inducida. Como X es quasi-compacto, también lo es su imagen X_1 . Ahora se aplica el resultado anterior. $\square$

ejemplo 7.8. Sea $Y = S^1$ el círculo unitario en $\mathbb{C}$ y sea $X = [0, 1]$. La función continua $f : X \rightarrow Y$ definida por $f(t) = e^{2\pi ti}$ induce un homeomorfismo entre S^1 y el espacio que se obtiene al identificar 0 y 1 en $[0, 1]$.

Un espacio se dice compacto si es quasi-compacto y Hausdorff. Recuerdese que es un espacio es Hausdorff si y sólo si cada filtro tiene a lo más un límite. De hecho, es suficiente que cada ultrafiltro tenga a lo más un límite, puesto que si un filtro tiene dos límites lo mismo ocurre con cada ultrafiltro que lo contenga.

Proposición 7.9. *Un espacio X es compacto si y sólo si cada ultrafiltro converge exactamente a un límite.* $\square$

Proposición 7.10. *Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y biyectiva, donde X e Y son espacios compactos, Entonces f es un homeomorfismo.* $\square$

Aplicando este resultado a la identidad se tiene:

Proposición 7.11. *Dos topologías compactas distintas en un mismo conjunto son incomparables, es decir que ninguna es más fina que la otra.* $\square$

Proposición 7.12. *Todo espacio compacto es normal.*

Demostración Sea X un espacio compacto y sean C_1 y C_2 subconjuntos abiertos de X . Como X es Hausdorff, basta probar que existen abiertos U_1 y U_2 , que contienen respectivamente a C_1 y C_2 , tales que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Como C_1 y C_2 son cerrados, deben ser compactos. Sea y un punto en C_2 y sea x un punto en C_1 . Como X es Hausdorff, existen abiertos $U_{x,y}$ y $V_{x,y}$ con $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$ y $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$. Como C_1 es compacto, es recubierto por una cantidad finita de conjuntos $U_{x_1,y}, \dots, U_{x_t,y}$, con $t = t(y)$. Sean

$$U_y = \bigcup_{i=1}^t U_{x_i,y}, \quad V_y = \bigcap_{i=1}^t V_{x_i,y}.$$

Se sigue que $C_1 \subseteq U_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$ pues cada elemento de la intersección está en algún $U_{x_i,y}$ y en el correspondiente $V_{x_i,y}$. Análogamente, C_2 es recubierto por una cantidad finita de conjuntos $V_{y_1}, \dots, V_{y_k}$. Sea

$$U = \bigcap_{i=1}^k U_{y_i}, \quad V = \bigcup_{i=1}^k V_{y_i}.$$

Entonces $C_1 \subseteq U_y$ para cada y implica $C_1 \subseteq U$, y $C_2 \subseteq V$ por hipótesis. Además se tiene $U \cap V = \emptyset$ como antes.

Compacificaciones

Un espacio de Hausdorff X se dice localmente compacto si cada punto en X tiene una vecindad compacta. Si X es localmente compacto puede definirse un nuevo espacio topológico $\hat{X}$ como sigue: $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ como conjunto, donde ∞ no es un elemento de X . Los abiertos de $\hat{X}$ son los abiertos de X y los conjuntos de la forma $U \cup \{\infty\}$ donde U^c es compacto. Equivalentemente, los cerrados de $\hat{X}$ son los conjuntos de la forma $C \cup \{\infty\}$ donde C es un conjunto cerrado de X y los compactos de X . Para ver que esto define una topología en $\hat{X}$ basta ver que los cerrados satisfacen las propiedades necesarias. Intersección de cerrados es cerrado y si al menos uno de ellos es compacto la intersección también lo es (por ser cerrada en un compacto). En particular, una intersección de conjuntos de la forma $C \cup \{\infty\}$ es también de esa forma, y si se intersecta con al menos un compacto el resultado es un compacto. La propiedad equivalente para las uniones finitas se demuestra similarmente. Una unión finita de compactos es compacto y si se unen a al menos un cerrado de la forma $C \cup \{\infty\}$, la unión es también de esa forma.

El conjunto $\hat{X}$ se escribe como $X \cup \{\infty\}$ y $\emptyset$ es compacto, luego son cerrados en $\hat{X}$. Se concluye que con nuestra definición $\hat{X}$ es efectivamente un espacio topológico.

Proposición 7.13. *Si X es Hausdorff y localmente compacto, entonces $\hat{X}$ es compacto.*

Demostración Sea $\mathfrak{F}$ un ultrafiltro en $\hat{X}$. Basta probar que $\mathfrak{F}$ tiene exactamente un límite. Probemos primero que tiene al menos 1. Si $\{\infty\}$ está en $\mathfrak{F}$ entonces $\mathfrak{F}$ converge a ∞ y no hay nada que demostrar. Si no, entonces $\mathfrak{F}_X$ es un ultrafiltro de X . Sea Y un compacto de X . Si $Y \cap F \neq \emptyset$ para cada $F \in \mathfrak{F}$ entonces $\mathfrak{F}_Y$ es un ultrafiltro de Y y por lo tanto converge. Si para cada compacto Y existe un elemento F en $\mathfrak{F}$ que no interseca a Y entonces $F \subseteq Y^c$, de donde cada entorno de ∞ contiene un elemento de $\mathfrak{F}$ y por lo tanto $\mathfrak{F}$ converge a ∞ .

Supongamos ahora que $\mathfrak{F}$ tiene al menos dos límites. Si ambos están en X el filtro

$$\mathfrak{F}' = \{F \cap X \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

es un filtro en X que converge a dos límites. Lo que contradice el hecho de que X es Hausdorff. Supongamos ahora que uno de los límites de $\mathfrak{F}$ es ∞ . Sea $x \in X$ un segundo límite y sea V una vecindad compacta de x . Entonces existen F_1 y F_2 en $\mathfrak{F}$ tales que $F_1 \subseteq V$ y $F_2 \subseteq V^c \cup \{\infty\}$. Se sigue que $\emptyset = F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$, lo que es imposible. $\square$

Observación 7.14. El espacio $\hat{X}$ se llama la compactificación de Alexandroff de X .

Existe otra construcción que permite sumergir un espacio X en un espacio compacto. Un espacio X se dice completamente Hausdorff si para cada par de puntos distintos x e y en X existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$. Del mismo modo, un espacio de Hausdorff X se dice completamente regular si para cada punto x y cada conjunto cerrado B que no contiene a x existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo $y \in B$. Todo espacio normal es completamente regular y todo espacio completamente regular es completamente Hausdorff. Sea X un espacio completamente Hausdorff. Sea $C(X, [0, 1])$ el conjunto de funciones continuas de X en $[0, 1]$. Entonces la función

$$\phi : X \rightarrow \prod_{f \in C(X, [0, 1])} [0, 1]$$

definida por $\phi(x)_f = f(x)$ es inyectiva y continua (pues lo es cada coordenada). Afirmamos que si X es completamente regular entonces $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ es continua. Basta ver que si $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red tal que $f(x_\lambda)$ converge a $f(x)$ para cada f entonces x_λ converge a x . Supongamos que este no es el caso. Entonces existe una vecindad U de x , que podemos suponer abierta, tal que para todo $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu > \lambda$ tal que $x_\mu \notin U$. Sea f una función continua tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para todo y en U^c . Entonces $f(x_\mu) = 1$ para valores de μ arbitrariamente grandes, lo que contradice la hipótesis sobre la red.

En particular, para X completamente regular la clausura βX de $\phi(X)$ es un espacio compacto que contiene a X como subespacio denso. Recibe el nombre de compactificación de Stone-Čech de X .

Proposición 7.15. *Si $\psi : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces existe una única función continua $\beta\psi : \beta X \rightarrow \beta Y$ que extiende f .*

Demostración Sea

$$X_0 = \prod_{f \in C(X, [0,1])} [0, 1], \quad Y_0 = \prod_{f \in C(Y, [0,1])} [0, 1].$$

Definamos $\Psi : X_0 \rightarrow Y_0$ mediante

$$\Psi(x)_f = x_{f \circ \psi}.$$

La función Ψ es continua pues lo es cada coordenada. Sean $\phi_X : X \rightarrow X_0$ y $\phi_Y : Y \rightarrow Y_0$ las funciones definidas por $\phi_X(x)_f = f(x)$ para $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua y $\phi_Y(y)_g = g(y)$ para $g : Y \rightarrow [0, 1]$ continua. Afirmamos que $\Psi \circ \phi_X = \phi_Y \circ \psi$. De hecho un cálculo por coordenadas nos dá:

$$\left(\phi_Y[\psi(x)] \right)_g = g[\psi(x)] = [\phi_X(x)]_{g \circ \psi} = \left(\Psi[\phi_X(x)] \right)_g.$$

En particular, si x está en βX , entonces existe un ultrafiltro $\mathfrak{F}$ en X tal que $\phi_X(\mathfrak{F})$ converge a x . En particular $\Psi[\phi_X(\mathfrak{F})] = \phi_Y[\psi(\mathfrak{F})]$ converge a $\Psi(x)$, luego $\Psi(x) \in \beta Y$. Se sigue que Ψ tiene una restricción $\beta\psi : \beta X \rightarrow \beta Y$. La unicidad sigue del hecho de que la imagen de X es densa en el espacio de Hausdorff $\beta(X)$, por lo que la imagen de cada elemento a de βX debe ser igual al único límite de la imagen de cualquier ultrafiltro en X que converja a a . $\square$

ejemplo 7.16. Si X es compacto βX es homeomorfo a X . En particular, si $f : Z \rightarrow X$ es una función continua, entonces se extiende a una función $\beta f : \beta Z \rightarrow X$.

Proposición 7.17. Si X un espacio topológico discreto existe una correspondencia uno a uno entre los elementos de βX y los ultrafiltros de X .

Demostración Si $\mathfrak{F}$ es un ultrafiltro en X entonces su extensión $\mathfrak{F}_{\beta X}$ debe tener un punto de acumulación en βX . Por ser $\mathfrak{F}_{\beta X} = i(\mathfrak{F})$ donde $i : X \rightarrow \beta X$ es la inclusión, el filtro $\mathfrak{F}_{\beta X}$ es un ultrafiltro y por lo tanto converge a un único punto $x_{\mathfrak{F}}$. Por otro lado, si x es un punto de βX entonces existe un filtro en X que converge a x y puede suponerse que es un ultrafiltro.

Supongamos finalmente que x es punto de acumulación de dos ultrafiltros $\mathfrak{F}_{\beta X}$ y $\mathfrak{G}_{\beta X}$, donde $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son ultrafiltros distintos de X . Como $\mathfrak{F}$ no está contenido en $\mathfrak{G}$, existe un conjunto $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \notin \mathfrak{G}$. Se sigue que $G = F^c \in \mathfrak{G}$. La función característica $\chi_F : X \rightarrow [0, 1]$ se extiende continuamente a una función $\beta\chi_F : \beta X \rightarrow [0, 1]$. Se sigue que $\{1\} = \chi_F(F) \in \beta\chi_F(\mathfrak{F})$ por lo que se tiene

$$1 = \lim \beta\chi_F(\mathfrak{F}) = \beta\chi_F(x),$$

Pero el mismo argumento aplicado a $G = F^c$ demuestra que $\beta\chi_F(x) = 0$. $\square$

ejemplo 7.18. Sean ahora X_1 y X_2 dos espacios topológicos con el mismo conjunto subyacente y sea $i : X_1 \rightarrow X_2$ la identidad. Supongamos que la topología de X_1 es mas fina que la de X_2 , de modo que i sea continua. Entonces existe una función continua $\beta i : \beta X_1 \rightarrow \beta X_2$ que la extiende. Su imagen es compacta y por lo tanto cerrada. Como contiene a la imagen de i que es densa, debemos tener $\beta i(\beta X_1) = \beta X_2$. Se sigue que βX_2 es un cociente de βX_1 por alguna relación de equivalencia. En particular, si X_1 es discreto, se sigue que toda compactificación de Stone-Čech se obtiene cocientando βX_1 por una relación de equivalencia apropiada.

Ejercicios

1. Sean $\mathbb{R}_L$ y $\mathbb{R}_l$ los espacios topológicos definidos en los ejercicios del Capítulo 2.
 - (a) Probar que un subconjunto de $\mathbb{R}_L$ es cuasi-compacto si y sólo si tiene último elemento.

(b) Tiene $\mathbb{R}_I$ subconjuntos compactos infinitos?

2. Usar la parte (a) del ejercicio precedente para probar que toda función semicontinua superiormente en un espacio compacto alcanza su máximo.
3. Probar que todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es compacto.
4. Probar que la función $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f((a_n)_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2a_n 3^{-n}$$

es un homeomorfismo de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ con un subconjunto cerrado de $[0, 1]$. Este subconjunto recibe el nombre de conjunto de Cantor. Concluir que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es compacto.

5. Sea X un espacio topológico. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 - (a) Cada punto de X tiene una vecindad compacta.
 - (b) Cada vecindad de un punto $x \in X$ contiene una vecindad compacta de x .

Un espacio que cumple cualquiera de las dos propiedades anteriores se dice localmente compacto o LC.

6. Probar que todo subconjunto abierto de un espacio compacto es localmente compacto.
7. Probar que $\mathbb{R}$ es localmente compacto.
8. Probar que todo espacio topológico compacto es normal.
9. Probar que la función $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$f((a_n)_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n 2^{-n}$$

es continua. Utilizar este hecho para dar una demostración de la compacidad del intervalo $[0, 1]$ utilizando el teorema de Tychonov.

10. Sea X un producto arbitrario de copias de $\mathbb{R}$. Diremos que un subconjunto de X es puntualmente acotado si su proyección en cada coordenada es compacta. Probar que todo subconjunto cerrado y puntualmente acotado de X es compacto.
11. Probar que en un espacio compacto primero contable cada sucesión tiene una subsucesión convergente. Es cierto que si X es primero contable (y Hausdorff) y cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente entonces X es compacto? (Sugerencia: tómese la topología del orden en un conjunto bien ordenado incontable en el que cada sección inicial es numerable).
12. Probar que todo subconjunto abierto de un espacio compacto es localmente compacto.
13. Probar que $\mathbb{R}$ es localmente compacto.
14. Probar que un producto de espacios LC es LC si y sólo si el número de factores no compactos es finito.
15. Probar que todo espacio LC es completamente regular.
16. Sea X un espacio topológico discreto y sea βX su compactificación de Stone-Cech. Probar que la función que asigna a cada ultrafiltro $\mathfrak{F}$ de X su (único) límite en βX es una biyección.
17. Sean X e Y dos espacios localmente compactos con el mismo conjunto subyacente, de modo que la topología de X sea mas fina que la de Y . Probar que βY es homeomorfo a un cociente de βX .
18. Probar que un producto numerable de intervalos es metrizable.
19. Sea X un espacio compacto segundo contable. Probar que X es metrizable (Sugerencia: Probar que X es homeomorfo a un subespacio de un producto numerable de intervalos).
20. Probar que el conjunto F de todas las funciones de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ es un espacio topológico compacto pero no metrizable con la topología de la convergencia puntual (sugerencia: encontrar una sucesión sin subsucesiones convergentes).

21. Probar que toda sucesión de funciones crecientes de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ tiene una subsucesión puntualmente convergente (sugerencia: Considerese la proyección del espacio de todas las funciones en un subproducto numerable apropiado).

Chapter 8

Compacidad secuencial

Un espacio topológico donde cada sucesión tiene una subsucesión convergente se dice secuencialmente compacto. En este capítulo estudiaremos la relación entre este concepto y compacidad. En particular en el caso de espacios métricos.

Proposición 8.1. *Un espacio primero contable y quasi-compacto X , es secuencialmente compacto.*

Demostración Sea X un espacio primero contable y quasi-compacto. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Entonces tiene una subred convergente a algún elemento $x \in X$. Esta subred está dada por una función cofinal $\phi : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$ para algún conjunto dirigido Λ . Por definición de cofinal, la imagen S de ϕ es infinita. Sea $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ con $s_1 < s_2 < s_3 < \dots$. Sea μ_n un elemento de Λ tal que $\phi(\mu_n) = s_n$. Sea $\omega : \mathbb{Z} \rightarrow V(x)$ una función cofinal. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ escogemos inductivamente un elemento λ_n en Λ que satisfaga las 3 condiciones siguientes:

1. $\lambda_n \geq \mu_n$.
2. $x_{\phi(\lambda)} \in \omega(n)$ para todo $\lambda > \lambda_n$.
3. $\lambda_n \geq \lambda_{n-1}$ para $n \geq 2$.

Claramente $x_{\phi(\lambda_n)} \rightarrow x$. Falta ver que es una subsucesión, es decir que $n \mapsto \phi(\lambda_n)$ es cofinal. Por definición es creciente. Por otro lado

$$\phi(\lambda_n) \geq \phi(\mu_n) = s_n$$

y la inclusión $S \mapsto \mathbb{N}$ es cofinal. □

Observación 8.2. Existen espacios primero contables secuencialmente compactos que no son quasi-compactos. Por ejemplo, Sea Ω un conjunto bien ordenado incontable y para cada x en ω denotamos por $s(x)$ el conjunto $\{y \in \Omega | y \leq x\}$. Sea

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega | s(x) \text{ es numerable o finito}\}.$$

Sea τ la topología definida en Ω_0 por los intervalos de la forma

$$]a, b[= \{u \in \Omega | a < u < b\}.$$

Esta se llama la topología del orden en Ω_0 . Esta topología no es compacta, ya que la red $\{x_s\}_{s \in \Omega_0}$ definida por $x_s = s$ no tiene una subred convergente a ningún elemento de Ω_0 . De hecho, la red converge al infinito en la compactificación de Alexandroff de Ω_0 . Por otro lado el conjunto de intervalos contenidos en $s(x)$ es numerable para cada x , por lo que $s(x)$ es primero contable. Como cada $s(x)$ es abierto (ejercicio), se tiene que Ω_0 es primero contable. Afirmamos que cada sucesión en Ω_0 tiene una subsucesión convergente. Para ello basta probar las siguientes afirmaciones:

1. Cada sucesión está contenida en un conjunto de la forma $s(x)$.
2. $s(x)$ es compacto.

Para la primera afirmación, si la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está contenida en $s(x)$ entonces existe n tal que $x < x_n$. En particular $x \in s(x_n)$ para algún n y hay solo una cantidad numerable de elementos que cumplen esa propiedad.

Para demostrar la segunda propiedad, supongamos que $s(x)$ no es compacto para algún x . Sea x_0 el menor elemento tal que $s(x_0)$ no es compacto. Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una colección de abiertos que recubren $s(x)$. Sea $i \in I$ tal que $x_0 \in U_i$. Por definición de la topología del orden, existe un intervalo abierto $]a, b[$ tal que $x_0 \in]a, b[\subseteq U_i$. Sea u el menor elemento de $]a, b[$. Si $x_0 = u$, entonces x_0 es el sucesor de a y se tiene $s(x_0) = s(a) \cup \{x_0\}$. Como $s(a)$ es compacto por la minimalidad de x_0 , también lo es $s(x_0)$ y tenemos una contradicción. Supongamos ahora que $u < x_0$. Entonces U_i contiene a todos los puntos entre u y x_0 (si los hay). Por otro lado $s(u)$ es quasi-compacto, por lo que existe una unión finita $U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r}$ que contiene a $s(u)$. Se sigue que $s(x) \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_r} \cup U_i$, lo que es nuevamente una contradicción.

Proposición 8.3. *En un espacio secuencialmente compacto todo recubrimiento abierto numerable tiene un subrecubrimiento finito.*

Demostración Sea X un espacio secuencialmente compacto y supongamos que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad X \neq \bigcup_{i=1}^N U_i \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$, sea x_N en el complemento de $\bigcup_{i=1}^N U_i$. Sea x el límite de una subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces x está contenido en el complemento de $\bigcup_{i=1}^N U_i$ para todo N , lo que contradice $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. $\square$

definición 8.4. Un espacio X se dice de Lindeloff si cada recubrimiento abierto de X tiene un subrecubrimiento numerable.

Proposición 8.5. *Un espacio de Lindeloff secuencialmente compacto es quasi-compacto.*

Demostración Inmediato de la definición y del resultado anterior. $\square$

definición 8.6. Un espacio X se dice segundo contable si la topología de X tiene una base numerable.

Proposición 8.7. *Un espacio segundo contable es de Lindeloff.*

Demostración Sea B una base numerable del espacio X . Sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ con cada U_i abierto. Sea $S \subseteq B$ la colección de elementos de la base que están contenidos en al menos un U_i . Para cada $\mathcal{O} \in S$ escojamos $i(\mathcal{O}) \in I$ tal que $\mathcal{O}$ está contenido en $U_{i(\mathcal{O})}$. Afirmamos que de hecho $X = \bigcup_{\mathcal{O} \in S} U_{i(\mathcal{O})}$. Esto terminará la demostración. Sea $x \in X$. Basta probar que x está contenido en algún $U_{i(\mathcal{O})}$. De hecho x está contenido en algún U_i y como este es union de conjuntos en B , los que deben estar en S por definición, x debe estar contenido en algún $\mathcal{O} \in S$ pero $\mathcal{O} \subseteq U_{i(\mathcal{O})}$. La demostración termina observando que S es numerable y por lo tanto también lo es la familia $\{U_{i(\mathcal{O})}\}_{\mathcal{O} \in S}$ que S indexa. $\square$

definición 8.8. Un espacio X se dice separable si tiene un subconjunto denso numerable.

Proposición 8.9. *Un espacio segundo contable es separable.*

Demostración Basta escoger un elemento en cada conjunto de la base numerable. $\square$

Proposición 8.10. *Un espacio métrico separable es segundo contable.*

Demostración Sea (X, d) un espacio métrico y sea Y un subconjunto denso numerable. Sea

$$\mathfrak{B} = \{B(y, r) | y \in Y, r \in \mathbb{Q}\}.$$

Es claro que $\mathfrak{B}$ es numerable. Afirmamos que es base de la topología de X . Basta ver que si $\mathcal{O}$ es un abierto en X y $x \in X$, existe un elemento de $\mathfrak{B}$ contenido en $\mathcal{O}$ y que contiene a x . De hecho si $B(x, \epsilon) \subseteq \mathcal{O}$ tomamos $r < \epsilon/2$ e $y \in Y$ tal que $d(y, x) < r$. Si $d(y, z) < r$ se tiene $d(x, z) < 2r < \epsilon$, por lo que $z \in \mathcal{O}$. $\square$

Proposición 8.11. *Si (X, d) es un espacio métrico secuencialmente compacto, para cada $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $x_1, \dots, x_n$, tal que para cada x en X existe un i en $\{1, \dots, n\}$ tal que $d(x, x_i) < \epsilon$.*

Demostración En caso contrario existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ para $i \neq j$, la que no puede tener una subsucesión convergente. $\square$

Corolario 8.11.1. *Todo espacio métrico secuencialmente compacto es separable.* $\square$

Proposición 8.12. *Todo espacio métrico secuencialmente compacto es compacto.*

Demostración Como cada espacio métrico es de Hausdorff, basta probar que es cuasi-compacto. Por el resultado anterior es separable, luego es segundo contable y por lo tanto de Lindeloff. Pero todo espacio secuencialmente compacto y de Lindeloff es cuasi-compacto. $\square$

Ejercicios

1.

Chapter 9

Espacios conexos

definición 9.1. Un espacio topológico se dice conexo si no existen dos abiertos no vacíos U y W en X tales que $U \cap W = \emptyset$ y $U \cup W = X$. Un espacio que no es conexo se dice desconexo. Intuitivamente un espacio desconexo está dividido en dos partes separadas como en la Figura 9.1. Tomando complementos, se vé fácilmente que X es desconexo si y sólo si existen dos cerrados no vacíos C_1 y C_2 en X tales que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y $C_1 \cup C_2 = X$. Equivalentemente, X es conexo si sus únicos subconjuntos que son a la vez abiertos y cerrados son X y $\emptyset$.

ejemplo 9.2. Probaremos que el intervalo $[0, 1]$ es conexo. Sea W un subconjunto abierto y cerrado de $[0, 1]$. Si $1 \in W$ reemplazamos W por su complemento W^c que es también abierto y cerrado, por lo que podemos suponer que W no contiene a 1. Supongamos que W es no vacío. Sea c el supremo de W . Como W es cerrado en $[0, 1]$, c está en W . En particular $c < 1$. Sea $\delta = 1 - c$. Como $c + \frac{\delta}{n}$ está en W^c para todo n y W^c es cerrado se tiene que su límite c está en W^c . La contradicción termina la prueba.



Figure 9.1: Un espacio desconexo.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua e $Y = U \cup W$ es una union disjunta con U y W abiertos, entonces $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(W)$ es también una union disjunta del mismo tipo. Por otro lado, si f es epiyectiva, la preimagen de un conjunto no vacío es no vacía. Se sigue que $U, W \neq \emptyset$ implica $f^{-1}(U), f^{-1}(W) \neq \emptyset$. Concluimos que si Y es desconexo, entonces también lo es X . El siguiente resultado es ahora inmediato.

Proposición 9.3. *Toda imagen continua de un espacio conexo es conexa.*

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice conexo si A es conexo con la topología de subespacio. En caso contrario decimos que A es desconexo.

Proposición 9.4. *Si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico X , y si $A \subseteq U \cup W$ donde U y W son abiertos disjuntos entonces A está contenido en uno de los abiertos U o W .*

Demostración Basta ver que $A = (A \cap U) \cup (A \cap W)$ y los conjuntos $A \cap U$ y $A \cap W$ son abiertos disjuntos en A . Además

$$(A \cap U) \cup (A \cap W) = A \cap (U \cup W) = A,$$

por lo que uno de ellos $A \cap U$ o $A \cap W$ debe ser vacío. Sin pérdida de generalidad suponemos que $A \cap U = \emptyset$. Entonces $A = (A \cap U) \cup (A \cap W)$ implica $A = A \cap W$, de donde $A \subseteq W$. $\square$

ejemplo 9.5. Un intervalo en $\mathbb{R}$ se define como un subconjunto tal que si contiene a dos puntos a y b contiene a cada punto entre a y b . Afirmamos que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo. Basta ver que si A es un conjunto en $\mathbb{R}$ que contiene dos puntos $a < b$ pero no contiene al punto intermedio c entonces A está contenido en la unión $] \infty, c[\cup]c, \infty[$ pero no en ninguno de los abiertos $] \infty, c[$ y $]c, \infty[$.

ejemplo 9.6. Más generalmente, si Λ es un conjunto totalmente ordenado con la topología del orden, entonces para cada $c \in \Lambda$ los conjuntos

$$] \infty, c[= \{x \in \Lambda \mid x < c\}, \quad]c, \infty[= \{x \in \Lambda \mid x > c\},$$

son abiertos. Definimos un intervalo en Λ como un subconjunto $I \subseteq \Lambda$ tal que $a, b \in I$ y $a < d < b$ implican $d \in I$. El mismo argumento del ejemplo anterior prueba que todo subconjunto conexo de Λ es un intervalo. La converso, sin embargo, es falsa en general. Por ejemplo si $\Lambda = \mathbb{Z}$ con el orden usual, el intervalo $(0, 3) = \{1, 2\}$ es desconexo.

Proposición 9.7. *Si A es un subconjunto conexo de un espacio topológico X , entonces $\bar{A}$ es conexo.*

Demostración Si $\bar{A}$ está contenido en la union de dos abiertos disjuntos U y V , lo mismo ocurre con A . Se sigue que A está contenida en uno de los conjuntos U o V . Sin perdida de generalidad, $A \subseteq U$. Se sigue que $A \cap V \subseteq U \cap V = \emptyset$. En particular $A \subseteq V^c$, que es cerrado, por lo que $\bar{A} \subseteq V^c$ y $\bar{A} \cap V = \emptyset$. Se sigue que $\bar{A} \subseteq U$. $\square$

Otro resultado natural sobre conjuntos conexos es el siguiente:

Proposición 9.8. *Si A y B son subconjuntos conexos de un espacio topológico X , y si se tiene*

$$X = A \cup B, \quad A \cap B \neq \emptyset,$$

entonces X es conexo.

Demostración Si $X = U \cup W$ con U y W abiertos disjuntos no vacíos, entonces A está contenido en U o en W y lo mismo ocurre con B . Si A está contenido en U y B en W entonces

$$A \cap B \subseteq U \cap W = \emptyset,$$

lo que contradice la hipótesis. Lo mismo ocurre si A está contenido en W y B en U . Si A y B están ambos contenidos en W , como $X = A \cup B$, se tiene que $X = W$ y por lo que U es vacío. Del mismo modo si A y B están ambos contenidos en U se tiene que W es vacío. $\square$

Iterando el resultado anterior se tiene que si $A_1, \dots, A_n$ son subconjuntos conexos de X tales que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, entonces la union $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ es conexo. Intuitivamente, el conjunto A puede interpretarse como una cadena donde los conjuntos A_i son los eslabones. Un argumento similar se aplica a conjuntos mas generales como el que se muestra en la mitad derecha de la Figura 9.2.

Sin embargo, la principal aplicación del resultado precedente es que nos permite definir una relación de equivalencia estrechamente relacionada con la conexidad.

Sean x e y elementos de X . Escribiremos $x \equiv_c y$ si existe un subconjunto conexo de X que contiene a x e y . Esta relación es reflexiva (puesto que $\{x\}$ es conexo) y simétrica. Afirmamos que es también transitiva. Si C es un conexo que contiene a x e y y si D es un conexo que contiene a y y z ,

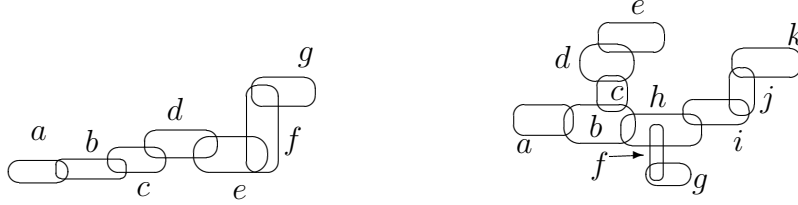


Figure 9.2: Cadenas de subconjuntos conexos que permiten inferir la conexidad del conjunto completo.

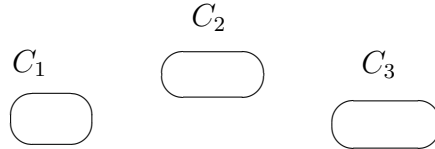


Figure 9.3: Un espacio con 3 componentes conexas.

entonces el conjunto $C \cup D$ es conexo pues $y \in C \cap D$. Se tiene que $x \equiv_c y$ y $y \equiv_c z$ implican $x \equiv_c z$ lo que demuestra la afirmación. Se sigue que $\equiv_c$ es una relación de equivalencia y por lo tanto define una partición del espacio X en clases de equivalencia. A las clases de equivalencia de esta relación se le llaman componentes conexas de X . Si $x \in X$, su componente conexa se denota C_x . Por ejemplo, el espacio de la Figura 9.3, como subespacio de $\mathbb{R}^2$ tiene 3 componentes conexas.

Proposición 9.9. *Una componente conexa de X es un conjunto conexo maximal de X .*

Demostración Probaremos primero que una componente conexa de X es conexa. Sea C la componente conexa de un elemento x y supongamos que $C = U \cup W$ donde U y W son abiertos disjuntos no vacíos de C . Supongamos sin pérdida de generalidad que x está en U . Entonces para todo y en C existe un conexo D que contiene a x e y . Como D está contenido en la unión de U y W que son abiertos disjuntos, entonces D debe estar contenido en uno de

ellos. Se sigue que $y \in D \subseteq U$. Luego W es vacío.

Sea ahora D un conjunto conexo arbitrario en X y sea x un punto de X . Entonces si y es un punto arbitrario de D , por definición $x \equiv_c y$, de donde y pertenece a la componente conexa C de x . Se sigue que $D \subseteq C$. $\square$

Corolario 9.9.1. *Una componente conexa de X es cerrada.*

Demostración del corolario Basta ver que para toda componente conexa C su clausura $\overline{C}$ es conexa. Por la maximalidad, se sigue $C = \overline{C}$. $\square$

ejemplo 9.10. Probaremos ahora que cada intervalo en $\mathbb{R}$ es conexo. Como cada intervalo de la forma $[a, b]$ es imagen continua de $[0, 1]$ es conexo. Sea I un intervalo arbitrario. Sean a y b elementos arbitrarios de I . Sin pérdida de generalidad suponemos $a < b$. Entonces $[a, b]$ es conexo y está contenido en I por definición de intervalo. Se sigue que a y b pertenecen a la misma componente conexa. Como a y b eran arbitrarios, el conjunto I es una componente conexa y por lo tanto es conexo. En particular este resultado demuestra que $\mathbb{R}$ es conexo.

Un argumento similar al del ejemplo precedente sirve para probar el siguiente resultado:

Proposición 9.11. *Si X es unión de una familia de conjuntos conexos $\{C_i\}$ de modo que para cada par de elementos x e y en X existe una cadena $C_{i_1}, \dots, C_{i_r}$ tal que $x \in C_{i_1}$, $y \in C_{i_r}$ y cada $C_{i_t} \cap C_{i_{t+1}}$ es no vacío para $t = 1, \dots, r - 1$, entonces X es conexo.* $\square$

Proposición 9.12. *El producto $X \times Y$ es conexo si y sólo si lo es cada uno de los espacios X e Y .*

Demostración Si el producto $X \times Y$ es conexo entonces lo son X e Y ya que son imágenes continuas de $X \times Y$. Por otro lado si X e Y son conexos, probaremos que dos elementos cualesquiera (a, b) y (c, d) en el producto $X \times Y$ están en la misma componente conexa. Sea $C = (X \times \{b\}) \cup (\{c\} \times Y)$. Basta probar que C es conexo, lo que sigue de que lo es cada uno de los conjuntos $X \times \{b\}$ y $\{c\} \times Y$, mientras que

$$(X \times \{b\}) \cap (\{c\} \times Y) = \{(c, b)\}.$$

$\square$

ejemplo 9.13. El espacio $\mathbb{R}^n$ es conexo.

definición 9.14. Un Espacio Topológico X se dice localmente conexo si para cada punto x de X y cada vecindad V de x existe una vecindad conexa U de x contenida en V .

ejemplo 9.15. Todo conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo, puesto que toda bola $B(\vec{0}; \epsilon)$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto es conexa.

Proposición 9.16. *En un espacio localmente conexo, cada componente conexa es abierta y cerrada.*

Demostración La definición de localmente conexo implica que todo punto de un espacio localmente conexo tiene una vecindad conexa. En particular, la componente conexa de un punto x contiene una vecindad de x . Como x es arbitrario, las componentes conexas son abiertas. Como el complemento de una componente conexa es la unión de las componentes restantes, es abierto. Luego las componentes conexas son cerradas. $\square$

Corolario 9.16.1. *Toda componente conexa de un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$ es abierta.* $\square$

Ejercicios

1. Probar que $\mathbb{R}_L$, definido en los ejercicios del capítulo 2, es conexo.
2. Probar que todo subconjunto conexo de $[0, 1]$ es un intervalo.
3. Un espacio métrico (X, d) se dice convexo si para todo $x, y \in X$ y todo $\lambda \in [0, d(x, y)]$ existe un elemento $z \in X$ tal que

$$d(x, z) = \lambda, \quad d(y, z) = d(x, y) - \lambda.$$

Probar que un espacio métrico compacto y convexo es conexo.

4. El orden lexicográfico se define en $\mathbb{R}^2$ mediante

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a < c, \text{ o } a = c \text{ y } b \leq d.$$

Encuentre las componentes conexas en la topología definida por ese orden.

5. Sea $X = \mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico y sea $Y = \mathbb{R}^2$ con la topología usual. Probar que si $f : Y \rightarrow X$ es continua con $f(v) = (f_1(v), f_2(v))$, entonces f_1 es constante.

6. Probar que el conjunto

$$\{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left(t, \cos(1/t) \right) \mid 0 < t < \pi \right\}$$

es conexo.

7. Probar que en un conjunto totalmente ordenado que es conexo con la topología del orden, todo conjunto acotado superiormente tiene un supremo.

8. Probar que todo abierto en $\mathbb{R}^n$ es localmente conexo.

Chapter 10

Espacios arco-conexos

definición 10.1. Un espacio topológico X se dice arco-conexo si para todo par de puntos x e y en X existe una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. La función γ se dice un arco (o curva) que une x con y . Nótese que el nombre de curva o arco se le dá a veces también a la imagen $\gamma[0, 1]$, nosotros no lo usaremos en este sentido. En algunos textos se utiliza también la palabra camino como sinonimo de curva o arco. El punto $a = \gamma(0)$ recibe el nombre de extremo inicial del arco y $b = \gamma(1)$ recibe el nombre de extremo final. También diremos que γ es un arco de a hacia b o que une a con b .

ejemplo 10.2. Un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ es arco-conexo. De hecho, para puntos arbitrarios a y b en I el intervalo $[a, b]$ está contenido en I por definición de intervalo, pero este es la imagen de la función

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = a + t(b - a).$$

ejemplo 10.3. Un espacio vectorial topológico real, es un espacio vectorial real W provisto de una topología tal que las funciones

$$\sigma : W \times W \rightarrow W, \quad \sigma(x, y) = x + y,$$

$$\mu : \mathbb{R} \times W \rightarrow W, \quad \mu(r, y) = ry,$$

son continuas. Todo espacio vectorial topológico real W es arco-conexo, pues dados x e y en W , el punto x está unido a y por el arco $\gamma(t) = x + t(y - x)$.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua y si $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ es una curva que une x con y , entonces $f \circ \gamma$ es una curva que une $f(x)$ con $f(y)$. El siguiente resultado es inmediato a partir de esta observación.

Proposición 10.4. *Toda imagen continua de un espacio arco-conexo es arco-conexa.* $\square$

Proposición 10.5. *Todo espacio arco-conexo es conexo.*

Demostración Basta ver que dos puntos cualesquiera de X están en la misma componente conexa. Para ello, basta ver que dos puntos cualesquiera x e y de X están contenidos en algún conjunto conexo. Sea γ una curva que une x con y y sea $C = \text{Im } \gamma$ su imagen. C es conexo por ser imagen del intervalo $[0, 1]$. Por otro lado

$$x = \gamma(0) \in C, \quad y = \gamma(1) \in C,$$

de donde C es un conjunto conexo que contiene a x e y . $\square$

Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice arco-conexo si A es arco-conexo con la topología de subespacio.

Corolario 10.5.1. *Si A es un subconjunto arco-conexo de un espacio topológico X , y si $A \subseteq U \cup W$ donde U y W son abiertos disjuntos entonces A está contenido en uno de los abiertos U o W .* $\square$

El siguiente resultado es un caso particular del Lema 5.21 que enunciaremos independientemente aquí dada su importancia.

Lema 10.6. *Sea Y un espacio topológico y sea $f : [a, b] \rightarrow Y$ una función arbitraria. Sea c un punto del intervalo $]a, b[$ y sean f_1 y f_2 las restricciones de f a $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Si f_1 y f_2 son continuas entonces también lo es f .*

Lema 10.7. *Si existe una curva en X que une x con y y una curva que une y con z , entonces existe una curva que une x con z .*

Demostración Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ una curva que une x con y , y sea $\mu : [0, 1] \rightarrow X$ una curva que une y con z . Entonces definimos la función $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$ mediante

$$\lambda(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \mu(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

La función λ está bien definida ya que $\lambda(1/2) = \gamma(1) = \mu(0)$ y es continua por el lema precedente. $\square$

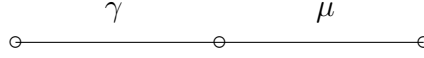


Figure 10.1: Representación gráfica de una yuxtaposición de caminos.

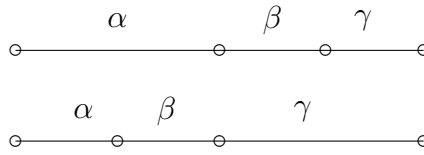


Figure 10.2: Juxtaposiciones sucesivas y ausencia de una ley asociativa.

La curva definida más arriba se denota $\gamma * \mu$ y recibe el nombre de yuxtaposición de las curvas γ y μ . Es costumbre representarla graficamente dividiendo el intervalo en subintervalos iguales como en la Figura 10.1. mientras las yuxtaposiciones sucesivas se representan mediante una iteración de este procedimiento. El segmento correspondiente a cada curva ϕ indica que la yuxtaposición se calcula en ese segmento utilizando la curva ϕ (compuesta con una función afin apropiada). Por ejemplo, Si α , β , y δ son tres curvas tales que el extremo final $\alpha(1)$ de α coincida con el extremo inicial $\beta(0)$ de β , y si, del mismo modo, $\beta(1) = \gamma(0)$, las yuxtaposiciones $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$ están definidas y corresponden a los diagramas de la figura 10.2. Se sigue de dichos diagramas que la yuxtaposición de caminos no es asociativa.

Sean x e y elementos de X . Escribiremos $x \equiv_a y$ si existe un arco en X que une a x con y .

Lema 10.8. $\equiv_a$ es una relación de equivalencia.

El lema precedente demuestra que esta relación es transitiva. Para ver que la relación es reflexiva, es decir que para cada $x \in X$ se tiene $x \equiv_a x$, consideramos el arco constante $c_x(t) = x$. Para ver que esta relación es simétrica basta encontrar, dado un arco γ que une x con y , un segundo arco

que une y con x . Este está dado por

$$\gamma^{\text{op}} : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma^{\text{op}}(t) = \gamma(1 - t). \quad \square$$

A las clases de equivalencia de esta relación se le llaman componentes arco-conexas de X . La componente arco-conexa de un elemento $x \in X$ se denota A_x .

Proposición 10.9. *Una componente arco-conexa de X es un conjunto arco-conexo maximal de X .*

Demostración Es inmediato que una componente arco-conexa de X es arco-conexa por definición. Sea ahora D un conjunto arco-conexo arbitrario en X y sea x un punto de X . Entonces si y es un punto arbitrario de D , existe un arco en D (y por lo tanto también en X) que une x con y . Por definición se tiene $x \equiv_a y$, de donde y pertenece a la componente arco-conexa A_x . Se sigue que $D \subseteq A_x$. $\square$

ejemplo 10.10. La bola unitaria $B(0; 1)$ en $\mathbb{R}^n$ es arco conexa. Para probar esto basta ver que cada punto x está en la componente arco conexa de 0 , pero se tiene el arco $\gamma(t) = tx$ que satisface $\gamma(0) = 0$ y $\gamma(1) = x$.

Proposición 10.11. *Si X es union de una familia de conjuntos arco-conexos $\{A_i\}$ de modo que para cada par de elementos x e y en X existe una cadena $A_{i_1}, \dots, A_{i_r}$ tal que $x \in A_{i_1}$, $y \in A_{i_r}$ y cada $A_{i_t} \cap A_{i_{t+1}}$ es no vacío para $t = 1, \dots, r - 1$, entonces X es arco-conexo.*

Demostración Todos los elementos de un conjunto arco-conexo A_i están en la misma componente arco-conexa, por lo que la hipótesis implica que existe una única componente conexa. $\square$

Es posible dar una demostración constructiva del resultado precedente yuxtaponiendo caminos como muestra la figura 10.3. Los detalles se dejan al lector.

Proposición 10.12. *El producto $X \times Y$ es arco-conexo si y sólo si lo es cada uno de los espacios X e Y .*

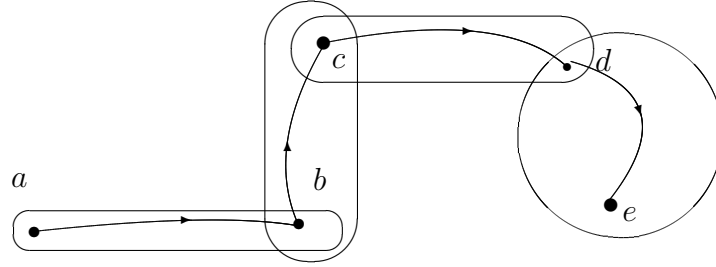


Figure 10.3: Caminos yuxtapuestos en una cadena de subconjuntos arco-conexos.

Demostración Si el producto $X \times Y$ es arco-conexo entonces lo son X e Y ya que son imágenes continuas de $X \times Y$. Por otro lado si X e Y son arco-conexos, probaremos que dos elementos cualesquiera (a, b) y (c, d) existe un arco que los une. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un arco que une a con c y sea $\mu : [0, 1] \rightarrow Y$ un arco que une b con d . Entonces el arco $\lambda : [0, 1] \rightarrow X \times Y$ definido por

$$\lambda(t) = (\gamma(t), \mu(t))$$

satisface lo pedido. $\square$

definición 10.13. Un Espacio Topológico X se dice localmente arco-conexo si para cada punto x de X y cada vecindad V de x existe una vecindad arco-conexa U de x contenida en V .

ejemplo 10.14. Todo abierto en $\mathbb{R}^n$ es localmente arco-conexo, ya que toda vecindad de un punto x en $\mathbb{R}^n$ contiene una vecindad de la forma $B(x; \epsilon)$ que es homeomorfa a $B(0; 1)$.

Proposición 10.15. En un espacio localmente arco-conexo, cada componente arco-conexa es abierta y cerrada.

Demostración La definición de localmente arco-conexo implica que todo punto de un espacio localmente arco-conexo tiene una vecindad arco-conexa. En particular, la componente arco-conexa A_x de un punto x contiene una vecindad de x . Como x es arbitrario, las componentes arco-conexas son abiertas. Como el complemento A_x^c de una componente arco-conexa es

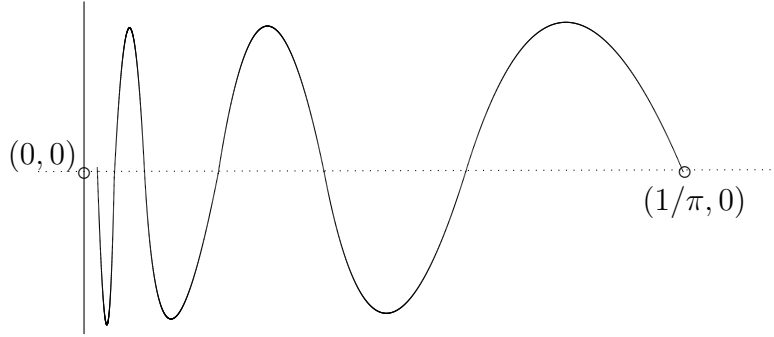


Figure 10.4: Un conjunto conexo que no es arco-conexo.

la unión de las componentes restantes, el conjunto A_x^c abierto. Luego la componente arco-conexa A_x es cerrada. $\square$

Proposición 10.16. *Un espacio conexo y localmente arco-conexo es arco-conexo.*

Demostración Por el resultado precedente, en un espacio localmente arco-conexo las componentes arco-conexas son abiertas y cerradas, pero en un espacio conexo los únicos conjuntos con esa propiedad son el vacío y el espacio completo. $\square$

Corolario 10.16.1. *Un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$ es arco-conexo.*

ejemplo 10.17. Consideremos el conjunto siguiente (ver Figura 10.4):

$$A = \{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cup \{(t, \sin(1/t)) \mid 0 < t \leq 1/\pi\}.$$

El subconjunto $\{(t, \sin(1/t)) \mid 0 < t \leq 1/\pi\}$ es conexo por ser una imagen continua de un intervalo. Como este subconjunto es denso en A , se tiene que A es conexo. Probaremos que A no es arco-conexo. Sea α un camino que

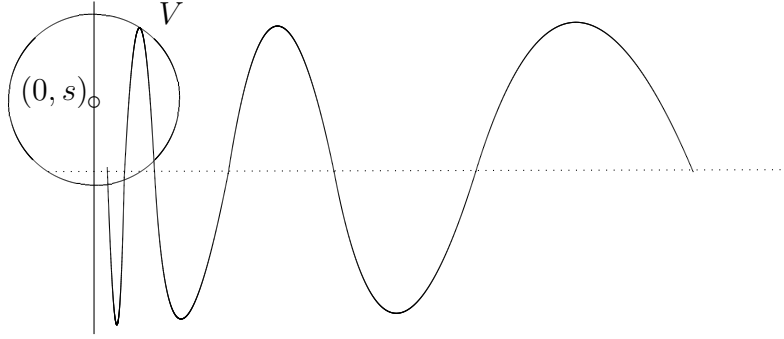


Figure 10.5: Una vecindad no conexa.

une $(0, 0)$ con $(1/\pi, 0)$. Se sigue que $\alpha^{-1}(\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\})$ es cerrado. En particular, contiene a su supremo t_0 . Sea s tal que $\alpha(t_0) = (0, s)$. Sea V una vecindad de $(s, 0)$. Como α es continua en t_0 , existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\alpha\left((t_0, t_0 + \epsilon)\right) \subseteq V.$$

Se sigue que la componente arco-conexa de $(s, 0)$ en $A \cap V$ contiene a $\alpha(t_0 + \epsilon)$ el cual no pertenece a $\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\}$. Sin embargo, para una vecindad lo bastante pequeña de $(s, 0)$, la componente arco-conexa de $(s, 0)$ en $A \cap V$ es $\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cap V$ (ver Figura 10.5).

Una manera de probar que la componente conexa es $\{(0, t) \mid -1 \leq t \leq 1\} \cap V$ es observar que la proyección de $A \cap V$ en el eje X no contiene ningún punto t tal que $(t, \sin(1/t)) \notin V$ y recordar los siguientes hechos:

1. Para V suficientemente pequeño, existe una sucesión $\{t_n\}_n$ que converge a 0 tal que $(t_n, \sin(1/t_n)) \notin V$.
2. La imagen de un conjunto conexo es conexa.
3. Los únicos conjuntos conexos en $\mathbb{R}$ son los intervalos.

Los detalles se dejan al lector.

Ejercicios

1. Sea X un espacio topológico y sean x e y dos puntos con las mismas vecindades. Probar que x e y estás en la misma componente arco-conexa.
2. Probar que el conjunto

$$\{0\} \times [-1, 1] \cup \left\{ \left(t, \cos(1/t) \right) \mid 0 < t < \pi \right\}$$

no es arco-conexo.

3. Sea X un conjunto bien ordenado incontable con un último elemento ω_1 y tal que para cada elemento λ en X distinto de ω_1 , el conjunto de puntos que anteceden a λ es numerable. Sea Y el espacio que se obtiene al identificar cada par de puntos consecutivos de X con los extremos correspondientes de un intervalo. El espacio Y se conoce como la recta larga con un punto final. Determine las componentes conexas y arco-conexas de Y .
4. Sea $X = \{0, 1\}$ con la topología de Sierpinski $\tau = \{\emptyset, \{0\}, X\}$. encuentre las componentes arco-conexas de X .

Chapter 11

Espacios totalmente desconexos

Un espacio X se dice totalmente desconexo si sus componentes conexas son puntos. En este capítulo estudiaremos las propiedades básicas de tales espacios.

Proposición 11.1. *Todo subconjunto A , con más de un punto, de un espacio totalmente desconexo es desconexo.*

Demostración Un subconjunto conexo está contenido en la componente conexa de cada uno de sus puntos. $\square$

Corolario 11.1.1. *Para cada subconjunto A , en un espacio totalmente desconexo X , existen abiertos U y V en X , tales que:*

1. $A \subseteq U \cup V$.
2. $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Un concepto útil a la hora de estudiar espacios desconexos es el concepto de cuasi-componente. Para cada punto $x \in X$, su cuasicomponente $Q(x)$ se define como la intersección de todos los subconjuntos abiertos y cerrados de X que contienen a x . Si denotamos por $\text{Cl}(X)$, la colección de todos los subconjuntos de X que son a la vez abiertos y cerrados, se tiene

$$Q(x) = \bigcap_{\substack{x \in C \\ C \in \text{Cl}(X)}} C.$$

Proposición 11.2. *Toda cuasicomponente es un subconjunto cerrado.*

Demostración Por definición, la cuasicomponente es intersección de subconjuntos cerrados. $\square$

Proposición 11.3. *En un espacio topológico arbitrario X , la cuasicomponente $Q(x)$ de un punto $x \in X$ contiene a su componente conexa $C(x)$.*

Demostración La componente conexa es conexa, y por lo tanto debe estar contenida en cualquier subconjunto $C \subseteq X$, que contiene a x , y que es a la vez abierto y cerrado. En caso contrario podríamos escribir

$$C(x) = (C \cap C(x)) \cup (C^c \cap C(x))$$

y cada uno de estos conjuntos sería un abierto no trivial de $C(x)$. $\square$

Proposición 11.4. *En un espacio compacto, la cuasicomponente $Q(x)$ de un punto coincide con su componente conexa $C(x)$.*

Demostración Como la componente conexa $C(x)$ es el mayor subconjunto conexo que contiene a x , es suficiente probar que $Q(x)$ es conexa. Supongamos que este no es el caso, y de hecho se tiene $Q(x) = A \cup B$ donde A y B son simultáneamente abiertos y cerrados en $Q(x)$, con $A \cap B = \emptyset$. En particular, A y B son cerrados en el espacio ambiente X . Como un espacio compacto es normal, existen conjuntos abiertos U y V tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. Como $(U \cup V)^c \supseteq Q(x)^c$ es compacto, el recubrimiento

$$(U \cup V)^c \subseteq \bigcup_{\substack{x \in C \\ C \in \text{Cl}(X)}} C^c$$

tiene un subrecubrimiento finito, es decir

$$(U \cup V)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^n C_i \right)^c.$$

Sea $C = \bigcap_{i=1}^n C_i$. Nótese que C es a la vez abierto y cerrado. Como $(U \cup V)^c \subseteq C^c$, se tiene $C \subseteq U \cup V$. Además $Q(x) \subseteq C$ por ser C abierto y cerrado. Definamos $U' = C \cap U$ y $V' = C \cap V$. Afirmamos que cada uno de esos conjuntos es a la vez abierto y cerrado. Como $A \cap V' \subseteq U \cap V = \emptyset$, concluimos que $A \subseteq U'$, y del mismo modo $B \subseteq V'$. Esto contradice la definición de quasi-componente.

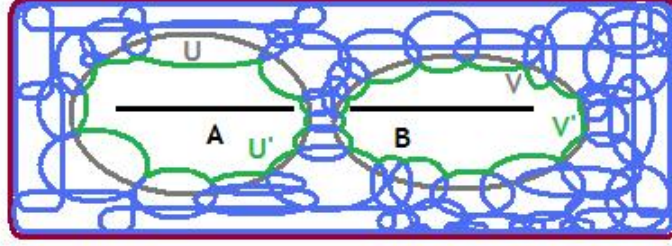


Figure 11.1: La estrategia para la demostración de la Proposición 11.4.

Para probar la afirmación, observamos que U' es intersección de dos conjuntos abiertos, por lo que es abierto, y nos basta, entonces, probar que es cerrado. Si $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una red en U' que converge a un punto a de X , entonces $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es de hecho una red en C que es un conjunto cerrado, por lo que a está en C . Si $a \in V'$, entonces $a_\lambda \in V'$ para λ suficientemente grande, pues este último conjunto es abierto, lo que nos lleva a una contradicción. Debemos suponer, por lo tanto, que a está en U' . $\square$

La Figura 11.1 muestra la estrategia utilizada en la demostración del resultado anterior. En ella se recubre el exterior de los círculos grises que representan a U y V por círculos azules, para finalmente remplazar los círculos grises por las figuras acotadas en verde, es decir U' y V' .

Corolario 11.4.1. *En un espacio compacto totalmente desconexo, las cuasi-componentes son puntos.*

Corolario 11.4.2. *En un espacio compacto totalmente desconexo, para cada par de puntos (x, y) , existe un conjunto abierto y cerrado C que contiene a x pero no a y .*

El resultado anterior suele expresarse diciendo que en un espacio compacto totalmente desconexo, los conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados separan puntos. Esto significa que un punto está totalmente determinado por la colección de conjuntos a la vez abiertos y cerrados a los que pertenece.

Proposición 11.5. *En un espacio compacto y totalmente desconexo, cada punto tiene una base de vecindades formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.*

Demostración Sea X un espacio compacto y totalmente desconexo. Sea $x \in X$, y sea U una vecindad de x . Basta ver que existe un conjunto C , a la vez abierto y cerrado, que satisface $x \in C \subseteq U$. Para cada punto $y \in U^c$ existe un conjunto abierto y cerrado C_y tal que $x \in C_y$, pero $y \notin C_y$. Como U^c es compacto, el recubrimiento

$$U^c \subseteq \bigcup_{y \in U^c} C_y^c$$

tiene un subrecubrimiento finito, digamos

$$U^c \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_{y_i}^c = \left(\bigcap_{i=1}^n C_{y_i} \right)^c.$$

Definimos $C = \bigcap_{i=1}^n C_{y_i}$. Entonces C es un conjunto abierto y cerrado que satisface $U^n \subseteq C^n$, y por lo tanto $C \subseteq U$. $\square$

Corolario 11.5.1. *En un espacio compacto totalmente desconexo, existe una base de la topología formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.*

Necesitamos una versión mas precisa de este último resultado para espacios segundo contables.

Lema 11.6. *Sea $\mathfrak{B}$ una base de una topología $\mathbb{T}$ en un espacio X , de modo que $(X, \mathbb{T})$ es segundo contable. Entonces existe una base numerable $\mathfrak{B}'$ de $\mathbb{T}$ contenida en $\mathfrak{B}$.*

Demostración Sea $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i=1}^\infty$ una base numerable de $\mathbb{T}$. Sea Ω la colección de pares (i, j) de números naturales tales que existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $C_i \subseteq B \subseteq C_j$. Para cada par $(i, j) \in \Omega$ escogemos $B_{i,j}$ tal que $C_i \subseteq B_{i,j} \subseteq C_j$. Sea

$$\mathfrak{B}' = \{B_{i,j} \mid (i, j) \in \Omega\}.$$

Claramente $\mathfrak{B}'$ es numerable. Probaremos que es una base. Basta ver que cada elemento $C_j \in \mathfrak{C}$ es union de elementos de $\mathfrak{B}'$. Para cada $y \in C_j$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $y \in B \subseteq C_j$. Como $\mathfrak{C}$ es base, existe $C_i \in \mathfrak{C}$ tal que $y \in C_i \subseteq B$. Se sigue que $(i, j) \in \Omega$ y por lo tanto $B_{i,j}$ está definido, luego $y \in C_i \subseteq B_{i,j} \subseteq C_j$. Se concluye que

$$C_j = \bigcup_{\substack{i \in \Omega_j \\ B_{i,j} \subseteq C_j}} B_{i,j},$$

donde $\Omega_j = \{i \in \mathbb{N} \mid (i, j) \in \Omega\}$. $\square$

Corolario 11.6.1. *En un espacio compacto totalmente desconexo, existe una base numerable de la topología formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados.*

Utilizaremos este resultado para caracterizar topológicamente al conjunto de Cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Proposición 11.7. *Un espacio topológico compacto, totalmente desconexo, segundo contable, es homeomorfo a un subconjunto del conjunto de cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración Sea $\mathfrak{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sub-base numerable de la topología de X formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Una base numerable funciona aquí, pero lo haremos con mayor generalidad para su uso en la próxima demostración. En particular, la colección $\mathfrak{C}$ separa puntos. Se sigue que la función

$$\psi : X \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad \psi_i(x) = \chi_{C_i}(x),$$

donde χ_C es la función característica del subconjunto $C \subseteq X$, es inyectiva. Nótese que la función característica de un conjunto que es a la vez abierto y cerrado es continua. Como cada coordenada de ψ es continua, también lo es la función ψ misma por la propiedad universal del producto. El resultado sigue dado que X es compacto y $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ es Hausdorff. $\square$

Proposición 11.8. *Todo espacio topológico compacto X , totalmente desconexo, segundo contable, sin puntos aislados (abiertos), es homeomorfo al conjunto de cantor $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.*

Demostración Es suficiente escoger la familia $\mathfrak{C}$ de la demostración precedente para hacer la función ψ epiyectiva. Es decir, para cada $\epsilon \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, queremos que exista $x \in X$ tal que $\psi(x) = \epsilon$. Nótese que

$$\psi^{-1}(\epsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \psi^{-1}(U_{n,\epsilon}),$$

donde $U_{n,\epsilon}$ es el abierto formado por todos los puntos en $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ cuyas n primeras coordenadas coinciden con las de ϵ . Toda intersección finita y no vacía de conjuntos de la forma $U_{n,\epsilon}$ es de esa misma forma, de hecho

$$\bigcap_{k=1}^N U_{n_k, \epsilon_k} = U_{n_s, \epsilon_s}, \text{ si } n_s = \max_{k=1}^N n_k,$$

si tal intersección es no vacía. En particular, la colección $\{\psi^{-1}(U_{n,\epsilon}) | n \in \mathbb{N}\}$ tiene la propiedad de la intersección finita si y sólo si $\psi^{-1}(U_{n,\epsilon}) \neq \emptyset$ para cada entero positivo n . Como cada conjunto $U_{n,\epsilon}$ es cerrado, la compacidad de X implica que, para una función continua ψ con esta última propiedad, cada pre-imagen $\psi^{-1}(\epsilon)$ será no vacía y por lo tanto ψ será epiyectiva.

Ahora, definimos la familia $\mathfrak{C}$ de forma recursiva. Para ello, asumimos la existencia de una familia $\mathfrak{C}'$ pre-existente, digamos una base numerable de conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Si $C'_1 \notin \{X, \emptyset\}$, definimos $C_1 = C'_1$. En caso contrario escogemos C_2 o C_3 , el primero que es un subconjunto no trivial. Tomamos ahora la función $\psi_1 = \chi_{C_1}$. Habiendo definido $C_1, \dots, C_n$, y las correspondientes funciones características $\psi_1, \dots, \psi_n$, escogemos el primer C'_k , con $k = k(n)$ que no pertenece al álgebra booleana generada por los conjuntos C_i ya definidos. Tal conjunto existe, ya que X , y por lo tanto $\mathfrak{C}'$, son infinitos por no tener puntos aislados. Definimos el conjunto siguiente por

$$C_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{2^n} V_{n+1, \epsilon_i},$$

donde $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{2^n}$ son todas las secuencias de ceros y unos de largo n , y

$$V_{n+1, \epsilon_i} \subseteq \bigcap_{j=1}^n \psi_j^{-1}(\epsilon_{i,j}) = \phi_n(\epsilon_i),$$

donde $\epsilon_{i,j}$ es la j -ésima coordenada de ϵ_i y $\phi_n = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Definimos $\psi_{n+1} = \chi_{C_{n+1}}$. Debemos requerir dos condiciones adicionales.

- Si $C'_k \cap \phi_n(\epsilon_i)$ y $C'_k \cap \phi_n(\epsilon_i)^c$ son ambos no vacíos, entonces asumimos $V_{n+1, \epsilon_i} = C'_k \cap \phi_n(\epsilon_i)$.
- Tanto V_{n+1, ϵ_i} como $\phi_n(\epsilon_i) \setminus V_{n+1, \epsilon_i}$ son no vacíos.

Es fácil ver que C'_k es unión de una subfamilia de conjuntos de la forma V_{n+1, ϵ_i} . Concluimos que C'_k está en el álgebra generada por $C_1, \dots, C_{n+1}$.

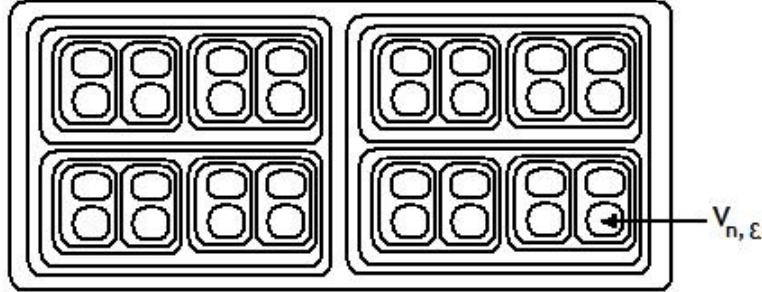


Figure 11.2: Los conjuntos anidados de la demostración de la Proposición 11.8.

Se sigue que los conjuntos C_i definidos recursivamente de este modo forman una sub-base. Por otro lado, la segunda condición garantiza que, si $\phi_{n+1} = (\psi_1, \dots, \psi_n, \psi_{n+1})$, entonces $\phi_{n+1}^{-1}(\eta) \neq \emptyset$ para cualquier secuencia de largo $n + 1$. El resultado sigue. $\square$

La sucesión de conjuntos anidados $V_{i,\epsilon}$ se muestra en la Figura 11.2.

Ejercicios

1. Probar que el producto de dos espacios totalmente desconexos es totalmente desconexo.
2. Sea X un espacio compacto y sea $\sim$ la relación *están en la misma componente conexa*. Probar que $X/\sim$ es un espacio compacto totalmente desconexo.
3. Probar que $\mathbb{R}_l$, definido como en los ejercicios del capítulo 2 es totalmente desconexo.
4. Sea X un espacio compacto totalmente desconexo. Sea $x \in X$ y sea Q la quasi-componente de x . Probaremos en este ejercicio que $Q = \{x\}$ utilizando el Lema de Uryson.
 - (a) Probar que si Q tiene más de un punto, entonces $Q = U \cup V$ con U y V compactos no vacíos disjuntos.

- (b) Probar que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ que vale 0 en U y 1 en V .
 - (c) Sea $B = f^{-1}[1/5, 4/5]$. Probar que B es un compacto que no corta a Q y que existe un conjunto abierto y cerrado A que contiene a B y no corta Q .
 - (d) Probar que existe una función continua $h : X \rightarrow [0, 1]$ que vale 0 en U y 1 en V y cuya imagen está contenida en $[0, 1/5] \cup [4/5, 1]$.
 - (e) Utilizar lo anterior para llegar a una contradicción.
5. Sea X un espacio compacto totalmente desconexo. Probar que X es homeomorfo a un subespacio de un producto del tipo $\prod_{i \in I} \{0, 1\}$.
6. Sea X un espacio compacto, y sea $C = C_x$ la componente conexa de $x \in X$. Sea U un abierto que contiene a C . Probar que existe un conjunto D , simultaneamente abierto y cerrado, tal que $C \subseteq D \subseteq U$.

Chapter 12

Grupos Topológicos

Sea X un conjunto y sea “ $\cdot$ ” una operación en X que hace del par $(X, \cdot)$ un grupo. Sea $\mathcal{O}$ una topología en X tal que las funciones $\pi : X \times X \rightarrow X$ and $\mathfrak{I} : X \rightarrow X$ defined by $\pi(x, y) = x \cdot y$ and $\mathfrak{I}(x) = x^{-1}$ son continuas. Entonces $G = (X, \cdot, \mathcal{O})$ se dice un grupo topológico. Como es habitual confundiremos G con X en lo sucesivo para ahorrar notación. Es decir, diremos a menudo $G = (G, \cdot, \mathcal{O})$, sin que esto genere confusión, en tanto la operación de grupo y la topología sean claras del contexto.

Ejemplos.

1. El conjunto de los números reales con la suma y la topología usuales es un grupo topológico. Este grupo es denotado indistintamente por $\mathbb{R}$ o bien por $(\mathbb{R}, +, \mathcal{O})$, donde $\mathcal{O}$ es la topología usual.
2. Un grupo G cualquiera es un grupo topológico con la topología discreta. De hecho, si G es discreto entonces $\mathfrak{I}$ es continua, dado que toda función de un espacio discreto a un espacio arbitrario es continua. Además, si G es discreto entonces $G \times G$ es discreto, por lo que π es continua.
3. G un grupo cualquiera con la topología indiscreta es un grupo topológico. De hecho, π y $\mathfrak{I}$ toman valores en G y si G es indiscreto entonces ambas son continuas, dado que toda función de un espacio arbitrario a un espacio indiscreto es continua.
4. Sea $G = \mathbb{R}$ con la suma usual y la topología cofinita. Entonces G no

es grupo topológico. De hecho, 0 es cerrado pero:

$$\pi^{-1}(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\},$$

y este último conjunto no es cerrado en el producto, por lo que π no es continua.

Proposición 12.1. *Sea G un grupo topológico. Sea e el neutro de G . Si $\{e\}$ es cerrado en G , entonces G es un espacio de Hausdorff.*

Demostración: Sea $f : G \times G \rightarrow G$ tal que $f(x, y) = \pi(\mathfrak{I}(x), y) = x^{-1}y$. Tenemos que, como f es continua, entonces

$$f^{-1}(e) = \Delta = \{(x, x) \mid x \in G\},$$

debe ser cerrado en $G \times G$, lo que es cierto si y sólo si G es un espacio de Hausdorff. $\square$

Corolario 12.1.1. *Sea G un grupo topológico. Si G es un espacio T_1 , entonces G es un espacio de Hausdorff.*

Demostración: Si G es T_1 entonces $\{e\}$ es cerrado por lo que aplicamos el resultado precedente. $\square$

definición 12.2. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *homogéneo* si, para cualquier par (x, y) de elementos de X , existe un homeomorfismo $f_{(x,y)} : X \rightarrow X$ tal que $f_{(x,y)}(x) = y$.

Notar que si un espacio X es homogéneo y si V es una vecindad de un punto $x \in X$, entonces para todo y se tiene que $f_{(x,y)}(V)$ es una vecindad de y homeomorfa a V . Además, si un espacio homogéneo contiene un punto cerrado, entonces todo punto del espacio es cerrado, por lo que el espacio es T_1 . Análogamente, si existe un punto abierto, todo punto es abierto, luego el espacio es discreto.

Proposición 12.3. *Si G es un grupo topológico, entonces G es un espacio homogéneo.*

Demostración: Dados $x, y \in G$, sea $f : G \rightarrow G$ tal que $f(z) = yx^{-1}z$ para todo $z \in G$. Dicha función es continua para todo x y para todo y . La función $g : G \rightarrow G$ tal que $g(z) = xy^{-1}z$ es continua y tenemos que

$$g(f(z)) = xy^{-1}(yx^{-1}z) = xx^{-1}z = z = yy^{-1}z = yx^{-1}(xy^{-1}z) = f(g(z)),$$

para todo z en G , por lo que ambas funciones son inversas, de donde f es un homeomorfismo. Además se cumple que $f(x) = yx^{-1}x = y$. $\square$

Corolario 12.3.1. *Si G tiene un punto abierto, entonces G es discreto.*

De las proposiciones 12.1 y 12.3 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 12.3.2. *Para un grupo topológico G , cuyo neutro es e , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. G tiene un punto cerrado,
2. $\{e\}$ es cerrado en G ,
3. G es un espacio T_1 ,
4. G es un espacio de Hausdorff,

son equivalentes.

Sea G un grupo topológico y sea H subgrupo de G . Podemos tomar en H la topología de subespacio, con la cual H es a su vez un grupo topológico. Diremos que H es subgrupo topológico de G y escribiremos $H \leq G$. Si H es normal en G entonces denotamos $H \trianglelefteq G$.

Proposición 12.4. *Sea G un grupo topológico y sea $H \leq G$ entonces $\bar{H} \leq G$. Si $H \trianglelefteq G$ entonces $\bar{H} \trianglelefteq G$.*

Demostración: Sean $g, h \in \bar{H}$ entonces

$$(g, h) \in \bar{H} \times \bar{H} = \overline{H \times H}.$$

Por lo tanto, existe una red $(x_i)_{i \in \Lambda}$ en $H \times H$ tal que $x_i \rightarrow (g, h)$. Para todo $i \in \Lambda$. Es decir, existen redes g_i y h_i en H para las que $x_i = (g_i, h_i)$ y tenemos, simultaneamente, que $g_i \rightarrow g$ y $h_i \rightarrow h$.

Como H es subgrupo, para todo índice λ se cumple que ambos, $g_\lambda h_\lambda$ y g_λ^{-1} , están en H . Como el producto y la inversa son continuas, $g_\lambda h_\lambda \rightarrow gh$, por lo que $gh \in \bar{H}$, y $g_\lambda^{-1} \rightarrow g^{-1}$, por lo que $g^{-1} \in \bar{H}$. Se sigue que $\bar{H} \leq G$. Si H es normal, entonces para cualquier $x \in G$, la red $\{xh_\lambda x^{-1}\}$ está en H , luego su límite xhx^{-1} está en $\bar{H}$. $\square$

Un importante subgrupo es $E = \overline{\{e\}}$. Este es un subgrupo normal y cerrado de G . Este es el menor subgrupo cerrado de G , ya que todo subgrupo debe contener a la identidad.

Proposición 12.5. *Sean x e y elementos del grupo topológico G y sea E la clausura de la identidad. Entonces x está contenido en cada vecindad de y si y sólo si $yx^{-1} \in E$.*

Demostración: Basta ver que x está contenido en cada vecindad de y si y sólo si y está en la clausura de $x = ex$, la que es igual a Ex por ser $u \mapsto ux$ un homeomorfismo. El resultado es ahora inmediato. $\square$

Una vecindad V de e se dice simétrica si $V = V^{-1} = \{x^{-1} | x \in V\}$. Si U es una vecindad arbitraria de e , entonces $U \cap U^{-1}$ es una vecindad simétrica contenida en U , por lo que la identidad tiene una base formada por vecindades simétricas en todo grupo topológico.

Recuerdese que la T_0 -identificación de un espacio topológico X es el espacio que se obtiene al identificar cada par de puntos de X que tengan exactamente las mismas vecindades. Esta no es en general un espacio T_1 , pero si lo es cuando la relación “ x está en cada vecindad de y ” es simétrica. Esto es inmediato en el caso de grupos topológicos, ya que la relación $y \in Hx$ es simétrica para toda vecindad simétrica de la identidad. El siguiente resultado es ahora inmediato:

Corolario 12.5.1. *La clase de x en la T_0 -identificación de G es la clase lateral Ex .*

Se sigue que si G es un espacio T_0 , entonces $E = \{e\}$. En particular, tenemos el resultado siguiente:

Corolario 12.5.2. *Todo grupo topológico T_0 es un espacio T_1 .*

Lo que junto al Corolario 12.1.1 nos da lo siguiente:

Corolario 12.5.3. *Todo grupo topológico T_0 es un espacio de Hausdorff.*

Si $E = G$, entonces la T_0 -identificación de G consta de un sólo punto. En este caso la topología de G es indiscreta. En particular, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 12.5.4. *Si $E = \{e\}$ es denso entonces G es indiscreto.*

Al utilizar la homogeneidad de los grupos topológicos se obtiene:

Corolario 12.5.5. *Si G tiene un punto denso entonces es indiscreto.*

Observación: Si G es grupo topológico con neutro e y $H \leq G$ entonces podemos ver lo siguiente:

1. Si existe una vecindad V de e tal que $V \subseteq H$, entonces para todo $h \in H$ el producto hV es vecindad de h y $hV \subseteq H$ por lo que H es abierto en G .
2. Sea $g \in G$. Como $x \rightarrow gx$ es homeomorfismo, entonces para todo $H \leq G$ se cumple que:
 - H es cerrado en G si y sólo si gH es cerrado en G .
 - H es abierto en G si y sólo si gH es abierto en G .
3. Si H es abierto en G , entonces cada clase lateral gH es abierta en G . En particular $H^c = \bigcup_{g \notin H} gH$ es abierto en G , por lo que H es también cerrado en G .

Dado un espacio topológico X y un elemento x de X llamaremos X_x a la componente conexa de x en X .

Proposición 12.6. *Sea G un grupo topológico con neutro e . Entonces $G_e \trianglelefteq G$.*

Demostración: Como todo producto de espacios conexos es conexo, se tiene que $G_e \times G_e$ es conexo. Como π es continua, se tiene que $\pi(G_e \times G_e)$ es conexo. Ahora bien, como $\pi(e, e) = e$, lo anterior implica que $\pi(G_e \times G_e) \subseteq G_e$. El razonamiento para la inversa es similar y se deja al lector. Concluimos que $G_e \subseteq G$.

Ahora bien, dado $g \in G$ definimos $f : G \rightarrow G$ mediante $f(x) = g^{-1}xg$. La función f así definida es continua y satisface $f(e) = g^{-1}eg = e$. Concluimos que $g^{-1}G_eg = f(G_e) \subseteq G_e$. El resultado sigue. $\square$

Una observación similar es válida para la componente arcoconexa, ya que si $\gamma(t)$ es una curva que une x e y , la función $t \mapsto g\gamma(t)$ define una curva que une gx con gy . Dejamos los detalles al lector.

Ejemplos.

1. $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ es grupo topológico y $G_1 = \mathbb{R}^+$ es el subgrupo de números reales positivos.
2. Sea $G = GL_n(\mathbb{R})$, y sea I_n la matriz identidad, entonces dejamos como ejercicio para el lector probar que:

$$G_{I_n} = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}.$$

Sugerencia: Usar la forma de Jordan real.

definición 12.7. Sean G, G' dos grupos topológicos, y sea $\phi : G \rightarrow G'$ isomorfismo de grupos. Entonces ϕ se dice un isomorfismo de grupos topológicos si tanto ϕ como ϕ^{-1} son continuas. En este caso se dice que G y G' son isomorfos como grupos topológicos, y se escribe $G \cong G'$.

Ejemplos. Sea G un grupo arbitrario. Sea G_d el grupo G provisto de la topología discreta, y sea G_i el mismo grupo con la topología indiscreta. Sean $Id_1 : G_d \rightarrow G_i$ e $Id_2 : G_i \rightarrow G_d$ las funciones identidades respectivas. Claramente ambas son isomorfismos de grupos e Id_1 es continua, pero Id_2 no lo es si G es no trivial. En particular, los grupos topológicos G_d y G_i no son isomorfos.

Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos. Entonces definimos el grupo topológico producto $\prod_{i \in I} G_i$ como el producto directo (de grupos) con la topología producto. Recordemos que la topología producto es la topología coinducida por las funciones coordenadas $\pi_i : G \rightarrow G_i$, y que una función $f : X \rightarrow G$ es continua si y sólo si cada coordenada $\pi_i \circ f : X \rightarrow G_i$ es continua.

Proposición 12.8. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos. Entonces $\prod_{i \in I} G_i$ es también un grupo topológico.

Demostración: La continuidad de la multiplicación sigue inmediatamente del diagrama

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{a} & G \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \pi_i \\ G_i \times G_i & \longrightarrow & G_i \end{array}$$

donde la función diagonal es continua por ser composición de funciones continuas y a es continua por ser cada coordenada $\tau_i \circ a$ continua. La continuidad de la inversa se demuestra del mismo modo y se deja al lector. $\square$

ejemplo 12.9. Sea $G = \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$ con $G_n = \{0, 1\}$ para todo n . La topología de G_n es la discreta. El grupo G consiste de todas las sucesiones $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ de 0s y 1s y es un grupo de Hausdorff compacto por el Teorema de Tychonoff. Dejamos como ejercicio al lector determinar si los siguientes subgrupos:

1. $A = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) | a_1 + a_4 + a_7 = 0\}$,
2. $B = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) | a_i = 0 \text{ para todo } i \text{ par}\}$,
3. $C = \{(a_1, a_2, a_3, \dots) | a_i \neq 0 \text{ para un número finito de coordenadas } i\}$,

son abiertos y/o cerrados.

Sea G un grupo topológico y $H \trianglelefteq G$ entonces $\frac{G}{H}$ es un grupo. Lo podemos dotar de la topología cociente, es decir la topología coinducida por la proyección $p : G \rightarrow \frac{G}{H}$. En esta topología, un conjunto $A \subseteq \frac{G}{H}$ es abierto si y sólo si

$$p^{-1}(A) = \bigcup_{xH \in A} xH$$

es abierto en G . Una función $f : \frac{G}{H} \rightarrow X$ es continua si y sólo si $f \circ p : G \rightarrow X$ es continua. En particular, un conjunto $Z' \subseteq \frac{G}{H}$ es abierto si y sólo si su pre-imagen $Z = p^{-1}(Z')$ es abierto. Se sigue que la topología de $\frac{G}{H}$ está generada por abiertos de la forma $p(Z)$ con $Z \subseteq G$. Las pre-imagenes de los subconjuntos de $\frac{G}{H}$ son precisamente los conjuntos que satisfacen $HZ = Z$. Más generalmente $p^{-1}(p(Z)) = HZ$. Sin embargo, “ Z abierto” implica “ $HZ = \bigcup_{h \in H} hZ$ abierto”, por lo que de hecho todo conjunto de la forma $p(Z)$, con Z abierto, es un abierto.

Proposición 12.10. Sea G un grupo topológico y $H \trianglelefteq G$ entonces $\frac{G}{H}$ es un grupo topológico.

Demostración: Basta ver que el producto y el inverso son funciones continuas. La continuidad de la función inverso es inmediata del diagrama

siguiente

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \frac{G}{H} & \longrightarrow & \frac{G}{H} \end{array},$$

donde las funciones verticales son las proyecciones canónicas y las funciones horizontales son las funciones inverso. La continuidad de la función diagonal sigue del hecho de que es composición de funciones continuas y la demostración se termina por la definición de topología cociente, tal como en el caso del producto de grupos.

Similarmente el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & G \times G & \longrightarrow & G \\ & & \downarrow P & \searrow & \downarrow p \\ \frac{G}{H} \times \frac{G}{H} & \xrightarrow{a} & \frac{(G \times G)}{(H \times H)} & \longrightarrow & \frac{G}{H} \end{array}$$

prueba que la función $\frac{(G \times G)}{(H \times H)} \rightarrow \frac{G}{H}$ inducida por el producto es continua. La demostración se termina si probamos que la biyección a es continua. La topología en $\frac{G \times G}{H \times H}$ está generada por abiertos de la forma $P(Z)$, donde Z es un abierto en $G \times G$. La topología de $\frac{G}{H} \times \frac{G}{H}$ está generada por abiertos del tipo $p(U) \times p(V)$, donde U y V son abiertos de G . Lo anterior, en particular, implica que a^{-1} es continua, pues $Z = U \times V$ nos dá $P(Z) = a(p(U) \times p(V))$. Sin embargo, necesitamos la continuidad de a . Para eso, observamos que todo abierto $Z \subseteq G \times G$ es union de abiertos de la forma $U \times V$. Si ponemos $Z = \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i$, entonces $a^{-1}(P(Z)) = \bigcup_{i \in I} p(U_i) \times p(V_i)$, de donde se obtiene el resultado. $\square$

Observación 12.11. En la demostración precedente, la caracterización de los abiertos de $\frac{G}{H}$ como imágenes de abiertos en G juega un papel fundamental. Una demostración puramente functorial es bastante elusiva, excepto si admitimos hipótesis fuertes en G y H , como por ejemplo G compacto y H cerrado.

ejemplo 12.12. $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{R}$ y $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \cong S^1$. Para probar esto último observamos que $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ es compacto, por ser una imagen continua del compacto $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, y por ser Hausdorff (ya que $\mathbb{Z}$ es cerrado). Basta por lo tanto recordar que una

biyacción continua de un espacio compacto en un espacio de Hausdorff es cerrada, y por lo tanto un homeomorfismo.

Proposición 12.13. *Sea H un subgrupo normal de G .*

- i) $\frac{G}{H}$ es Hausdorff si y sólo si H es cerrado en G .*
- ii) $\frac{G}{H}$ es discreto si y sólo si H es abierto en G .*
- iii) $\frac{G}{H}$ es indiscreto si y sólo si H es denso en G .*

Demostración: Las dos primeras afirmaciones son inmediatas, dado que $\frac{G}{H}$ es Hausdorff o discreto si y sólo si $\{e_{\frac{G}{H}}\} = \{eH\}$ es respectivamente cerrado o abierto. Para la última, Si H es denso, existe una red $\{h_\lambda\}_\lambda$ en H que converge a cada elemento de G . Por continuidad, concluimos que la red constante con valor $e_{\frac{G}{H}}$ converge a cada punto del cociente y por lo tanto $\{e_{\frac{G}{H}}\}$ es denso. Para la converso, observamos que la clausura $\bar{H}$ satisface $H\bar{H} = \bar{H}$, por lo que es la pre-imagen de un subconjunto $C \subseteq \frac{G}{H}$ que es necesariamente cerrado, y por lo tanto $\bar{H} = G$ si $\{e_{\frac{G}{H}}\}$ es denso. $\square$

Proposición 12.14. *Sean G y G' grupos topológicos. Sean H y N subgrupos de G .*

- i.- Sea $f : G \rightarrow G'$ un homomorfismo continuo. Entonces el isomorfismo canónico de grupos $\phi : G/\ker f \rightarrow \text{im } f$ es continuo.*
- ii.- Si N y H son normales en G y $N \subseteq H$, el isomorfismo canónico de grupos*

$$\phi : \frac{G}{H} \rightarrow \frac{G/N}{H/N}$$

es bicontinuo, es decir es un isomorfismo de grupos topológicos.

- iii.- Si N es normal en G , el isomorfismo canónico de grupos $\phi : \frac{H}{H \cap N} \rightarrow \frac{HN}{N}$ es continuo.*

Demostración: (ii) es inmediato de la definición de abiertos en el cociente, dado que los abiertos en cada lado son aquellos subconjuntos cuyas

pre-ímagenes en G son abiertas. (i) se sigue del diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \frac{G}{\ker f} & \xrightarrow{\quad} & \text{im } f \longrightarrow G' \end{array},$$

y de la caracterización de funciones continuas *en* un cociente y *hacia* un subespacio. Finalmente, (iii) sigue de aplicar (i) a la función canónica $H \rightarrow \frac{G}{N}$. $\square$

ejemplo 12.15. Sea $G = \mathbb{R}$ con la topología discreta, y sea $G' = \mathbb{R}$ con la topología indiscreta. Entonces el homomorfismo identidad $i : G \rightarrow G'$ es continuo y es un isomorfismo de grupos. En particular, su núcleo es trivial y su imagen es todo el codominio. Sin embargo, su inversa no es continua. Esto muestra que el isomorfismo inverso en (i) no es continuo en general.

ejemplo 12.16. sea $G = \mathbb{R}$ con la topología usual, y sean $H = \mathbb{Z}$, $N = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Claramente $H \cap N = 0$, luego $\frac{H}{H \cap N}$ tiene la topología usual de $\mathbb{Z}$. Sin embargo El Cociente $\frac{H+N}{N}$ está contenido en $\frac{G}{N} = \frac{\mathbb{R}}{\sqrt{2}\mathbb{Z}}$ que es un compacto. Se concluye que existe una sucesión $\{k_i\}$ en $\mathbb{Z}$ con $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty$ tal que la sucesión $\{2^{k_i} + N\}_i$ es convergente en $\frac{G}{N}$, y por lo tanto $\{(2^{k_i} - 2^{k_{i-1}}) + N\}_i$ converge a 0 en $\frac{H+N}{N}$. En particular $\frac{H+N}{N}$ no es discreto.

Proposición 12.17. Sea G un grupo topológico. Sea $C \subseteq G$ un subconjunto compacto, y sea U un abierto que contiene a C . Entonces existe una vecindad W de la identidad que satisface $CW \subseteq U$.

Demostración: Para cada punto $x \in C$, escojamos una vecindad V_x de e tal que $xV_x \subseteq U$, y sea W_x una vecindad simétrica de e tal que $W_x^2 \subseteq V_x$. Tal vecindad existe por la continuidad de la multiplicación. El recubrimiento

$$C \subseteq \bigcup_{x \in C} xW_x$$

tiene un subrecubrimiento finito, ya que C es compacto. Si $C \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i W_{x_i}$, y si $W = \bigcap_{i=1}^n W_{x_i}$, entonces W cumple lo pedido. De hecho, $x \in x_i W_{x_i}$ para algún i . Luego

$$xW \subseteq x_i W_{x_i}^2 \subseteq x_i V_{x_i} \subseteq U.$$

Concluimos que $CW \subseteq U$. $\square$

Proposición 12.18. *Un grupo compacto totalmente desconexo tiene una base de vecindades de la identidad formada por subgrupos abiertos.*

Demostración: Por los resultados del capítulo precedente, sabemos que hay una base de vecindades de la identidad formada por conjuntos que son a la vez abiertos y cerrados. Sea C una vecindad de la identidad de este tipo. Es suficiente probar que C contiene algún subgrupo abierto H . Nótese que C es compacto por ser cerrado en un compacto. Poniendo $U = C$ en el resultado precedente, lo que puede hacerse por ser C abierto, concluimos que $CW \subseteq C$ para cierta vecindad W de la identidad. Sea H el grupo generado por W . Este es un subgrupo abierto, dado que contiene a la vecindad W de la identidad. Cada elemento de H se escribe como una palabra en elementos de W o sus inversos. Estos últimos están también en W por ser W una vecindad simétrica. Un sencillo argumento por inducción en el largo de tales palabras muestra que $H \subseteq C$. $\square$

Ejercicios

1. Probar que si G es un grupo conexo y si N es un subgrupo normal y discreto, entonces N está contenido en el centro $Z(G)$ de G .
2. Probar que si A es un subconjunto cerrado de G y B es un subconjunto compacto de G entonces AB es cerrado en G .
3. Encontrar subconjuntos cerrados A y B de algún grupo G tales que AB sea un subconjunto propio denso en G .
4. Probar que si G es un grupo topológico de Hausdorff, entonces $Z(G)$ es cerrado.
5. Probar que si G es un grupo topológico, entonces todo subgrupo maximal de G es cerrado o denso.
6. Probar que si G es compacto y si $f : G \rightarrow G'$ es un homomorfismo continuo entonces $G/\ker f \cong \text{Im} f$ como grupos topológicos.
7. Probar que si H es un subgrupo compacto de G y si N es un subgrupo normal cerrado de G entonces $H/(H \cap N) \cong HN/N$ como grupos topológicos.

8. Probar que si H es un subgrupo normal de G entonces $G/\bar{H}$ es la T_0 identificación de G/H .
9. Probar que todo subgrupo cerrado y conexo de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ es isomorfo a $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$ para algún $m \leq n$.
10. Probar que $(\sqrt{2} + \mathbb{Z}, \sqrt{3} + \mathbb{Z})$ genera un subgrupo denso de $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$.
11. Probar que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ generan un subgrupo denso de $\mathbb{R}$.
12. Encontrar subgrupos A y B de $\mathbb{R}$ tales que $(A + B)/B$ es indiscreto, pero $A/A \cap B$ es discreto.
13. Probar de dos maneras que si G es Hausdorff, el conjunto de los pares (a, b) en $G \times G$ que satisfacen $ab = ba$ es cerrado:
 - Utilizando redes.
 - Directamente de la definición.

Utilice esto para dar una segunda demostración de que la clausura de un grupo abeliano es abeliana.

14. Demuestre que todo subgrupo cerrado propio de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ es finito.
15. Probar que todo subgrupo cerrado no nulo de $\mathbb{Z}_p$ es de la forma $p^t \mathbb{Z}_p$ para algún $t \in \mathbb{N}$.
16. Sea G un grupo topológico, y sea $\mathcal{V}(e)$ su conjunto dirigido de vecindades de la identidad. Sea A un subconjunto de $G^n = G \times \dots \times G$. Probar que todo $x \in G^n$ satisface $x \in \bar{A}$ sí y sólo si existe una red $\{a_V\}_{V \in \mathcal{V}(e)}$ en A tal que $a_V \rightarrow x$.
17. Sea Λ el conjunto dirigido de los enteros ordenados por divisibilidad. Encontrar una función cofinal $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$.
18. Sea G un grupo topológico, y sea Λ un conjunto dirigido tal que existe una función cofinal $\phi : \Lambda \rightarrow \mathcal{V}(e)$. Sea A un subconjunto de G . Probar que todo $x \in G$ satisface $x \in \bar{A}$ sí y sólo si existe una red $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en A tal que $a_\lambda \rightarrow x$.
19. Probar que $\mathcal{V}(e)$ tiene último elemento si y sólo si $G/\overline{\{e\}}$ es discreto.

20. Probar que el grupo

$$\frac{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

donde $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tiene la topología usual es homeomorfo al toro.

21. Considere el homomorfismo canónico

$$\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \prod_{n>1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

donde el grupo de la derecha tiene la topología producto (con cada factor discreto). Sea $\hat{\mathbb{Z}}$ la clausura de la imagen de $\mathbb{Z}$ bajo ϕ . Probar que $\hat{\mathbb{Z}}$ es un grupo topológico compacto y metrizable.

22. Sea G un grupo topológico Hausdorff. Sean N y K subconjuntos compactos de G . Probar que NK es compacto.
23. Sea G un grupo topológico conexo. Probar que su subgrupo conmutador G' es un subgrupo conexo.
24. Probar que $\mathbb{R}$ no tiene subgrupos conexos no triviales.
25. Probar que todo subgrupo conexo de $\mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial.
26. Sea G un grupo topológico compacto y sea C la componente conexa de la identidad. Probar que G/C es totalmente desconexo.
27. Sea G el grupo de matrices reales M que satisfacen $MM^t = I$ donde I es la matriz identidad. Probar que G tiene 2 componentes conexas.
28. Sea G un grupo topológico Hausdorff. Sea A un subconjunto cerrado de G y sea K un subconjunto compacto de G . Probar que KA es cerrado.
29. Sea G un grupo topológico. Una red $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en G se dice de Cauchy por la izquierda si para toda vecindad V de la identidad existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\lambda, \mu > \lambda_0 \Rightarrow a_\lambda^{-1} a_\mu \in V.$$

Probar que en un grupo compacto toda red de Cauchy por la izquierda es convergente.

30. Sea G un grupo topológico. Un filtro $\mathfrak{F}$ en G se dice de Cauchy por la izquierda si para toda vecindad V de la identidad existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F^{-1}F \subseteq V$. Probar que en un grupo compacto todo filtro de Cauchy por la izquierda es convergente.
31. Sea G un grupo topológico compacto y sea C la componente conexa de la identidad. Probar que G/C es totalmente desconexo.
32. Sea G un grupo topológico, y sea $\mathfrak{F}$ un filtro que converge a la identidad e . Sea A un subconjunto de G y sea $\mathfrak{F}A$ el filtro generado por $\{FA|F \in \mathfrak{F}\}$. Probar que los puntos de acumulación de $\mathfrak{F}A$ son exactamente los elementos de $\overline{A}$.

Chapter 13

Homotopías

definición 13.1. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas. Una homotopía entre f y g es una función continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo x en X . Las funciones f y g se dicen homotópicas si existe una homotopía entre ellas.

ejemplo 13.2. Sea $X = \{p\}$ el espacio con un sólo punto. Entonces dos funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ son homotópicas si y sólo si $f(p)$ y $g(p)$ están en la misma componente arco-conexa de X .

ejemplo 13.3. Sea Y un espacio vectorial topológico real y sea X un espacio topológico arbitrario. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones continuas arbitrarias. Entonces f y g son homotópicas con la homotopía

$$H(x, t) = f(x) + t[g(x) - f(x)].$$

ejemplo 13.4. Sea $Y = S^1$ el círculo unitario y sea X un espacio topológico arbitrario. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos funciones tales que $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces f y g son homotópicas con la homotopía

$$H(x, t) = \frac{f(x) + t[g(x) - f(x)]}{\|f(x) + t[g(x) - f(x)]\|}.$$

Esta homotopía se construye multiplicando el punto $f(x) + t[g(x) - f(x)]$, el cual se encuentra en el segmento que une $f(x)$ con $g(x)$, por una constante que lo proyecta radialmente en el círculo. Esto es posible si dicho punto no es el centro del círculo, por lo que necesitamos la condición $f(x) \neq -g(x)$ (ver Fig. 13.1).

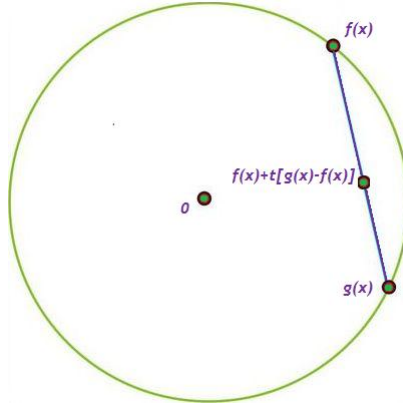


Figure 13.1: Una homotopía en el círculo.

La relación de homotopía puede caracterizarse en términos de componentes arco-conexas en el espacio de funciones continuas, para lo cual debemos definir primero una topología apropiada.

definición 13.5. Sean X e Y espacios topológicos de Hausdorff. Sea $C(X, Y)$ el conjunto de funciones continuas de X en Y . La topología compacto-abierta en $C(X, Y)$ es la que tiene como sub-base los conjuntos

$$\mathcal{O}_{C,U} = \{f : X \rightarrow Y \mid f(C) \subseteq U\},$$

donde C recorre la colección de conjuntos compactos de X y U recorre la colección de abiertos de Y .

Proposición 13.6. Una red $\{f_\lambda\}_\lambda$ converge a f en $C(X, Y)$ con respecto a la topología compacto abierta si y sólo si para cada compacto $C \subseteq X$, y para cada abierto $U \subseteq Y$, tales que $f(C) \subseteq U$, se tiene $f_\lambda(C) \subseteq U$ para λ suficientemente grande.

Demostración La hipótesis es equivalente a $f_\lambda \in \mathcal{O}_{C,U}$ para λ suficientemente grande. $\square$

Proposición 13.7. Si Y es un espacio métrico y X es un espacio compacto, entonces la topología compacto abierta en $C(X, Y)$ es la topología de la convergencia uniforme. En otras palabras, una red $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a

una función f en la topología compacto-abierta si y sólo si $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente a f .

Demostración Supongamos primero que $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente a f . Sea C un subconjunto compacto de X y sea U un abierto de Y , de modo que $f(C) \subseteq U$. Sea d una métrica que define la topología de Y . Entonces se tiene

$$e = d(f(C), U^c) > 0,$$

por ser C compacto y U^c cerrado. Se sigue que si $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente a f en C , para λ suficientemente grande $d_u(f_\lambda, f) < e$, por lo que para todo $c \in C$ se tiene

$$d(f_\lambda(c), U^c) \geq d(f(c), U^c) - d(f(c), f_\lambda(c)) > 0.$$

Se concluye que $f_\lambda(C) \subseteq U$.

Supongamos ahora que $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge a f en la topología compacto-abierta. Sea $\epsilon > 0$. Para cada $x \in X$ existe una vecindad compacta de x tal que, si $y \in V_x$, entonces $d(f(y), f(x)) < \epsilon/2$. En otras palabras

$$f(V_x) \subseteq B(f(x), \epsilon/2).$$

Como X es compacto, existe una colección finita $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_r}\}$ de tales vecindades cuyos interiores cubren X . Para cada x_i existe un $\lambda \in \Lambda$ tal que para $\lambda > \lambda_i$ se tiene

$$f_\lambda(V_{x_i}) \subseteq B(f(x_i), \epsilon/2).$$

Sea $\lambda_0 > \lambda_i$ para cada i . Si $\lambda > \lambda_0$ y si $a \in X$, se tiene $a \in V_{x_i}$ para algún i y por lo tanto

$$d(f(a), f_\lambda(a)) \leq d(f(a), f(x_i)) + d(f_\lambda(a), f(x_i)) \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Se sigue que f_λ converge uniformemente a f . □

Lema 13.8. Si $f : X \times Y \rightarrow Z$ es una función continua, entonces para todo $x \in X$ la función $f_x : Y \rightarrow Z$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ es continua. Además la función $F : X \rightarrow C(Y, Z)$ definida por $F(x) = f_x$ es continua cuando $C(Y, Z)$ tiene la topología compacto-abierta.

Demostración $y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$ es continua, ya que es la composición $y \mapsto (x, y) \mapsto f(x, y)$. Sea ahora $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red que converge a x . Probaremos que f_{x_λ} converge a f_x en la topología compacto-abierta. Sea C un compacto de Y y U un abierto de Z . Basta ver que si $f_x(C) \subseteq U$, se tiene $f_{x_\lambda}(C) \subseteq U$ para λ suficientemente grande. Para cada y en C se tiene $f(x, y) \in U$, luego existen vecindades abiertas V_y de x y W_y de y tales que $f(V_y \times W_y) \subseteq U$. Si $\lambda(y)$ es suficientemente grande, de modo que $x_\lambda \in V_y$ para $\lambda \geq \lambda(y)$, se tiene

$$f_{x_\lambda}(W_y) \subseteq U, \quad \forall \lambda > \lambda(y).$$

Los conjuntos W_y forman un recubrimiento abierto de C por lo que tiene un subrecubrimiento finito formado por $W_{y_1}, \dots, W_{y_r}$. Sea $\lambda \geq \lambda(y_1), \dots, \lambda(y_r)$. Entonces $f_{x_\lambda}(C) \subseteq U$ como se pide. $\square$

Proposición 13.9. *Para todo punto $x \in X$, la función evaluación $e_x : C(X, Y) \rightarrow Y$ definida por $e_x(f) = f(x)$ es continua.*

Demostración Basta ver que si $f_\lambda \rightarrow f$, entonces $f_\lambda(x) \rightarrow f(x)$. Sea U una vecindad abierta de $f(x)$. Como $C = \{x\}$ es un compacto y se tiene $f(C) \subseteq U$, se sigue que $f_\lambda(C) \subseteq U$ para λ suficientemente grande, es decir $f_\lambda(x) \in U$ y el resultado sigue. $\square$

Proposición 13.10. *Si X es localmente compacto, la función evaluación $e : X \times C(X, Y) \rightarrow Y$ definida por $e(x, f) = f(x)$ es continua.*

Demostración Basta ver que si $f_\lambda \rightarrow f$ y $x_\lambda \rightarrow x$ entonces $f_\lambda(x_\lambda) \rightarrow f(x)$. Sea U una vecindad abierta de $f(x)$. Existe una vecindad V de x , que podemos suponer compacta, tal que $f(V) \subseteq U$. Se sigue que $f_\lambda(V) \subseteq U$ para λ suficientemente grande. Además $x_\lambda \in V$ para λ suficientemente grande. Se deduce que $f_\lambda(x_\lambda) \in f_\lambda(V) \subseteq U$ para λ suficientemente grande. $\square$

Proposición 13.11. *Supongamos que Y es localmente compacto. Una función $f : X \times Y \rightarrow Z$ es continua si y sólo si*

1. *para todo $x \in X$ la función $f_x : Y \rightarrow Z$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ es continua.*
2. *la función $F : X \rightarrow C(Y, Z)$ definida por $F(x) = f_x$ es continua cuando $C(Y, Z)$ tiene la topología compacto-abierta.*

Demostración La necesidad es el lema 13.8. La suficiencia sigue de que $(x, y) \mapsto f(x, y)$ es la composición $(x, y) \mapsto (f_x, y) \mapsto f_x(y)$, por lo que podemos aplicar el resultado precedente. $\square$

Aplicando este resultado al caso $X = [0, 1]$ se tiene:

Corolario 13.11.1. *Supongamos que X es localmente compacto. Dos funciones continuas f y g son homotópicas si y sólo si están en la misma componente arco-conexa de $C(X, Y)$ con la topología compacto abierta.* $\square$

Corolario 13.11.2. *Supongamos que X es localmente compacto. La relación de homotopía en $C(X, Y)$ es una relación de equivalencia.*

Se deja al lector la tarea de escribir una demostración directa del resultado precedente. Una demostración directa permite eliminar la hipótesis de que X es localmente compacto. Lo mismo sucede con los corolarios 13.12.1 y 13.13.1 mas abajo. Se verá en un capítulo posterior una estrategia para describir explícitamente las homotopías. En este capítulo nos contentaremos con resultados de existencia.

Proposición 13.12. *Sea $h : Y \rightarrow Z$ una función continua. Entonces la función $h_* : C(X, Y) \rightarrow C(X, Z)$ definida por $h_*(f) = h \circ f$ es continua en la topología compacto-abierta.*

Demostración Basta ver que si $f_\lambda \rightarrow f$ en la topología compacto-abierta, entonces $h \circ f_\lambda \rightarrow h \circ f$. Sea C un compacto en X y sea U un conjunto abierto en Z que contiene a $h \circ f(C)$. Entonces $h^{-1}(U)$ contiene a $f(C)$. Se sigue que $f_\lambda(C) \subseteq h^{-1}(U)$ para λ suficientemente grande. Se deduce que $h \circ f_\lambda(C) \subseteq U$ para λ suficientemente grande, y el resultado sigue. $\square$

Corolario 13.12.1. *Supongamos que X es localmente compacto. Si $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas, y si $h : Y \rightarrow Z$ es continua, también son homotópicas las funciones compuestas $h \circ f$ y $h \circ g$.* $\square$

Proposición 13.13. *Sea $h : Z \rightarrow X$ una función continua. Entonces la función $h^* : C(X, Y) \rightarrow C(Z, Y)$ definida por $h^*(f) = f \circ h$ es continua con respecto a la topología compacto-abierta.*

Demostración Basta ver que si $f_\lambda \rightarrow f$ en la topología compactoabierta, entonces $f_\lambda \circ h \rightarrow f \circ h$. Sea C un compacto en Z y sea U un conjunto abierto en Y que contiene a $f \circ h(C)$. En otras palabras, el conjunto abierto U contiene al conjunto compacto $f[h(C)]$. Entonces, como $h(C)$ es un compacto, se tiene que $f_\lambda[h(C)] \subseteq U$ para λ suficientemente grande. Se deduce que $f_\lambda \circ h(C) \subseteq U$ para λ suficientemente grande, y el resultado sigue. $\square$

Corolario 13.13.1. *Supongamos que X y Z son localmente compactos. Si f y g son homotópicas, también lo son $f \circ h$ y $g \circ h$.* $\square$

definición 13.14. Dos espacios topológicos X e Y se dicen homotópicamente equivalentes si existen funciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g$ es homotópica a la identidad de Y y $g \circ f$ es homotópica a la identidad de X . Un espacio se dice contractible si es homotópicamente equivalente al espacio trivial $\{p\}$.

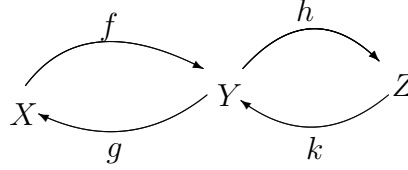
Proposición 13.15. *Un espacio topológico X es contractible si la identidad $i : X \rightarrow X$ es homotópica a una función constante.*

Demostración Sea $H : X \times I \rightarrow X$ una homotopía entre i y una función constante $c_p(x) = p$. Definimos $f : \{p\} \rightarrow X$ por $f(p) = p$. Veamos que f e i son inversas de homotopía, es decir $i \circ f = \text{id}_{\{p\}}$ y $f \circ i = c_p$. El resultado sigue, ya que, por hipótesis c_p es homotópica a la identidad.

Conversamente, si X es homotópicamente equivalente a un punto, deben existir inversas de homotopía $f : X \rightarrow \{p\}$ y $g : \{p\} \rightarrow X$. Es claro que $f \circ g$ es una función constante, la cual debe ser homotópica a la identidad por definición de inversas de homotopía. $\square$

Proposición 13.16. *La equivalencia homotópica es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.*

Demostración Supongamos que X, Y, Z son espacios topológicos tales que existe un diagrama conmutativo



de modo que

$$f \circ g \sim \text{Id}_Y, \quad g \circ f \sim \text{Id}_X, \quad h \circ k \sim \text{Id}_Z, \quad k \circ h \sim \text{Id}_Y.$$

Basta probar que

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) \sim \text{Id}_Z, \quad (g \circ k) \circ (h \circ f) \sim \text{Id}_X.$$

Para la primera de estas equivalencias observamos que

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) \sim h \circ (f \circ g) \circ k \sim h \circ \text{Id}_Y \circ k = h \circ k \sim \text{Id}_Z.$$

La segunda equivalencia es análoga y se deja al lector. $\square$

ejemplo 13.17. Un espacio vectorial topológico real es contractible como lo demuestra el ejemplo dado al comienzo del capítulo. Un argumento similar prueba que el intervalo es contractible.

ejemplo 13.18. Si X es un espacio topológico arbitrario, el cilindro sobre X es el espacio producto $X \times [0, 1]$. El espacio X puede identificarse con su imagen $X \times \{0\}$ en el cilindro. Veremos que esta inclusión es una equivalencia homotópica. De hecho, si consideramos las funciones $f : X \rightarrow X \times [0, 1]$ y $g : X \times [0, 1] \rightarrow X$ definidas por $f(x) = (x, 0)$ y $g(x, s) = x$, basta probar que $f \circ g$ es homotópica a la identidad, lo que sigue de la homotopía

$$H((x, s), t) = (x, st).$$

ejemplo 13.19. Si X es un espacio topológico arbitrario, el cono sobre X es el espacio de identificación $C(X) = (X \times [0, 1]) / \equiv$ donde $\equiv$ es la relación de equivalencia cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma

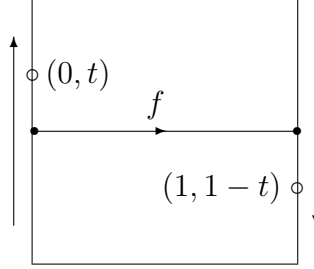


Figure 13.2: Una equivalencia homotópica entre el círculo y la banda de Moebius.

$(x, 0) \equiv (y, 0)$ con $x, y \in X$ cualesquiera. Entonces La identidad $i : X \rightarrow C(X)$ es homotópica a una constante mediante la homotopía

$$H([x, s], t) = [x, st],$$

donde $[x, s]$ denota la clase de equivalencia de (x, s) . Se sigue que $C(X)$ es contractible.

ejemplo 13.20. La Banda de Moebius M es el espacio de identificación $C(X) = ([0, 1] \times [-1, 1]) / \equiv$ donde $\equiv$ es la relación de equivalencia cuyas únicas relaciones no triviales son aquellas de la forma $(0, t) \equiv (1, -t)$ con $t \in [-1, 1]$ cualquiera. Afirmamos que la inclusión f del círculo unitario $S^1 = [0, 1] / \sim$, donde $\sim$ identifica sólo el 0 y el 1, en la Banda de Moebius dada por $f([t]) = [t, 0]$ es una equivalencia homotópica (ver Figura 13.1), con una inversa de homotopía dada por $g([t, s]) = [t]$. Basta ver que la función $[t, s] \mapsto [t, 0]$ es homotópica a la identidad mediante la homotopía

$$H([r, s], t) = [r, st]$$

(ver Figura 13.2).

definición 13.21. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Diremos que A es un retracto de X si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo elemento $a \in A$. Diremos que A es un retracto de deformación de X si la función r puede escogerse homotópica a la identidad de X .

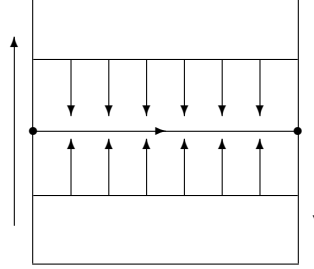


Figure 13.3: Una homotopía entre la identidad y la proyección de toda la banda de Moebius en su círculo ecuatorial.

Lema 13.22. *Si un subconjunto $A \subseteq X$ es un retracto de deformación de X , entonces la inclusión $i : A \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración Si existe una función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo elemento $a \in A$, entonces $r \circ i = \text{id}_A$, mientras que r , como función de X a X , se identifica con $i \circ r$, por lo que la definición de retracto de deformación nos dice que $i \circ r$ es homotópica a la identidad. $\square$

A menudo encontrar la función r que cumple las condiciones para hacer de $A \subseteq X$ un retracto en la definición precedente requiere proyectar, de algún modo, un conjunto de regiones que dividen el complemento de A , por lo que se requiere hacer uso del hecho de que la topología de un espacio X es co-inducida por las inclusiones de una colección finita de conjuntos cerrados que lo recubre (Capítulo 5), por lo que basta con definir la función r en cada región cerrada y comprobar que dichas definiciones coinciden en las intersecciones. Un ejemplo aclarará esta idea.

Sea X el plano $\mathbb{R}^2$ del cual se han removido dos puntos, a y b , a distancia $2r$. Para fijar ideas asumiremos que $a = (-r, 0)$ y $b = (r, 0)$. Sea A la unión de una circunferencia de radio r alrededor de a y una circunferencia de radio r alrededor de b , como muestra la mitad izquierda de la Figura 13.3. Tal conjunto A es conocido como la figura 8. Para construir r , se divide X en 6 regiones llamadas L , R , D , U , J e I , como muestra la mitad derecha de la Figura 13.3. La función r se define por trozos como sigue:

1. En cada círculo I o J , la función r es la proyección radial en la cir-

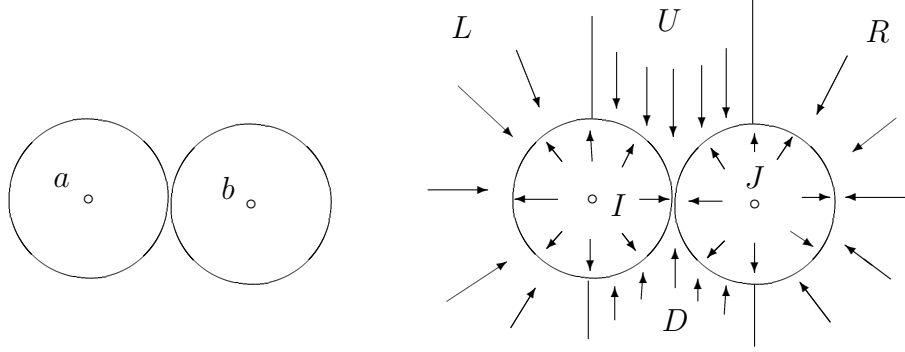


Figure 13.4: El plano con dos puntos removidos y la figura 8.

cunsferencia.

2. En las regiones L y R , la función r es la proyección radial en la circunsferencia respectiva.
3. En la región U , la función r toma la forma $(x, y) \mapsto (x, h(x))$, donde h es la función cuyo gráfico es el límite inferior de esta región, es decir:

$$h(x) = \sqrt{r^2 - (r - |x|)^2} = \sqrt{2r|x| - x^2}.$$

La región D es similar.

Para comprobar que r es efectivamente homotópica a la identidad, observamos que el segmento que une cada punto $x \in X$ con su imagen $r(x)$ está contenido en X , por lo que existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ del tipo

$$H(x, t) = tx + (1 - t)r(x).$$

Un argumento similar al usado aquí nos permite ver que las dos figuras que aparecen en la Figura 10.4 son homotópicas al plano sin dos puntos, y por lo tanto también a la figura 8.

Con lo dicho hasta aquí, podría ser todo par de funciones continuas entre los mismos espacios fuesen homotópicas. Probaremos ahora que este no es el caso. Estudiaremos las clases de homotopía de funciones de S^1 en S^1 , o equivalentemente, las componentes arco-conexas en el espacio $C(S^1, S^1)$. Para ello necesitamos cierta preparación.



Figure 13.5: Dos figuras homotópicamente equivalentes a la figura 8.

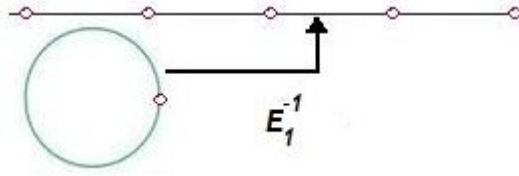


Figure 13.6: Levantando una función no epiyectiva.

definición 13.23. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \rightarrow S^1$ una función continua. Entonces una función $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = e^{2\pi i g(t)}$ se denomina un levantamiento a $\mathbb{R}$ de f . Evidentemente, si g es un levantamiento de f a $\mathbb{R}$, también lo es $g_1(x) = g(x) + n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si g y g_1 son ambos levantamientos de f entonces $g_1(x) - g(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in X$. En particular, si X es conexo entonces $g_1(x) = g(x) + n$ para $n \in \mathbb{Z}$ fijo. Observemos también que si f tiene un levantamiento a $\mathbb{R}$, lo mismo vale para cualquier restricción de f .

Lema 13.24. Sea $f : [a, b] \rightarrow S^1$ una función continua. Si $f([a, b]) \neq S^1$ entonces existe un levantamiento de f a $\mathbb{R}$.

Demostración Sea E la función $E(t) = e^{2\pi i t}$. Sea $y \in S^1$ un punto que no está en la imagen de f . Sea C una componente conexa de $E^{-1}(S^1 - \{y\})$. Entonces la restricción E_1 de E a C es un homeomorfismo (ejercicio). Se sigue que podemos definir

$$g(x) = E_1^{-1}(f(x)).$$

Véase Fig. 13.6.

□

Lema 13.25. *Sea $f : [a, b] \rightarrow S^1$ una función continua. Sea c un punto de $]a, b[$. Sea f_1 la restricción de f a $[a, c]$ y sea f_2 la restricción de f a $[c, b]$. Si f_1 y f_2 tienen levantamientos a $\mathbb{R}$, entonces también lo tiene f .*

Demostración Sean g_1 y g_2 los levantamientos a $\mathbb{R}$ de f_1 y f_2 . Como

$$e^{2\pi i g_1(c)} = f_1(c) = f(c) = f_2(c) = e^{2\pi i g_2(c)},$$

se tiene que $g_1(c) - g_2(c)$ es un entero. Modificando g_2 por un entero si es necesario puede suponerse que $g_1(c) = g_2(c)$. Definimos ahora $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si } a \leq t \leq c \\ g_2(t) & \text{si } c \leq t \leq b \end{cases},$$

La que es continua por el lema 10.6. □

Lema 13.26. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow S^1$ una función continua. Entonces existe un levantamiento de f a $\mathbb{R}$.*

Demostración Sea A el conjunto de los elementos $s \in [0, 1]$ tales que la restricción de f a $[0, s]$ tiene un levantamiento a $\mathbb{R}$. Claramente $0 \in A$ y A es un intervalo, ya que si la restricción de f a $[0, t]$ tiene un levantamiento, con mayor razón la restricción de f a $[0, s]$ tiene un levantamiento para $s < t$. Sea a el supremo de A y supongamos $a < 1$. Existe un intervalo $[b, c]$ con $b < a < c$ que cumple las siguientes condiciones:

- $f([b, c])$ no es todo S^1 , de modo que la restricción de f a $[b, c]$ tiene un levantamiento, y
- $b \in A$, luego la restricción de f a $[0, b]$ tiene un levantamiento.

Se sigue que la restricción de f a $[0, c]$ tiene un levantamiento, lo que contradice la elección de a . Se sigue que $a = 1$, de donde la restricción de f a $[0, u]$ tiene un levantamiento para todo $u < 1$. Ahora escogemos un intervalo $[b, 1]$ tal que $f([b, 1])$ no es todo S^1 , de modo que la restricción de f a $[b, 1]$ tiene un levantamiento, y repetimos el razonamiento. □

Proposición 13.27. *El espacio $C(S^1, S^1)$ tiene una cantidad infinita de componentes conexas.*

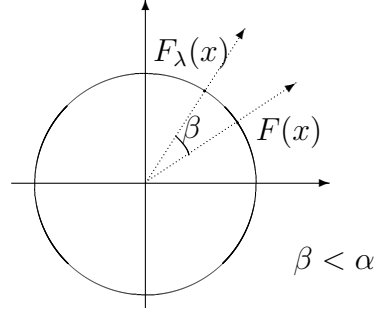


Figure 13.7: Curvas cercanas subtienden un ángulo pequeño.

Demostración Definimos $\Phi : C(S^1, S^1) \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue: Sea $f : S^1 \rightarrow S^1$ una función continua, y sea $E : [0, 1] \rightarrow S^1$ la función $E(t) = e^{2\pi it}$. Sea $F : [0, 1] \rightarrow S^1$ la función definida por $F = f \circ E$. Sea g un levantamiento de F . Sea $\Phi(f) = g(1) - g(0)$. Afirmamos que Φ es continua y su imagen es $\mathbb{Z}$. Esto concluye la demostración.

Para ver que la imagen es $\mathbb{Z}$, basta ver que la función $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $f_n(z) = z^n$ satisface $f_n(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i n t}$, luego un levantamiento es la función $g_n(t) = nt$. Se sigue que $g_n(1) - g_n(0) = n$, y por lo tanto $\Phi(f_n) = n$.

Ahora veremos que Φ es continua. Sea $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de funciones que converge uniformemente a una función f . En particular, si $F_\lambda = f_\lambda \circ E$, se tiene que $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente a F , pues la composición es continua con respecto a la topología compacto-abierta, la que coincide en este caso con la topología de la convergencia uniforme. Tomemos ahora λ suficientemente grande, de modo que $d_u(F, F_\lambda) < \epsilon < 1$ y sea $\alpha \in [0, \pi/2[$ el único elemento que satisface $\epsilon = 2\sin(\alpha)$. Geométricamente, α es una cota para el ángulo que subtienden los vectores $F(x)$ y $F_\lambda(x)$ en el círculo S^1 (ver Figura 13.5). Entonces para cada $x \in S^1$ los levantamientos g y g_λ satisfacen:

$$d(g_\lambda(x), g(x) + n_\lambda(x)) < \alpha,$$

donde $n_\lambda(x)$ es una función a valores enteros, la que está únicamente determinada si asumimos que ϵ es lo bastante pequeño para que $\alpha < 1/2$. De

hecho $n_\lambda(x)$ puede calcularse como el entero más cercano a $g_\lambda(x) - g(x)$, por lo que es continua en los puntos en los que

$$g_\lambda(x) - g(x) \notin \mathbb{Z} + 1/2,$$

y todo punto de $[0, 1]$ cumple esa condición si $\alpha < 1/2$. Se sigue que $n_\lambda(x)$ es continua en x , e independiente de x por la conexidad de $[0, 1]$. Si se escogen los levantamientos g_λ de modo que $n_\lambda(0) = 0$, se tiene que $n_\lambda(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$, por lo que se tiene

$$d(g_\lambda(x), g(x)) < \alpha,$$

y tomando $\epsilon \rightarrow 0$, se sigue que $\alpha \rightarrow 0$, de donde concluimos que $g_\lambda \rightarrow g$ uniformemente. Como $\Phi(f) = g(1) - g(0)$, y la evaluación es continua con respecto a la topología compacto-abierta, se concluye que $\Phi(f_\lambda) \rightarrow \Phi(f)$. $\square$

Nótese que si bien se demostró arriba que si una red de funciones $F_\lambda : [0, 1] \rightarrow S^1$ converge uniformemente, sus levantamientos $g_\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ pueden escogerse convergentes, no existe una función levantamiento

$$L : C(X, S^1) \rightarrow C(X, \mathbb{R})$$

bien definida, ni siquiera cuando $X = \{p\}$. Sin embargo, esta función levantamiento puede definirse para curvas con un punto inicial dado. La función Φ definida mas arriba es un invariante del tipo de homotopía conocido como el índice o número de vueltas.

Ejercicios

1. Dar una demostración directa de los corolarios 13.12.1 y 13.12.1, de modo que no sea necesario suponer que X es localmente compacto.
2. Sea X un conjunto bien ordenado incontable con un último elemento ω_1 y tal que para cada elemento λ en X distinto de ω_1 , el conjunto de puntos que anteceden a λ es numerable. Sea Y el espacio que se obtiene al identificar cada par de puntos consecutivos de X con los extremos correspondientes de un intervalo. El espacio Y se conoce como la recta larga con un punto final. Determine si este espacio es o no contractible.
3. Sea X un espacio discreto y sea $f, g : X \rightarrow Y$ funciones arbitrarias. Probar que f y g son homotópicas si para cada $x \in X$ los elementos $f(x)$ y $g(x)$ están en la misma componente arco-conexa de Y .

4. Sea X un espacio contractible y sea Y un espacio arco-conexo. Probar que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas.
5. Probar que un intervalo es contractible.
6. Probar que todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ es contractible.
7. Probar que si X es contractible, entonces $X \times Y$ es homotópicamente equivalente a Y .
8. Sea X un espacio topológico. El cono sobre X es el espacio obtenido de $X \times [0, 1]$ al identificar todos los puntos de la forma $(x, 1)$. Probar que el cono sobre X es contractible.
9. Probar que dos espacios homotópicamente equivalentes tienen el mismo número de componentes arco-conexas.
10. Probar que el conjunto

$$S^2 \cup \{(0, 0, t) | 0 < t < 1\}$$

es homotópicamente equivalente a la esfera.

11. Probar que no existe una homotopía entre el círculo central $f : S^1 \rightarrow M$ y el círculo borde $g : S^1 \rightarrow M$ de la banda de Moebius.
12. Sea f un polinomio complejo sin raíces. Probar que la curva

$$\alpha_R : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}, \quad \alpha_R(t) = f(Re^{2\pi it})$$

es homotópico al camino constante. Utilizar esta observación para demostrar el teorema fundamental del álgebra.

13. Probar que los espacios topológicos X e Y son homotópicamente equivalentes si:
 - (a) X es el círculo unitario e Y es la esfera sin los polos.
 - (b) X es el círculo unitario en $\mathbb{R}^2$ e $Y = X \cup [\{0\} \times \mathbb{R}^+]$.
 - (c) X es la unión de dos círculos con un punto en común e Y es el espacio que se obtiene al remover un punto de un toro.

14. Probar que si X es un espacio topológico contractible e Y es un espacio arco-conexo, entonces $C(X, Y)$ es un espacio arco-conexo.
15. Sea X un espacio topológico. Sea Y un espacio de identificación de X y sea $p : X \rightarrow Y$ la proyección canónica.
 - (a) Probar que para todo espacio topológico Z podemos identificar $C(Y, Z)$ con un subconjunto de $C(X, Z)$ identificando a cada función continua $f : Y \rightarrow Z$ con la función $\tilde{f} : X \rightarrow Z$ que induce.
 - (b) Si $C(X, Z)$ tiene la topología compacto-abierta, pruebe que la topología compacto-abierta de $C(Y, Z)$ es mas fina que la topología de subespacio.
 - (c) probar que las topologías coinciden si p es un recubrimiento (ver capítulo 17).
16. Sea $c : Y \rightarrow C(X, Y)$ la función definida por $c(y) = c_y$ donde $c_y(x) = y$ para todo $x \in X$. Probar que c es un homeomorfismo de Y con su imagen.

Chapter 14

La propiedad de extensión de homotopías

Sea X un espacio topológico arbitrario y sea $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Diremos que el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías (o PEH), si para cada espacio topológico Y , y para toda función continua $f : X \rightarrow Y$, cada homotopía $H : A \times I \rightarrow Y$ que satisface $H(a, 0) = f(a)$ para todo $a \in A$, puede extenderse a una homotopía $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ que satisface $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Un par de observaciones son apropiadas aquí. En primer lugar la propiedad sólo requiere que exista una homotopía a "alguna función continua", no hace referencia alguna a la función final. Por otro lado, la intersección $A \times \{0\}$ es cerrada, tanto en $X \times \{0\}$, como en $A \times I$, por lo que H y f definen de manera única una función continua

$$K : M_i = (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \rightarrow Y.$$

Se sigue que la PEH es equivalente a que cada función continua definida en M_i se extiende a $X \times I$.

definición 14.1. Un subespacio $Z \subseteq X$ se dice un retracts de X si la inclusión $i : Z \hookrightarrow X$ tiene una inversa por la izquierda, es decir, existe una función continua $r : X \rightarrow Z$ tal que $r \circ i = \text{Id}_Z$.

Proposición 14.2. Sea X un espacio topológico y sea $Z \subseteq X$ un retracts de X . Entonces para todo espacio topológico Y se tiene que $Z \times Y$ es un retracts de $X \times Y$.

Demostración Basta ver que la función $\tilde{r} : X \times Y \rightarrow Z \times Y$ definida por $\tilde{r}(x, y) = (r(x), y)$ es continua, y es una inversa por la izquierda de la inclusión. $\square$

Proposición 14.3. *Sea X un espacio topológico y Z un subconjunto cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Toda función continua $f : Z \rightarrow Y$ se extiende a X .*
2. *Z es un retracto de X .*

Demostración Si Z es un retracto y $r : X \rightarrow Z$ es una inversa por la izquierda de la inclusión $i : Z \hookrightarrow X$, entonces cada función continua $f : Z \rightarrow Y$ se extiende a $f \circ r : X \rightarrow Y$. Por otro lado, si cada función continua se extiende, entonces en particular, la identidad $\text{id}_Z : Z \rightarrow Z$ se extiende a una función continua $r : X \rightarrow Z$. $\square$

Corolario 14.3.1. *Sea X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El par (X, A) tiene la PEH.*
2. *M_i es un retracto de $X \times I$.*

Corolario 14.3.2. *Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado. Sea Z un segundo espacio topológico. Si el par (X, A) tiene la PEH, entonces $(X \times Z, A \times Z)$ tiene la PEH.*

definición 14.4. Un subespacio Z de un espacio X se dice un retracto de deformación fuerte de X , si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $x \mapsto H(x, 0)$ es la identidad de X ,
2. $H(x, 1) \in Z$ para todo $x \in X$, y
3. $H(z, t) = z$ para todo $t \in I$ y todo $z \in Z$.

Una homotopía que cumple estas 3 condiciones se denomina una retracción fuerte de X a Z . Cuando se cumplen sólo las dos primeras, se dice que Z es un retracto de X y que H es una retracción de X en Z . Cualquier

homotopía que cumple la tercera condición se dice constante en Z . En lo sucesivo, diremos que el par (X, A) tiene la propiedad fuerte de extensión de homotopías (o PFEH), si el espacio $M_i = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, definido antes, es un retracto de deformación fuerte del espacio $X \times I$.

El siguiente resultado es inmediato de las definiciones:

Lema 14.5. *Sea X un espacio topológico y Z un subconjunto cerrado. Si Z es un retracto de deformación fuerte de X , entonces $Z \times Y$ es un retracto de deformación fuerte de $X \times Y$ para todo espacio topológico Y .*

Corolario 14.5.1. *Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado. Sea Y un segundo espacio topológico. Si el par (X, A) tiene la PFEH, entonces $(X \times Y, A \times Y)$ tiene la PFEH.*

El espacio M_i considerado hasta aquí es un caso particular de una construcción mucho más general que jugará un papel fundamental en lo que sigue.

definición 14.6. El cilindro de mapeo M_f de una función $f : X \rightarrow Y$ es el cociente

$$\frac{(X \times I) \amalg Y}{\cong}$$

donde la única instancia no trivial de la relación $\cong$ es $(x, 1) \cong f(x)$. Nótese que Y es un retracto de deformación de M_f .

El siguiente resultado es inmediato de las definiciones y se deja al lector:

Lema 14.7. *Sea M_f el cilindro de mapeo de una función f . Entonces existe una función $h : M_f \rightarrow [0, 1]$ que satisface $h([x, t]) = 1 - t$ para $x \in X$, $t \in I$, y además $h([y]) = 0$ para $y \in Y$.*

ejemplo 14.8. Probaremos que el par $(I, \{0, 1\})$ tiene la PFEH, o equivalentemente que el subconjunto $A = (I \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times I)$ es un retracto de deformación fuerte de $I \times I$. Consideremos el cuadrado $I \times I$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de la manera usual, es decir como el conjunto de puntos con coordenadas entre 0 y 1. Sea $P = (1/2, 3/2)$. Para cada punto (x, y) del cuadrado $I \times I$, sea $f(x, y)$ el punto el cual la recta que une P con (x, y) intersecta el conjunto A (Ver Figura 14.1). No es difícil comprobar que dicha

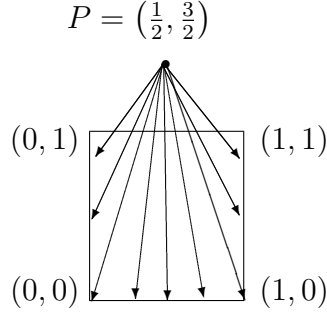


Figure 14.1: Proyectando el cuadrado en su borde no superior.

función está dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(0, \frac{y-3x}{1-2x}\right) & \text{if } 3x \leq y \\ \left(\frac{3x-y}{3-2y}, 0\right) & \text{if } y \leq 3x \leq 3-y \\ \left(1, \frac{y-3(1-x)}{1-2(1-x)}\right) & \text{if } 3x \geq 3-y \end{cases}.$$

Cada función está definida en un conjunto cerrado y coinciden en las rectas de intersección, por lo que definen una función continua por el Lema 5.21. Esta función f es una inversa por la izquierda de la inclusión. Esto prueba que A es un retracto. Para probar que es un retracto de deformación fuerte, consideramos la homotopía

$$H(x, y, t) = (1-t)(x, y) + tf(x, y),$$

y razonamos como en el capítulo precedente, en la demostración de que el plano con dos puntos removidos es homotópico a la figura 8.

Un argumento enteramente análogo, y que se deja al lector, permite demostrar el siguiente resultado:

Lema 14.9. *El conjunto $L = (I \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I)$ es un retracto de deformación del triángulo T de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.*

En el capítulo 16 veremos un método via triangulaciones que permite dar una demostración simplificada de este resultado y del ejemplo que lo precede.

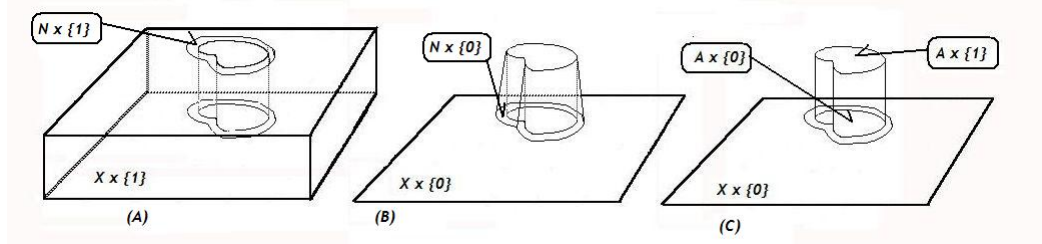


Figure 14.2: Ilustración de la demostración de la Proposición 14.11.

definición 14.10. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado. Suponga que existe un espacio topológico Z ; así como funciones continuas $f : Z \rightarrow A$ y $j : M_f \rightarrow X$ con las siguientes propiedades:

1. $U = j(M_f - Z \times \{0\})$ es una vecindad abierta de A .
2. j , vista como una función de M_f en $N = \overline{U}$ es un homeomorfismo.

Entonces diremos que N es una vecindad de A en X tipo cilindro de mapeo.

Proposición 14.11. Sea X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado. Suponga que A tiene una vecindad tipo cilindro de mapeo en X . Entonces el par (X, A) tiene la PFEH.

Demostración Nótese que la función h del Lema 14.7 puede extenderse a una función continua $\tilde{h} : X \rightarrow I$ si se define como 0 en $X \setminus N$, ya que $\overline{X \setminus N} \cap N \subseteq N \setminus U = h^{-1}(0)$ (utilizando, una vez más, el Lema 5.21). Esto nos permite utilizar la homotopía

$$H(x, s, t) = (1 - t)(x, s) + t(x, \tilde{h}(x))$$

para retraer (fuertemente) el producto $X \times I$ en el subconjunto

$$\Omega = \{(x, s) \in X \times I \mid s \leq \tilde{h}(x)\}.$$

El conjunto Ω es el conjunto con forma de volcán en la Figura 14.2(B).

El siguiente paso es retraer fuertemente el volcán en el cilindro de mapeo de la Figura 14.2(C). Para ello observamos que el homeomorfismo j identifica la ladera del volcán con el conjunto $Z \times T$, donde T es el triángulo en el Lema 14.9, al que se ha pegado dos conjuntos:

- El “plano basal” $X \times \{0\}$, el que contiene a los elementos de la forma $(n, 0)$ con $n \in \overline{(N - A)} = j(\widetilde{Z \times I})$, donde $\widetilde{Z \times I}$ es la imagen de $Z \times I$ en M_f .
- El cilindro $A \times I$, que contiene a los puntos de la forma $(f(z), t)$, donde $f(z)$ se identifican con $[f(z)] \in M_f$ via j .

Todos estos puntos corresponden a los elementos en $Z \times L$, donde L se define como en el Lemma 14.9. Como la homotopía obtenida en dicho lemma deja fijos los puntos de L , la correspondiente retracción de $Z \times T$ a $Z \times L$ se extiende, vía Lema 5.21, por una homotopía constante, al resto de Ω . $\square$

Proposición 14.12. *Sea X un espacio topológico y A un subconjunto cerrado. Suponga que el par (X, A) tiene la PEH, y que $i : A \rightarrow X$ es una equivalencia homotópica. Entonces A es un retracto de deformación de X .*

Demostración Sea $f : X \rightarrow A$ una inversa de homotopía de i , es decir $f \circ i \sim \text{id}_A$ y $i \circ f \sim \text{id}_X$. En particular, existe una homotopía $H : A \times I \rightarrow A$ tal que $H(a, 0) = f(a)$ para cada $a \in A$, mientras que $H(a, 1) = a$ para cada $a \in A$. Extendiendo esta homotopía a $\tilde{H} : X \times I \rightarrow A$, de modo que $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$, y definiendo $r(x) = H(x, 1)$, se obtiene una inversa por la izquierda de i que es homotópica a la identidad en X . $\square$

Proposición 14.13. *Sea X un espacio topológico y sea A un subconjunto cerrado. Suponga que el par (X, A) tiene la PEH, y que A es contractible. Entonces la proyección $\pi : X \rightarrow X/A$ es una equivalencia homotópica.*

Demostración Sea $H : X \times I \rightarrow X$ una homotopía que es la identidad en $0 \in I$ y extiende una contracción de A . Como I es localmente compacto, H puede verse como una función continua $\hat{H} : X \rightarrow C(I, X)$. Entonces la función $\pi_* \circ \hat{H} : X \rightarrow C(I, X/A)$, donde π_* es la composición con la proyección, se factoriza como

$$X \xrightarrow{\pi} X/A \xrightarrow{\tilde{H}} C(I, X/A),$$

dado que $H(a, t) \in A$ para cada $a \in A$ y cada $t \in I$, por lo que $\hat{H}(a)$ es la función constante cuyo valor es la clase de los puntos de A . Concluimos que existe una homotopía $\bar{H} : X/A \times I \rightarrow X/A$ que satisface $\pi \circ H =$

$\bar{H} \circ (\pi \times \text{id}_I)$, y tal que las funciones $h_0 : X \rightarrow X$ y $\bar{h}_0 : X/A \rightarrow X/A$ definidas por $h_0(x) = H(x, 0)$ y $\bar{h}_0(x) = \bar{H}(x, 0)$ son la identidad, mientras las funciones $h_1 : X \rightarrow X$ y $\bar{h}_1 : X/A \rightarrow X/A$ definidas por $h_1(x) = H(x, 1)$ y $\bar{h}_1(x) = \bar{H}(x, 1)$ hacen que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_1} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/A & \xrightarrow{\bar{h}_1} & X/A \end{array} .$$

Como h_1 envía cada punto de A en un mismo punto, se factoriza a travez de una función $g : X/A \rightarrow X$ que hace que el triángulo superior del siguiente diagrama conmute:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_1} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \downarrow \pi \\ X/A & \xrightarrow{\bar{h}_1} & X/A \end{array} .$$

El triángulo inferior debe conmutar también por ser π epiyectiva (se utiliza la π de la izquierda en el diagrama). Se concluye que $g \circ \pi = h_1$ y $\pi \circ g = \bar{h}_1$ son homotópicas a las identidades respectivas. $\square$

Sea A un subconjunto de un espacio X , y sea $f : A \rightarrow Y$ una función continua. El espacio $X \amalg_f Y$ se define como el espacio cociente

$$X \amalg_f Y = \frac{X \amalg Y}{\equiv},$$

donde la única instancia no trivial de la relación de equivalencia $\equiv$ es $a = f(a)$ para $a \in A$.

Lema 14.14. Sean X e Y espacios de Hausdorff. Si Z es un retracto de deformación fuerte de X , entonces para toda función $f : A \rightarrow Y$, con $A \subseteq Z$ compacto, se tiene que $Z \amalg_f Y$ es un retracto de deformación fuerte de $X \amalg_f Y$.

Demostración Sea $\tilde{X} = X \amalg_f Y$ y $\tilde{Z} = Z \amalg_f Y$. Sea $H : X \times I \rightarrow X$ una retracción de X en Z . Definimos una retracción $\tilde{H} : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$ de $\tilde{X}$ en $\tilde{Z}$ como sigue:

$$H(u, t) = \begin{cases} H(x, t) & \text{if } u = [x] \text{ for some } x \in X, \\ u & \text{if } u = [y] \text{ for some } y \in Y. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que H está bien definida, es decir, que las dos definiciones de arriba coinciden en los puntos que han sido identificados. La continuidad sigue del hecho de que las imágenes de X e Y en $X \amalg_f Y$ son cerradas (por Lema 5.21). De hecho, por ser A y $f(A)$ compactos, se tiene que $X \setminus A$ e $Y \setminus f(A)$ son abiertos en X e Y , respectivamente. Como $(X \setminus A) \subseteq X \amalg_f Y$ es también la pre-imagen del complemento en $X \amalg_f Y$ de la imagen de Y , la imagen de Y es cerrada. La afirmación para X es análoga. $\square$

Proposición 14.15. *Sean X e Y espacios de Hausdorff compactos. Sea A un subconjunto cerrado (y por lo tanto compacto) de X . Suponga que el par (X, A) tiene la PFEH, y que las funciones $f, g : A \rightarrow Y$ son homotópicas. Entonces los espacios $X \amalg_f Y$ y $X \amalg_g Y$ son homotópicamente equivalentes.*

Demostración Sea $H : A \times I$ una homotopía entre f y g , y sea $Z = (X \times I) \amalg_H Y$. Si el par (X, A) tiene la PFEH, entonces M_i es un retracto de deformación fuerte de $X \times I$, y por el lema anterior, $M_i \amalg_H Y$ es un retracto de deformación fuerte de Z . Afirmamos que $M_i \amalg_H Y$ es homeomorfo a $X \amalg_f Y$. De hecho la inclusión $j : X \cong X \times \{0\} \rightarrow M_i$ induce una función continua $\phi : X \amalg_f Y \rightarrow M_i \amalg_H Y$, que es la identidad en Y , puesto que H se restringe a f en $A \times \{0\}$. Por la compacidad, basta observar que ϕ es epiyectiva. Esto es inmediato, pues cada punto de M_i que no está en $X \times \{0\}$ se identifica a algún punto de Y . Concluimos que $X \amalg_f Y \sim Z$. La demostración de que $X \amalg_g Y \sim Z$ se obtiene reemplazando 0 por 1 en la definición de M_i . $\square$

Una familia de espacios topológicos que siempre tiene la PFEH es la de CW-complejos. Un CW-complejo es una sucesión de familias $(\{D_\omega\}_{\omega \in \Omega_n})_n = 0^\infty$ donde $\{D_\omega\}_{\omega \in \Omega_0}$ es una familia de puntos y, para cada $n \geq 1$, $\{D_\omega\}_{\omega \in \Omega_n}$ es una familia de discos de dimensión n que se pegan recursivamente mediante funciones continua $\phi_\omega : \partial D_\omega \rightarrow X_{n-1}$, donde X_{n-1} es el espacio obtenido al identificar los discos cuya dimensión no exceda $n - 1$ en los pasos anteriores.

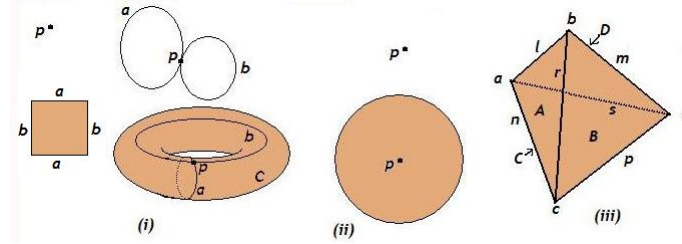


Figure 14.3: Algunos espacios descritos como CW-complejos.

ejemplo 14.16. En la Figura 14.3 se muestran algunos ejemplos de CW-complejos. En (i), se construye un toro tomando un punto p como 0-esqueleto y dos círculos como uno esqueleto. Cada círculo se visualiza como un segmento cuyo borde (consistente en dos puntos) está identificado con p . El toro así definido tiene un único disco bidimensional, el cual puede pensarse como un cuadrado cuyo borde se pega como indica la figura. En (ii), la esfera se construye como un complejo cuyos 0-esqueleto y 1-esqueleto consisten precisamente de un único punto. Todo el borde de la 2-celda se identifica con este punto. En (iii) se muestra una construcción algo más compleja de la esfera, con 4 vértices, 6 aristas, y 4 caras bidimensionales.

Si X es un CW-complejo (o más precisamente su espacio subyacente) y si A es un subcomplejo, es decir un CW-complejo formado por una subfamilia de las celdas que conforman X , entonces el par (X, A) tiene la PFEH. Para probar esto es suficiente demostrar el lema siguiente, para luego aplicar, una vez más, el Lema 5.21.

Lema 14.17. *El par $(D, \partial D)$, donde $D \subseteq \mathbb{R}^n$ es un disco con borde ∂D , tiene la PFEH.*

Demostración Consideremos el cilindro $D \times I$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la manera usual, es decir

$$D \times I = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n, t) \mid \max\{|t|, \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\} \leq 1 \right\}.$$

Sea $P = (0, \dots, 0, 2)$. Para cada punto $(\vec{x}, t)$ del cuadrado $I \times I$, sea $f(\vec{x}, t)$ el punto el el cual la recta que une P con $(\vec{x}, t)$ intersecta el conjunto

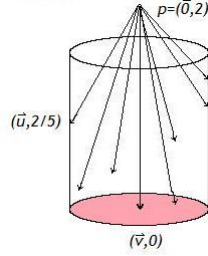


Figure 14.4: Projectando el cilindro en su borde no superior.

$(D \times \{0\}) \cup \partial D \times I$ (Ver Figura 14.2). No es difícil comprobar, razonando como en el Ejemplo 14.8, que dicha función está dada por:

$$f(\vec{x}, t) = \begin{cases} \left(\frac{2\vec{x}}{2-t}, 0 \right) & \text{if } t \leq 2 - 2x \\ \left(\vec{u}, \frac{2+tx-t}{x} \right) & \text{if } t \geq 2 - 2x \end{cases},$$

donde $x = |\vec{x}|$ y $\vec{u} = \vec{x}/x$. Cada función está definida en un conjunto cerrado y coinciden en el cono de intersección, por lo que definen una función continua con las propiedades requeridas por el mismo lema de siempre (el 5.21!).

ejemplo 14.18. En el primer ejemplo, tomaremos el collar de una cuenta, el espacio que se obtiene al identificar los extremos del intervalo I con los polos norte y sur de una esfera. Este ejemplo requiere tomar $Y = S^2$, $X = I$ y $A = \{0, 1\}$ en la teoría precedente. Si $f : A \rightarrow Y$ se define de modo que $f(0)$ sea el polo norte y $f(1)$ sea el polo sur, como en la figura 14.3, el collar de una cuenta es el espacio $X \amalg_f Y$. Si ahora tomamos $g : A \rightarrow Y$ de modo que $g(0) = g(1)$, el espacio resultante $X \amalg_g Y$ es conocido como el medallón. Una aplicación directa del resultado precedente nos dice que el collar de una cuenta y el medallón son homotópicamente equivalentes.

ejemplo 14.19. En el siguiente ejemplo, $X = D$ es un disco, $A = \partial D$ es su borde, mientras que Y es el círculo unitario. Consideremos el espacio que se obtiene al pegar el borde del disco D al círculo S^1 mediante una función del tipo $a * a * a^{-1}$, que recorre el círculo dos veces en una dirección, y una en sentido contrario. Podemós realizar dicha yuxtaposición mediante la fórmula

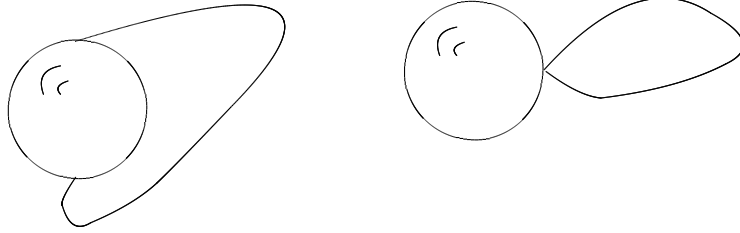


Figure 14.5: El collar y el Medallón.

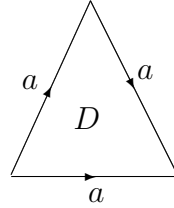


Figure 14.6: El gorrito de burro.

$f(e^{2\pi xi}) = e^{2\pi f(x)i}$, donde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{if } x \leq 2/3 \\ 4 - 3x & \text{if } x \geq 2/3 \end{cases}.$$

Este espacio, conocido como el *Gorrito de burro*, es contractible, dado que es homotópicamente equivalente al disco. El disco puede verse como el espacio que se obtiene al pegar el borde del disco D al círculo S^1 mediante la función identidad. La Homotopía se realiza, por lo tanto mediante una función del tipo

$$H(e^{2\pi xi}, t) = e^{2\pi [tx + (1-t)f(x)]i}.$$

Esta función está bien definida y es continua, dado que $x = 0$ y $x = 1$ definen el mismo valor $H(e^{2\pi \cdot 0 \cdot i}, t) = H(e^{2\pi \cdot 1 \cdot i}, t) = 1$ para cada valor de t .

Ejercicios

1. Sea G un grafo, es decir el espacio que se obtiene a partir de una unión finita disjunta de intervalos (o aristas), identificando algunos de sus extremos (o vértices). Sea A una arista de G con vértices distintos. Probar que G es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene identificando entre sí todos los puntos de A .
2. Probar que los espacios topológicos X e Y son homotópicamente equivalentes si:
 - (a) X es la unión de dos círculos con un punto en comun e Y es la unión de un círculo con uno de sus diámetros.
 - (b) X es la unión de una esfera con uno de sus diámetros e Y es el espacio que se ubtiene al identificar dos puntos de una esfera.
 - (c) X es la unión de una esfera con uno de sus diámetros e Y es la unión de un círculo y una esfera con un punto en común.
3. Clasifique las letras del alfabeto en clases de equivalencia homotópica.
4. Sea X un espacio topológico, sea A un subconjunto cerrado, y sea $p \in A$. Supongamos que existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ tal que:

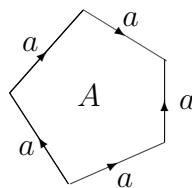
$$H(x, 0) = x \forall x \in X, \quad H(a, 1) = p \forall a \in A,$$

$$H(a, t) \in A \quad \forall (a, t) \in A \times I.$$

Probar que X es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene al identificar todos los puntos de A .

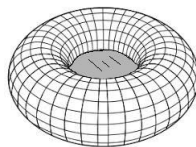
5. Probar que el espacio proyectivo n -dimensional es un complejo de celdas.
6. La conjunción $X * Y$ de dos espacios X e Y se define como el cociente del espacio $X \times Y \times I$ por las identificaciones $(x, y_1, 0) \cong (x, y_2, 0)$ $(x_1, y, 1) \cong (x_2, y, 1)$. Probar que la conjunción de dos complejos de celdas es un complejo de celdas. Construir el cono y la suspensión de un espacio X mediante conjunciones.
7. Probar que si A es un retracto de deformación de X , entonces el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías.

8. Probar que todo grafo finito es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene pegando un número finito de círculos por un punto.
9. Dar un ejemplo de un complejo de celdas X homeomorfo al toro y de un subcomplejo A tal que X/A es homeomorfo a la esfera. Puede A ser contractible?
10. Sea X un complejo de celdas y sea A un subcomplejo contractible. Demostrar directamente que si pegamos X con A mediante la identidad $i : A \rightarrow A$ se obtiene un espacio homeomorfo a X , mientras que si se pega X con A mediante una función constante $c : A \rightarrow A$ se obtiene un espacio homotópicamente equivalente a X/A . Utilizar esto para dar una segunda demostración de la equivalencia homotópica entre X y X/A .
11. Probar que el tipo de homotopía de un complejo de celdas depende sólo del tipo de homotopía de las funciones que se utilizan para pegar el borde de cada n -celda al $(n - 1)$ -esqueleto.
12. Sean X e Y complejos de celdas arco-conexos y sea $X * Y$ el espacio que se obtiene al pegar X con Y por un punto. Probar el tipo de homotopía del espacio resultante es independiente de los puntos escogidos. Es cierto que el tipo de homeomorfía del espacio resultante es independiente de los puntos escogidos?
13. Probar que un espacio homotópicamente equivalente a un espacio contractible es contractible.
14. Probar que el espacio de identificación:



es contractible (Sugerencia: definirlo pegando una 2-celda a un círculo mediante una función apropiada).

15. Probar que si X e Y son contractible, entonces $X * Y$ es contractible.
16. Probar que si Y es un espacio contractible, entonces el espacio que se obtiene al pegar X e Y por un punto es homotópicamente equivalente a X .
17. Sea Z el espacio que se obtiene pegando X e Y por un punto y sea W el espacio que se obtiene pegando los extremos de un intervalo a $X \amalg Y$ mediante una función $f : \{0, 1\} \rightarrow X \amalg Y$, tal que $f(0) \in X$ y $f(1) \in Y$. Probar que Z y W son homotópicamente equivalentes.
18. Sea Z un complejo de celdas que es la unión de dos subcomplejos contractibles X e Y , de tal modo que la intersección $X \cap Y$ es también contractible. Probar que Z es contractible.
19. Sea A la unión de la esfera unitaria (centrada en el origen) con su proyección en el plano XY y con un segmento que une los puntos $(0, 0, 1)$ y $(0, 0, -1)$. Sea B el espacio que se obtiene al unir el plano XY con dos círculos de radio 1 centrados en los puntos $(2, 0, 1)$ y $(-2, 0, 1)$, así como dos esteras de radio 1 centradas en los puntos $(0, 2, 1)$ y $(0, -2, 1)$. Determine si A y B son homotópicamente equivalentes o no.
20. Determine si el toro (hueco), con una disco pegado horizontalmente por el círculo central interno como se vé en la figura, es o no homotópicamente equivalente al medallón, es decir la unión por un punto de un círculo y una esfera.



21. Probar que $\mathbb{R}^3 - C$, donde C es un círculo, es homotópicamente equivalente al medallón (Sugerencia: usar el ejercicio anterior).

Chapter 15

El grupo fundamental

En lo que sigue, I denota el intervalo $[0, 1]$.

Sea X un espacio topológico arco-conexo y sean x e y dos puntos de X . Sean α y β caminos en X que satisfacen

$$\alpha(0) = \beta(0) = x, \quad \beta(1) = \alpha(1) = y.$$

Una homotopía H entre los caminos α y β se dice una homotopía de extremos fijos si satisface:

$$H(0, t) = x, \quad H(1, t) = y, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Equivalentemente, dos caminos α y β tienen una homotopía de extremos fijos entre ellos si están en la misma componente conexa del subespacio

$$C_{x,y}(I, X) = \{\gamma \in C(I, X) \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\} \subseteq C(I, X).$$

El conjunto de clases de homotopía de tales caminos se denota $\Pi_{x,y}(X)$. Si $y = x$, escribiremos $C_x(I, X)$ y $\Pi_x(X)$ en lugar de $C_{x,x}(I, X)$ y $\Pi_{x,x}(X)$. Recordemos que para cada par de caminos α y β que satisfacen $\alpha(1) = \beta(0)$ podemos definir su producto o yuxtaposición mediante la fórmula siguiente:

$$\alpha * \beta(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{array} \right\|.$$

La yuxtaposición de dos caminos es también un camino por el lema 10.6.

Proposición 15.1. *La función*

$$m : C_{x,y}(I, X) \times C_{y,z}(I, X) \rightarrow C_{x,z}(I, X)$$

*definida por $m(\alpha, \beta) = \alpha * \beta$ es continua con respecto a la topología compacto-abierta.*

Demostración Sea $\mathcal{O}_{C,U}$ un abierto de la sub-base canónica de la topología compacto-abierto, y definamos los conjuntos compactos

$$C' = 2C \cap I = \left\{ a \in I \mid \frac{a}{2} \in C \right\}, \quad C'' = (2C-1) \cap I = \left\{ a \in I \mid \frac{a+1}{2} \in C \right\}.$$

Se tiene que $\alpha * \beta(C) \subseteq U$ si y sólo si $\alpha(C') \subseteq U$ y $\beta(C'') \subseteq U$. En particular se tiene que $m(\mathcal{O}_{C',U} \times \mathcal{O}_{C'',U}) \subseteq \mathcal{O}_{C,U}$, y $\mathcal{O}_{C',U} \times \mathcal{O}_{C'',U}$ es una vecindad de (α, β) para cada par de caminos α y β que satisfacen $\alpha * \beta \in \mathcal{O}_{C,U}$. $\square$

El resultado siguiente es ahora inmediato, si se recuerda que las funciones continuas llevan conjuntos conexos en conjuntos conexos y que el producto de espacios conexos es conexo.

Corolario 15.1.1. *La componente arco-conexa de $\alpha * \beta$ en $C_{x,z}(I, X)$ depende sólo de la componente arco-conexa de α en $C_{x,y}(I, X)$ y de la componente arco-conexa de β en $C_{y,z}(I, X)$.*

Se sigue del corolario precedente que la función m induce una función bien definida

$$\tilde{m} : \Pi_{x,y}(X) \times \Pi_{y,z}(X) \rightarrow \Pi_{x,z}(X).$$

El producto $\tilde{m}(a, b)$ de dos clases se homotopía a a y b se denotará simplemente ab en lo sucesivo, y se denominará el producto o la multiplicación de las clases a y b .

Recordemos que una curva β se dice una reparametrización de una curva α si existe un homeomorfismo creciente $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\beta = \alpha \circ h$.

Lema 15.2. *Si $\beta = \alpha \circ h$, donde $h : I \rightarrow I$ es una función continua tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, entonces existe una homotopía de extremos fijos entre α y β . En particular, la conclusión se obtiene si β es una reparametrización de α .*

Demostración Basta tomar $H(s, t) = \alpha(s(1-t) + h(s)t)$. $\square$

Proposición 15.3. *La multiplicación de caminos define una estructura de grupo en $\Pi_x(X)$.*

Demostración Para ver que el producto de clases es asociativo basta ver que los caminos $\delta_1 = (\alpha * \beta) * \gamma$ y $\delta_2 = \alpha * (\beta * \gamma)$ son homotópicos. De hecho

$$\delta_1(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ \beta(4s - 1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ \gamma(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|,$$

y

$$\delta_2(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \beta(4s - 2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 3/4 \\ \gamma(4s - 3) & \text{si } 3/4 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|.$$

Afirmamos que δ_1 es una reparametrización de δ_2 , de hecho $\delta_1 = \delta_2 \circ h$ donde

$$h(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ s - 1/4 & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ (s + 1)/2 & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|.$$

Por el resultado precedente, existe una homotopía de extremos fijos entre δ_1 y δ_2 .

Sea e el camino constante. Entonces $\alpha * e = \alpha \circ h$ donde

$$h(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 2s & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|,$$

por lo que nuevamente se aplica el lema 15.2, y se tiene $[\alpha][e] = [\alpha]$. La demostración de que $[e][\alpha] = [\alpha]$ es análoga.

Finalmente si α es un camino cerrado, también lo es el camino α^{op} definido por $\alpha^{\text{op}}(s) = \alpha(1 - s)$, de donde

$$\alpha * \alpha^{\text{op}}(s) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2 - 2s) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|,$$

por lo que una homotopía de extremos fijos entre este camino y el camino constante e está dada por

$$H(s, t) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha(2ts) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2 \\ \alpha(2t - 2ts) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\|.$$

La continuidad de la función H arriba definida sigue fácilmente del Lema 5.21. La demostración de que $\alpha^{\text{op}} * \alpha$ es homotópico a e es análoga. $\square$

La misma demostración de la proposición anterior demuestra que la multiplicación de clases es asociativa y que $[e][\alpha] = [\alpha]$ dondequiera que los productos estén definidos. En particular se tiene el siguiente resultado:

Proposición 15.4. *La multiplicación de caminos define una acción por la izquierda del grupo $\Pi_x(X)$ en el conjunto $\Pi_{x,y}(X)$.* $\square$

Proposición 15.5. *La acción de $\Pi_x(X)$ en $\Pi_{x,y}(X)$ es libre y transitiva.*

Demostración Para probar que la acción es libre, observamos que si a es una clase de caminos cerrados en $\Pi_x(X)$, y si $g = [\gamma]$ es una clase de caminos de x a y que satisface $ag = g$, entonces $agg^{-1} = gg^{-1}$, donde g^{-1} es la clase del camino inverso γ^{op} . Nótese que la demostración de que $\gamma * \gamma^{\text{op}}$ no depende en absoluto de que el punto final de γ coincida con su punto inicial. Se sigue que gg^{-1} es la identidad e de $\Pi_x(X)$, de donde concluimos que $a = ae = e$.

Para la transitividad, observamos que, si a y b son dos clases de caminos de x a y , y si $e_y = [c_y]$ denota la clase del camino constante $c_y \in C_y(I, X)$, entonces tenemos una cadena de identidades:

$$a = ae_y = a(b^{-1}b) = (ab^{-1})b, \quad (15.1)$$

donde ab^{-1} , es la clase del camino $\alpha * \beta^{\text{op}}$, un camino cerrado con extremos en x , por lo que $g = ab^{-1}$ es un elemento de $\Pi_x(X)$ que satisface $gb = a$. $\square$

Proposición 15.6. *Sean x e y dos puntos de X y sea γ un camino que une x e y . La función $a \mapsto [\gamma]a[\gamma^{\text{op}}]$ define un isomorfismo entre $\Pi_y(X)$ y $\Pi_x(X)$.*

Demostración Para ver que es un homomorfismo, basta ver que $\gamma^{\text{op}} * \gamma$ es homotópico a un camino constante y esta demostración es análoga al caso de un camino cerrado por lo que se deja como ejercicio al lector. El homomorfismo inverso es entonces $b \mapsto [\gamma^{\text{op}}]b[\gamma]$. $\square$

En particular, la clase de isomorfía del grupo fundamental de un espacio arco-conexo es independiente del punto base. Sin embargo, el isomorfismo entre los grupos $\Pi_y(X)$ y $\Pi_x(X)$ no es canónico en general. De hecho si δ es un segundo camino entre x e y se tiene

$$[\delta]a[\delta^{\text{op}}] = ([\delta][\gamma^{\text{op}}])[\gamma]a[\gamma^{\text{op}}]([\gamma][\delta^{\text{op}}]).$$

Dado que las clases $[\delta][\gamma^{\text{op}}] = [\delta][\gamma]^{-1}$ y $[\gamma][\delta^{\text{op}}] = [\gamma][\delta]^{-1}$ son inversas, el homomorfismo entre $\Pi_y(X)$ y $\Pi_x(X)$ está definido sólo módulo conjugación. Sin embargo, cuando $\Pi_y(X)$ es abeliano (y por lo tanto también $\Pi_x(X)$), entonces el homomorfismo es canónico.

definición 15.7. Un espacio topológico arco-conexo se dice simplemente conexo si el grupo $\Pi_x(X)$ es trivial para algún (cada) punto x de X .

Proposición 15.8. *En un espacio topológico simplemente conexo el conjunto $\Pi_{x,y}(X)$ es trivial para cada par de puntos x e y de X .*

Demostración Por la proposición 15.5, la acción de $\Pi_x(X)$ en $\Pi_{x,y}(X)$ es transitiva, de modo que si $\Pi_x(X)$ es trivial, también lo es $\Pi_{x,y}(X)$. $\square$

Proposición 15.9. *Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, entonces la función $f_* : \Pi_{x,y}(X) \rightarrow \Pi_{f(x),f(y)}(Y)$ definida por $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$ satisface $f_*(ab) = f_*(a)f_*(b)$ dondequiera que el producto esté definido.*

Demostración Afirmamos que la imagen $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$ es independiente de la elección del camino α que sirve de representante a la clase. Esto es una consecuencia del hecho de que la composición con f es continua en la topología compacto-abierta, por lo que lleva componentes arco-conexas en componentes arco-conexas.

La última propiedad sigue del hecho de que $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$, lo que es inmediato a partir de la definición de yuxtaposición de caminos. $\square$

Corolario 15.9.1. *Si f_* define un homomorfismo $f_* : \Pi_x(X) \rightarrow \Pi_{f(x)}(Y)$, la función $f \mapsto f_*$ satisface $(fg)_* = f_*g_*$ e $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{\Pi_x(X)}$.*

Corolario 15.9.2. *Espacios homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos.*

Proposición 15.10. *Sean X_1 e X_2 espacios topológicos. Sea $X = X_1 \times X_2$. Sea $p_i : X \rightarrow X_i$ la proyección en la i -ésima coordenada. Entonces la función*

$$\left((p_1)_*, (p_2)_* \right) : \Pi_{(x_1, x_2)}(X) \rightarrow \Pi_{x_1}(X_1) \times \Pi_{x_2}(X_2)$$

es un isomorfismo.

Demostración Basta ver que cada curva cerrada $\alpha : I \rightarrow X$ con extremos en $x = (x_1, x_2)$ es de la forma $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, donde cada α_i es un camino cerrado con extremos en x_i . Basta ver que dos de tales curvas son homotópicas si y sólo si las coordenadas correspondientes son homotópicas. Para esto observamos que si H_i es una homotopía entre α_i y β_i entonces $H = (H_1, H_2)$ es una homotopía entre α y $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, y que toda homotopía tiene esta forma. $\square$

Proposición 15.11. *Todo grupo topológico tiene grupo fundamental abeliano.*

Demostración Sean α y β dos caminos con extremos en la identidad e del grupo topológico G , y sean a y b las clases respectivas. Sea $\mu : G \times G \rightarrow G$ la multiplicación en G . Si identificamos $\Pi_{(e,e)}(G)$ con $\Pi_e(G) \times \Pi_e(G)$, tenemos que $\mu_*(a, b) = c$ donde c es la clase de la curva $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$. Como $\mu_*(a, b)$ depende sólo de las clases a y b , y no de los representantes α y β , podemos remplazar α por $\alpha * c_e$ y β por $c_e * \beta$, donde c_e es el camino constante en e . Como

$$(\alpha * \beta)(t) = (\alpha * c_e)(t)(c_e * \beta)(t),$$

se sigue que $\mu_*(a, b) = ab$, por un cálculo sencillo que se deja al lector. Remplazando ahora α por $c_e * \alpha$ y β por $\beta * c_e$, se tiene $\mu_*(a, b) = ba$. Se concluye que $ab = ba$. $\square$

Proposición 15.12. *Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Y$ funciones homotópicas. Sea $H : X \times I \rightarrow Y$ una homotopía entre ellas. Sea $\gamma(t) = H(x, t)$. Entonces para todo $a \in \Pi_x(X)$ se tiene $f_*(a) = cg_*(a)c^{-1}$, donde $c \in \Pi_{f(x), g(x)}(X)$ es la clase de γ .*

Demostración Basta ver que existe una homotopía de extremos fijos entre $f \circ \alpha$ y $[\gamma * (g \circ \alpha)] \circ \gamma^{-1}$. Una tal homotopía es

$$K(s, t) = \left\{ \begin{array}{ll} H(x, 4s) & \text{si } 0 \leq s \leq t/4 \\ H\left(\alpha\left[\frac{4s-t}{4-3t}\right], t\right) & \text{si } t/4 \leq s \leq 1-t/2 \\ H(x, 2(1-s)) & \text{si } 1-t/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Dejamos al lector la tarea de comprobar que K esta bien definida y es continua, utilizando el Lema 5.21. Nótese que tenemos, por un lado, la identidad

$$K(s, 0) = H(\alpha[s], 0) = f \circ \alpha(s),$$

mientras que

$$K(s, 1) = \left\{ \begin{array}{ll} H(x, 4s) = \gamma(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4 \\ H\left(\alpha\left[\frac{4s-1}{4-3}\right], 1\right) = \alpha(4s-1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2 \\ H(x, 2(1-s)) = \gamma^{-1}(2s-2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1 \end{array} \right\}.$$

$\square$

Corolario 15.12.1. *Si f es una equivalencia homotópica, entonces f_* es un isomorfismo.*

Demostración Sea g una función continua tal que $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicas a las identidades de los espacios correspondientes. La proposición implica que si $f \circ g$ es homotópica a la identidad, entonces $f_* \circ g_*$ es de la forma $a \mapsto cac^{-1}$ para algún camino c no necesariamente cerrado. Se sigue que $f_* \circ g_*$ es un isomorfismo, y por lo tanto f_* tiene inversa por la derecha y g_* tiene inversa por la izquierda. Como podemos intercambiar f y g , el resultado sigue. $\square$

Proposición 15.13. *Sea X un espacio topológico arco-conexo. Si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, y si $f(x) = f(x') = y$, entonces los subgrupos $f_*[\Pi_x(X)]$ y $f_*[\Pi_{x'}(X)]$ son conjugados.*

Demostración Si λ es un camino que une x con x' , se tiene un isomorfismo $\phi : \Pi_{x'}(X) \rightarrow \Pi_x(X)$ definido por $[\mu] \mapsto [\lambda * \mu * \lambda^{-1}]$, de donde se tienen las ecuaciones

$$q_*\left(\Pi_{x'}(X)\right) = \left\{ [f \circ \mu] \mid [\mu] \in \phi : \Pi_{x'}(X) \right\}$$

y

$$\begin{aligned} q_*\left(\Pi_x(X)\right) &= \left\{ [f \circ \nu] \mid [\nu] \in \phi : \Pi_x(X) \right\} = \\ &= \left\{ [f \circ (\lambda * \mu * \lambda^{\text{op}})] \mid [\mu] \in \phi : \Pi_{x'}(X) \right\}, \end{aligned}$$

las que implican

$$q_*\left(\Pi_x(X)\right) = [f \circ \lambda] q_*\left(\Pi_{x'}(X)\right) [f \circ \lambda]^{-1}.$$

Como $f \circ \lambda$ es un camino cerrado, $[f \circ \lambda] \in \Pi_y(Y)$ y el resultado sigue. $\square$

Todo lo anterior sería vacío si todos los espacios topológicos tuviesen grupo fundamental trivial. Para probar que este no es el caso, calculemos el grupo fundamental del círculo. De hecho demostraremos el siguiente resultado:

Proposición 15.14. *La función número de vueltas $\Phi : \Pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo.*

Demostración Como se observó al final del capítulo 13, existe una función levantamiento continua y epiyectiva

$$L : C_1(I, S^1) \rightarrow C_0(I, \mathbb{R}).$$

Además $L(\alpha * \beta) = L(\alpha) * L'(\beta)$, donde $L'(\beta)$ es un levantamiento de β cuyo punto inicial es el punto final de $L(\alpha)$. Se concluye que

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha * \beta) &= L(\alpha * \beta)(1) - L(\alpha * \beta)(0) = L'(\beta)(1) - L(\alpha)(0) \\ &= L'(\beta)(1) - L'(\beta)(0) + L(\alpha)(1) - L(\alpha)(0) = \Phi(\beta) + \Phi(\alpha), \end{aligned}$$

donde en el último paso se utiliza el hecho de que el número de vueltas $\Phi(\beta)$ puede calcularse utilizando cualquier levantamiento de β , ya que dos, cualesquiera, de tales levantamientos difieren por una función constante.

Falta probar la inyectividad, es decir, que si α satisface $\Phi(\alpha) = 0$, entonces α es homotópica al camino constante, pero esto sigue del hecho de que $\Phi(\alpha) = 0$ implica $L(\alpha)(1) = L(\alpha)(0)$, por lo que $L(\alpha)$ es un camino cerrado. Como $\mathbb{R}$ es contractible, su grupo fundamental es trivial, por lo que todo camino cerrado es homotópico a un camino constante. Si $H : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ es tal homotopía, definimos una homotopía entre α y una constante mediante $K(s, t) = e^{2\pi H(s, t)i}$. El resultado sigue. $\square$

Ejercicios

1. Sea G un grupo topológico y sean $\gamma, \mu : [0, 1] \rightarrow G$ funciones continuas que satisfacen $\gamma(0) = \gamma(1) = \mu(0) = \mu(1) = e$ (es decir, γ y μ son caminos cerrados en G con base en e). Sea $\gamma' : [0, 1] \rightarrow G$ un camino homotópico a γ (con una homotopía de extremos fijos). Sea asimismo, $\mu' : [0, 1] \rightarrow G$ un camino homotópico a μ . Probar directamente que existe una homotopía entre $t \mapsto \gamma(t)\mu(t)$ y $t \mapsto \gamma'(t)\mu'(t)$.
2. Calcular el grupo fundamental del toro $S^1 \times S^1$.
3. Describa los tipos de homotopía de espacios diferentes pueden obtenerse pegando un disco a un toro.
4. Sea $[\alpha]$ un generador del grupo fundamental $\pi_1(S^1; 1)$ del círculo unitario S^1 . Probar que dos funciones continuas $f, g : S^1 \rightarrow X$, donde X es un espacio arco-conexo y $f(1) = g(1)$, son homotópicas si y sólo si $f_*[\alpha]$ y $g_*[\alpha]$ son conjugados en $\pi_1(X; f(1))$.

5. Probar que la función $f : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ definida por $f(z, u) = (u, z)$ no es homotópica a la identidad.
6. Probar que en el plano sin el origen, los dos arcos del círculo unitario que unen $(-1, 0)$ con $(1, 0)$ no son homotópicos (con una homotopía de extremos fijos).
7. Sea f un polinomio de grado n con coeficientes complejos. Probar que la función $g_R : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $g_R(z) = \frac{f(Rz)}{|f(Rz)|}$ es homotópica a $z \mapsto z^n$ para todo R suficientemente grande (Sugerencia: considere el límite uniforme). Si $f(0) \neq 0$ probar que g_R es homotópica a una constante para R suficientemente pequeño. Deduzca el teorema fundamental del álgebra.
8. Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ definida por $\alpha(t) = e^{8\pi t} - 5e^{4\pi t} + 1$. Sea $G = \pi_1(\mathbb{C} - \{0\}; 1)$. Encuentre $|G/\langle[\alpha]\rangle|$. Justifique.
9. Sea $X = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Probar que toda curva que une $(1, 0)$ con $(-1, 0)$ es homotópica en X a $f_n * g * h$ para un único $n \in \mathbb{Z}$, si $f_n(t) = (\cos(2\pi nt), \sin(2\pi nt))$, g es el segmento que une $(1, 0)$ con $(0, 1)$ y h es el segmento que une $(0, 1)$ con $(-1, 0)$.
10. Sea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z| \leq 2 \right\}.$$

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$ continua con $f(1) = f(2)$, y sean α y β las curvas definidas por $\alpha(t) = f(e^{2\pi it})$ y $\beta(t) = f(2e^{2\pi it})$. Probar que si $\alpha * \beta$ es homotópico al camino constante, entonces α es homotópico al camino constante (recuerde que las homotopías entre caminos deben ser de extremos fijos).

11. Sea α un camino cerrado en X con base en x_0 (es decir $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$). Sea $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Probar que existe una homotopía H entre α y $\alpha \circ h$ tal que $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ para todo t .
12. Sea G un grupo topológico. Sean $\alpha : [0, 1] \rightarrow G$ y $\beta : [0, 1] \rightarrow G$ dos caminos en G con base en la identidad e . Se define un tercer camino γ mediante $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$. Probar que la clase $[\gamma]$ en $\Pi(G, e)$ es igual al producto $[\alpha][\beta]$.

13. Si X es un espacio simplemente conexo y si $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ y $\beta : [0, 1] \rightarrow X$ son dos caminos en X que satisfacen $\alpha(0) = \beta(0) = x$ y $\alpha(1) = \beta(1) = y$, entonces existe una homotopía entre ambos que satisface $H(0, t) = x$ y $H(1, t) = y$ para todo t .
14. Sea $X = [\mathbb{C} - \{0\}]$. Sea $f : X \rightarrow X$ definida por $f(z) = z^n e^z$. Si $f_*\Pi(X, 1) \rightarrow \Pi(X, f(1))$ es la función inducida por f . Identificando cada grupo fundamental con $\mathbb{Z}$ se puede escribir $f_*(n) = mn$ para algún entero m . Calcule m y Justifique su afirmación.
15. Probar que el complemento de todo conjunto finito en $\mathbb{R}^n$ con $n > 2$ es simplemente conexo (Sugerencia: Pruebe primero que toda curva es homotópica a una poligonal).

Chapter 16

Triangulaciones y homotopías explícitas

Hasta aquí hemos probado los resultados esenciales de la teoría del grupo fundamental recurriendo sólo ocasionalmente al uso de homotopías explícitas, aunque su uso ha sido inevitable en algunos casos, como al demostrar la Proposición 15.12. El propósito del capítulo en curso es mostrar como uno puede construir explícitamente, y con pocos o ningún cálculo, las homotopías que demuestran las distintas identidades básicas de la teoría. Un resultado tecnico que será muy útil en lo que sigue es el Lema 5.21 que recordamos aquí para conveniencia del lector:

[Lema 5.21] Sea X un espacio topológico y supongamos que $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ donde cada X_i es un subconjunto cerrado. Sea $f_i : X_i \rightarrow Y$ una función continua para cada $i = 1, \dots, n$, que satisfacen $f_i(x) = f_j(x)$ para cada $x \in X_i \cap X_j$. Entonces la función $f : X \rightarrow Y$ definida por $f(x) = f_i(x)$ para $x \in X_i$ es continua en X .

Estaremos particularmente interesados en el caso en el cual X es un polígono subdividido en polígonos mas pequeños. Un primer ejemplo de esto apareció en el capítulo 10 cuando se definió la yuxtaposición pegando funciones definidas en intervalos más pequeños.

Del mismo modo, si quiere demostrarse que la relación de homotopía entre caminos es transitiva procedemos como sigue: Sean α y β dos caminos homotópicos en un espacio X y sea γ un camino homotópico a β . Tomemos

una homotopía H entre α y β , es decir una función continua

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad H(0, s) = \alpha(s), \quad H(1, s) = \beta(s).$$

Tomemos una homotopía K entre β y γ , que es una función continua

$$K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad K(0, s) = \beta(s), \quad K(1, s) = \gamma(s).$$

Se define una homotopía L entre α y γ , mediante

$$L(t, s) = \begin{cases} H(2t, s) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ K(2t - 1, s) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Es inmediato que cada una de las definiciones dadas es continua en el rectángulo en el que están definidas y en el segmento borde se tiene

$$L(1/2, s) = K(0, s) = \beta(s) = H(1, s),$$

por lo que el argumento concluye aplicando el Lema 5.21. Un argumento similar que se deja al lector permite probar que si α y β son dos caminos, respectivamente homotópicos a otros dos caminos α' y β' , entonces $\alpha * \beta$ es homotópico a $\alpha' * \beta'$. Para construir homotopías mas complicadas como la homotopía "natural" entre $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$, la que se necesita para dar una demostración directa de la asociatividad de la yuxtaposición a nivel de clases de homotopía, necesitamos una herramienta adicional que nos permita trabajar con polígonos más complejos. Esta es el concepto de triangulación, el cual nos será útil más adelante en el estudio de la teoría de la homología.

definición 16.1. Sean $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ elementos de $\mathbb{R}^m$, no necesariamente distintos. El símplice $T_{(x_i)_i}$ se define como

$$T_{(x_i)_i} = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in [0, 1] \text{ and } \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Nótese que la identidad $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$ es equivalente a $\alpha_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i$, por lo que podemos re-escribir

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = x_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - x_{n+1}).$$

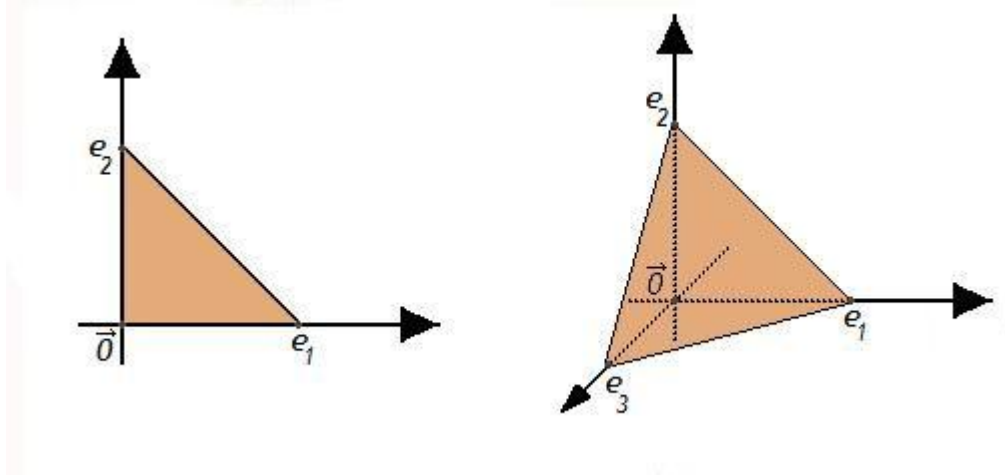


Figure 16.1: El 2-símplice estándar (izquierda) y el 2-símplice unitario (derecha).

El símplice $T_{(x_i)_i}$ se dice no-singular, o regular, si los vértices $x_1, \dots, x_{n+1}$ no están contenidos en ningún subespacio afín (es decir, ninguna clase lateral de un subespacio) de dimensión menor a n , o equivalentemente si los vectores $(x_1 - x_{n+1}), \dots, (x_n - x_{n+1})$ son linealmente independientes. Se sigue que las coordenadas α_i de un punto p del símplice $T_{(x_i)_i}$ (usualmente denominadas sus coordenadas baricéntricas) están totalmente determinadas por el punto p , en tanto $T_{(x_i)_i}$ sea no-singular. Esto es inmediato si se asume que $T_{(x_i)_i}$ es el llamado símplice unitario, cuyos vértices son los elementos de la base canónica $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. De hecho, todo símplice es la imagen del símplice unitario por una función lineal, la cual es biyectiva en tanto el símplice imagen sea no singular. Esto es, probablemente, mas natural si utilizamos, en lugar del símplice unitario, el símplice estándar, aquel cuyos vértices son los elementos $e_1, \dots, e_n$ de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y el origen $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

Notemos que la función $s : T_u \rightarrow T$ que envía a un punto cualquiera del símplice unitario T_u en el punto con las mismas coordenadas baricéntricas del símplice T es continua, y es por lo tanto un homeomorfismo si T es no-singular, dado que los espacios involucrados son compactos. Esto implica que existe un homeomorfismo canónico entre dos n -símplices no singulares

cualesquiera, en tanto la imagen de cada vértice está fijo de antemano. Este homeomorfismo se dice simplicial en todo lo que sigue.

Tomemos ahora dos símlices no-singulares T y S contenidos en $\mathbb{R}^m$. Asumamos que, salvo una permutación de sus vértices, se tiene

$$T = T_{(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)},$$

mientras que

$$S = T_{(x_1, \dots, x_k, x'_{k+1}, \dots, x'_r)},$$

de tal modo que la intersección es $T \cap S = T_{(x_1, \dots, x_k)}$. En este caso diremos que los dos símlices se intersectan en una cara. Nótese que las coordenadas baricéntricas de cualquier punto de $T \cap S$ con respecto a la cara $T \cap S$ coinciden con sus coordenadas baricéntricas con respecto a T o S . Sólo los coeficientes correspondientes a los vértices $x_1, \dots, x_k$ pueden ser no nulos. Esto prueba que si tenemos dos símlices U y V contenidos en $\mathbb{R}^t$, y si, salvo una permutación de sus vértices, se tiene

$$U = T_{(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)}, \quad V = T_{(y_1, \dots, y_k, y'_{k+1}, \dots, y'_r)},$$

entonces los homeomorfismos simpliciales que llevan cada x_i en el correspondiente y_i y cada x'_j en el correspondiente y'_j coinciden en la intersección, por lo que pueden pegarse para obtener una función bien definida de $T \cup S$ en $U \cup V$, por medio del Lema 5.21. En general, un símlice no-singular se dice una cara de otro, si los vértices del primero son un subconjunto de los vértices del segundo.

ejemplo 16.2. Sean $T_{x,y,z}$ y $T_{x,y,w}$ dos símlices no degenerados con un lado común. Sean asimismo $T_{a,b,c}$ y $T_{a,b,d}$ otros dos símlices con el lado correspondiente en común. Sean

$$f : T_{x,y,z} \rightarrow T_{a,b,c}, \quad g : T_{x,y,w} \rightarrow T_{a,b,d}$$

las funciones simpliciales respectivas. Entonces f y g coinciden en el segmento que une x con y . Basta ver que un punto en el segmento que une x con y se escribe, en términos de sus coordenadas baricéntricas en la forma $\alpha x + \beta y$, lo que no depende del tercer punto del triángulo (o 2-símlice), el que puede ser z o w indistintamente. En este caso, la función, entre el polígono de la izquierda y el de la derecha en Fig. 16.2, obtenida pegando las funciones simpliciales respectivas recibe también el nombre de función simplicial. Ahora generalizaremos este concepto.

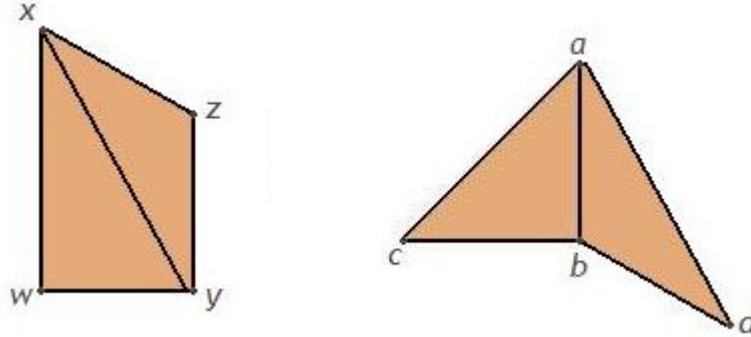


Figure 16.2: Dos complejos isomorfos.

definición 16.3. Un complejo simplicial finito Σ en $\mathbb{R}^m$ es una colección finita de símlices no-singulares, tales que:

- la intersección de dos símlices cualesquiera de Σ en la colección es una cara de cada símlice y
- toda cara de un símlice de Σ es un símlice de Σ .

La unión de todos los símlices de un complejo es un espacio topológico llamado su polihedro o espacio subyacente. Si Σ' es un segundo complejo simplicial, una correspondencia (función) del conjunto de vértices (o 0-símlices) de Σ en los vértices de Σ' se dice una correspondencia simplicial si para cada símlice $T_{(x_1, \dots, x_n)}$ de Σ , las imágenes $f(x_1), \dots, f(x_n)$ son los vértices de algún símlice de Σ' . En tal caso, la correspondencia entre vértices se extiende de manera única a una función continua entre los polihedros respectivos que es simplicial en cada símlice. Esta recibe también el nombre de función simplicial.

En general, definiremos funciones continuas entre polihedros explicitando la correspondencia entre los vértices, en lugar de dar una fórmula para la función en cada símlice. Es necesario, por cierto, chequear en cada caso que se cumple la condición de compatibilidad. Nótese, sin embargo, que la condición de que “ $f(x_1), \dots, f(x_n)$ son los vértices de algún símlice” como aparece más arriba, no implica que este símlice tenga la misma dimensión que el símlice original, ya que algunas de las imágenes en la lista

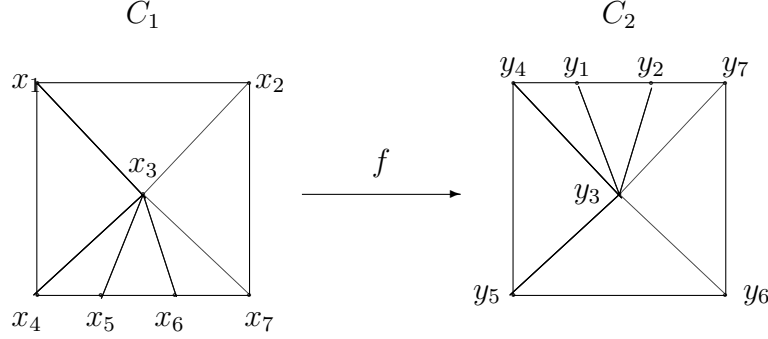


Figure 16.3: Dos triangulaciones distintas pero isomorfas del cuadrado.

$f(x_1), \dots, f(x_n)$ pueden repetirse. En tal caso diremos que el símplice colapsa.

ejemplo 16.4. Existe un único homeomorfismo f entre los cuadrados C_1 y C_2 de la Figura 16.3 que es simplicial con respecto al complejo dado y lleva al vértice x_i en y_i para $i = 1, \dots, 7$.

ejemplo 16.5. Para ilustrar el método, construiremos una homotopía entre las curvas $(\alpha * \beta) * \gamma$ y $\alpha * (\beta * \gamma)$, lo que da una demostración alternativa de la asociatividad de la yuxtaposición a nivel de clases de homotopía. Con este fin, construimos un homeomorfismo simplicial entre el cuadrado $C = [0, 1]^2$ y el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 3]$. Recordemos que la curva $(\alpha * \beta) * \gamma$ recorre la curva α en el primer cuarto del intervalo, la curva β en el segundo cuarto del intervalo, y la curva γ en la segunda mitad del intervalo. Por otro lado la curva $\alpha * (\beta * \gamma)$ recorre la curva α en el intervalo $[0, 1/2]$ y las curvas β y γ en cada mitad del intervalo $[1/2, 1]$. Para transformar la homotopía requerida en una más simple de definir, consideremos el homeomorfismo simplicial $\Phi : C \rightarrow R$ definido envi ndo el vértice a en a' , b en b' y así sucesivamente, como muestra la Figura 16.4. Ahora podemos definir la homotopía en R mediante

$$K(t, s) = \left\{ \begin{array}{lll} \alpha(s) & \text{si} & 0 \leq s \leq 1 \\ \beta(s-1) & \text{si} & 1 \leq s \leq 2 \\ \gamma(s-2) & \text{si} & 2 \leq s \leq 3 \end{array} \right\},$$

y finalmente en C mediante $H = K \circ \Phi$.

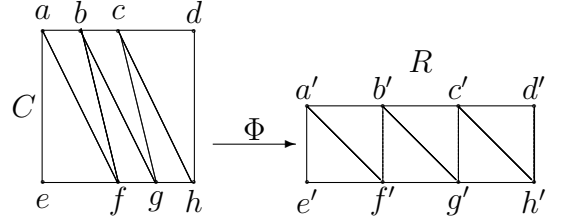


Figure 16.4: Un isomorfismo de complejos utilizado para probar la asociatividad del grupo fundamental.

ejemplo 16.6. Utilizaremos este método para dar una nueva demostración del hecho de que si $\phi, \psi : X \rightarrow Y$ son funciones homotópicas entonces definen la misma función a nivel de grupo fundamental. Más precisamente, sean x e y dos puntos de X . Considere

1. Una homotopía K entre ϕ y ψ ,
2. el camino α que une $\psi(x)$ con $\phi(x)$ en Y , y se define por $\alpha(s) = H(s, x)$,
3. el camino β que une $\psi(y)$ con $\phi(y)$ en Y , y se define por $\beta(s) = H(s, y)$.

Entonces para todo camino γ que une x con y se tiene que $\psi \circ \gamma$ es homotópico a $[\alpha * (\phi \circ \gamma)] * \beta^{\text{op}}$, donde β^{op} es el camino inverso de β . Para esto observamos que $L(t, s)$ define una homotopía entre $\psi \circ \gamma$ y $\phi \circ \gamma$ que no es de extremos fijos, pero que satisface

$$L(t, 0) = \alpha(t), \quad L(t, 1) = \beta(t).$$

En el diagrama de la Figura 16.5(A), L toma los valores que se indican en cada lado. Consideremos ahora la función simplicial F de la Figura 16.5(B), definida mediante la correspondencia

$$\begin{aligned} W_1, W_3 &\mapsto V_3, & W_2, W_6 &\mapsto V_4, & W_4 &\mapsto V_1, \\ W_5 &\mapsto V_2, & W_7 &\mapsto V_5. \end{aligned}$$

Entonces se define la homotopía requerida mediante $H = L \circ F$. Nótese que en este caso algunos símlices colapsan, por ejemplo el símlice $T_{(W_1, W_3, W_7)}$. Nótese que la homotopía explícita utilizada en el capítulo anterior para probar este resultado fué realmente calculada por este método.

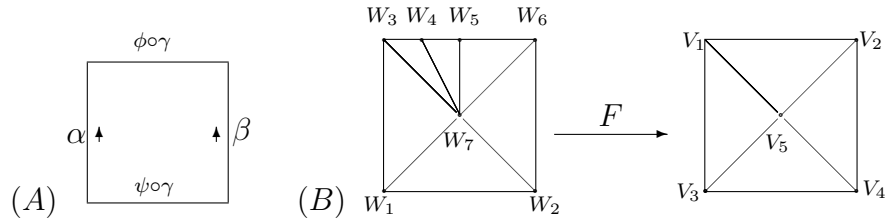


Figure 16.5: La homotopía de extremos variables en el ejemplo 16.6(A) y la función simplicial que la convierte en una homotopía de extremos fijos (B).

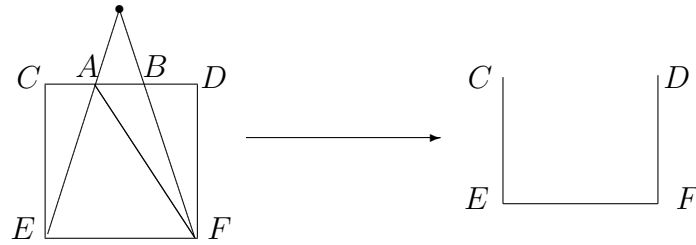


Figure 16.6: La demostración del Lema 14.9 usando triangulaciones.

ejemplo 16.7. Nuestro ejemplo final consiste en dar una demostración, utilizando triangulaciones, del Ejemplo 14.8. Para ello tomamos las triangulaciones de la figura 16.6, y consideramos la función simplicial definida por la correspondencia

$$C \mapsto C, \quad A, E \mapsto E, \quad B, F \mapsto F, \quad D \mapsto D.$$

Los detalles se dejan al lector.

Ejercicios

1. Dar una demostración, mediante triangulaciones, del Lema 14.9.
2. Dar una demostración, mediante triangulaciones, del Lema 14.17.

Chapter 17

El teorema de Van Kampen.

Antes de entregar métodos para calcular el grupo fundamental de un espacio topológico dado X , es necesario ponerse de acuerdo en el significado de la palabra *calcular*. Para ello recordemos que un grupo puede describirse en términos de generadores y relaciones.

Un conjunto de generadores de un grupo G es simplemente un conjunto S que no está contenido en ningún subgrupo propio de G . Otra manera de decir esto es la siguiente. Un subconjunto S de G es un conjunto de generadores de G si cada elemento g de G puede escribirse como una palabra

$$g = s_1^{\epsilon_1} s_2^{\epsilon_2} s_3^{\epsilon_3} \cdots s_n^{\epsilon_n},$$

para ciertos elementos $s_i \in S$ y ciertos exponentes $\epsilon_i \in \{1, -1\}$.

El conjunto más sencillo generado por un conjunto S dado es el grupo libre en S , denotado $F(S)$. Idealmente, sus elementos serían todas las palabras (formales) en los elementos de S . Como $F(S)$ debe tener estructura de grupo, es necesario identificar aquellas palabras que necesariamente deben coincidir en cualquier grupo, por ejemplo ss^{-1} y la palabra vacía e que corresponde a la identidad. Para ello, se define una operación de reducción. Una reducción consiste en eliminar de una palabra cualquier aparición consecutiva de un generador y su inverso, en cualquier orden. En decir remplazamos cualquiera de las palabras $\alpha ss^{-1}\beta$ o $\alpha s^{-1}s\beta$, donde s es un generador, por $\alpha\beta$. En este caso decimos que $\alpha\beta$ se obtiene, de cualquiera de las dos palabras anteriores, tras una reducción. Una palabra se dice reducida si no puede obtenerse ninguna palabra nueva de ella tras una reducción, o equivalentemente, que en ella no aparezca ningún par de la forma ss^{-1} o $s^{-1}s$ como arriba. Nótese que aplicar una reducción a una palabra la acorta, por lo que no es posible

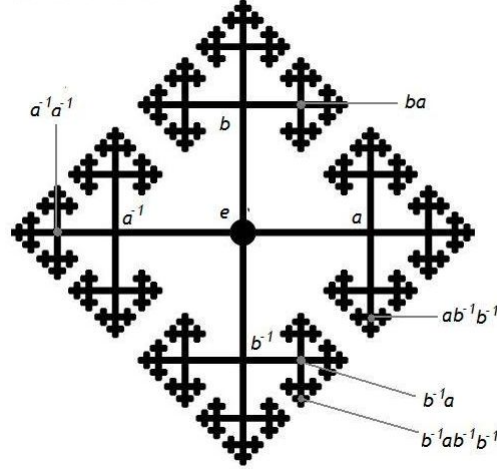


Figure 17.1: La antena de Televisión universal y las palabras asociadas a algunos de sus vértices.

aplicar a una palabra una sucesión infinita de reducciones. El proceso de aplicar reducciones sucesivas a una palabra debe producir, tarde o temprano, una palabra reducida. Es posible probar que para toda palabra α existe una única palabra reducida $\text{red}(\alpha)$ que puede obtenerse mediante reducciones sucesivas y que el orden en el cual se realicen las reducciones es irrelevante. Una manera de hacer esto es observar el gráfico de la Figura 17.1, a veces llamado la antena de televisión universal, en el cual cada vértice corresponde a una palabra reducida. En la figura, hemos asumido que $S = \{a, b\}$, pero la generalización a conjuntos de mayor tamaño no presenta dificultades. Una palabra no reducida es, simplemente, una caminata con retrocesos en este grafo. Su reducción, es la palabra asociada al vértice final de esa caminata.

El grupo libre $F(S)$ se define como el conjunto de todas las palabras reducidas en los elementos de S . la operación de grupo se define entonces como $\alpha * \beta = \text{red}(\alpha\beta)$ donde $\alpha\beta$ denota simplemente la concatenación de las palabras α y β . Dejamos al lector la tarea de comprobar que, con esta operación, el conjunto $F(S)$ es un grupo cuya identidad es la palabra vacía e y que el inverso de toda palabra $s_1^{\epsilon_1} \cdots s_n^{\epsilon_n}$ es $s_n^{-\epsilon_n} \cdots s_1^{-\epsilon_1}$.

Cada función $\phi : S \rightarrow G$, donde G es un grupo, puede extenderse de manera única a un homomorfismo $\bar{\phi} : F(S) \rightarrow G$, simplemente llevando cada

palabra en los elementos de S a la palabra correspondiente en sus imágenes en G . Si identificamos S con su imagen en G , una relación k entre los elementos de S en G es una palabra $k \in F(S)$ cuya imagen en G se anula, es decir $\bar{\phi}(k) = e_G$. El grupo G se dice definido por el conjunto Y de generadores y el conjunto K de relaciones si

$$G \cong \frac{F(Y)}{\langle K \rangle_N},$$

donde $\langle K \rangle_N$ denota el subgrupo normal generado por K , es decir el subgrupo generado por K y todos sus conjugados. En este caso escribiremos

$$G = \langle Y | K \rangle.$$

En este lenguaje, el propósito de el presente capítulo es demostrar el siguiente resultado:

Proposición 17.1. [Teorema de Van Kampen]. *Sea $X = X_1 \cup X_2$ un espacio topológico, con X_1 y X_2 abiertos y su intersección $X_1 \cap X_2$ arco-conexa. Sean $f : X_1 \hookrightarrow X$ y $g : X_2 \hookrightarrow X$ las inclusiones respectivas. Sea $x \in X_1 \cap X_2$. Supongamos que $\Pi_x(X_1) = \langle Y_1 | K_1 \rangle$ y $\Pi_x(X_2) = \langle Y_2 | K_2 \rangle$ en el sentido descrito más arriba. Sea K_3 el conjunto de relaciones*

$$K_3 = \{f_*(a)g_*(a)^{-1} | a \in \Pi_x(X_1 \cap X_2)\}$$

donde cada imagen $f_(a)$ es escrita en términos de los generadores Y_1 y cada imagen $g_*(a)$ es escrita en términos de los generadores Y_2 , entonces*

$$\Pi_x(X) = \langle Y_1 \cup Y_2 | K_1 \cup K_2 \cup K_3 \rangle.$$

Lema 17.2. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto y $\{U_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que todo subconjunto de X de diámetro menor a ϵ está contenido en uno de los conjuntos del recubrimiento.*

Demostración Como cada U_i es abierto, su complemento U_i^c es cerrado. Se sigue que $d(x, U_i^c)$ se anula sólo si $x \in U_i^c$. Como los abiertos U_i recubren X , la función

$$f(x) = \max_{i \in I} d(x, U_i^c)$$

es estrictamente positiva para cada elemento x de X . Como la imagen de un compacto es un compacto y un compacto en $\mathbb{R}$ es cerrado, la imagen de X bajo f debe contener a su ínfimo δ . Afirmamos que todo $\epsilon < \delta$ cumple lo pedido. De hecho si E es un subconjunto de X de diámetro inferior a ϵ , entonces para cada $x \in E$ fijo se tiene $f(x) \geq \delta$ por lo que $d(x, U_i^c) \geq \delta$ para algún i . Se sigue que para todo $y \in E$ se tiene

$$d(y, U_i^c) \geq d(x, U_i^c) - d(y, x) \geq \delta - \epsilon > 0.$$

Se sigue que $y \in U_i$, y como y era arbitrario, se tiene la contención $E \subseteq U_i$, como se pedía. $\square$

La demostración del Teorema de Van Kampen se divide en tres partes. Primero probaremos que las imágenes de los elementos de $\Pi_x(X_1)$ y $\Pi_x(X_2)$ efectivamente generan $\Pi_x(X)$. Luego veremos que las relaciones de cada uno de los conjuntos K_i se cumplen efectivamente en $\Pi_x(X)$. Finalmente probaremos que toda relación que se cumple en $\Pi_x(X)$ es una consecuencia de las relaciones en el conjunto $K_1 \cup K_2 \cup K_3$.

Demostración de Van Kampen (Parte I). Para probar que las imágenes de los elementos de $\Pi_x(X_1)$ y $\Pi_x(X_2)$ efectivamente generan $\Pi_x(X)$, es suficiente probar que toda curva cerrada β en X es homotópica a una yuxtaposición del tipo $\alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_n$ donde cada α_i es una curva cerrada contenida en uno de los conjuntos X_1 o X_2 .

Sea $\epsilon > 0$ tal que todo conjunto E de diámetro inferior a ϵ satisfaga $E \subseteq \beta^{-1}(X_1)$ o $E \subseteq \beta^{-1}(X_2)$. Tomemos a continuación una partición $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ del intervalo $[0, 1]$ de modo que cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tenga diámetro inferior a ϵ . Se concluye que cada imagen $\beta([x_i, x_{i+1}])$ está contenida en uno de los conjuntos X_1 o X_2 . Reparametrizando, podemos suponer que $\beta = \delta_1 * \delta_2 * \cdots * \delta_n$ donde cada δ_i está contenido en uno de los conjuntos X_1 o X_2 . Los δ_i no son necesariamente caminos cerrados, pero si para cada uno de los puntos $\beta(x_i)$ escogemos un camino γ_i que une x con $\beta(x_i)$ con $\gamma_0 = \gamma_n = c_x$ el camino constante, se tiene

$$\beta \sim (\gamma_0 * \delta_1 * \gamma_1^{\text{op}}) * \cdots * (\gamma_{n-1} * \delta_n * \gamma_n^{\text{op}}).$$

Supondremos que se tienen las siguientes precauciones al escoger los caminos γ_i :

- si $\beta(x_i)$ está en X_1 , asumimos que γ_i es un camino en X_1 ,

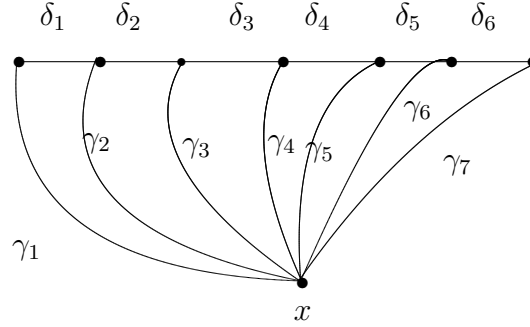


Figure 17.2: Escribiendo un camino cerrado como una yuxtaposición de caminos que respeta el recubrimiento.

- si $\beta(x_i)$ está en X_2 , asumimos que γ_i es un camino en X_2 y, en particular,
- si $\beta(x_i)$ está en $X_1 \cap X_2$, asumimos que γ_i es un camino en $X_1 \cap X_2$.

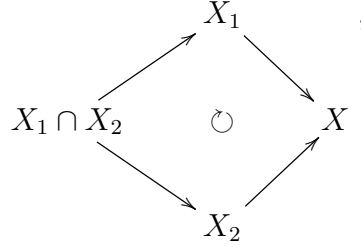
Nótese que aquí se usa la hipótesis de que es posible ya que $X_1 \cap X_2$ es arco-conexo. se tiene que cada uno de los caminos $(\gamma_{n-1} * \delta_n * \gamma_n^{\text{op}})$ es un camino cerrado que une x con x . Esto concluye la primera parte de la demostración.

Demostración de Van Kampen (Parte II). Para ver que las relaciones en K_1 se cumplen en $\Pi_x(X)$, es suficiente considerar la composición

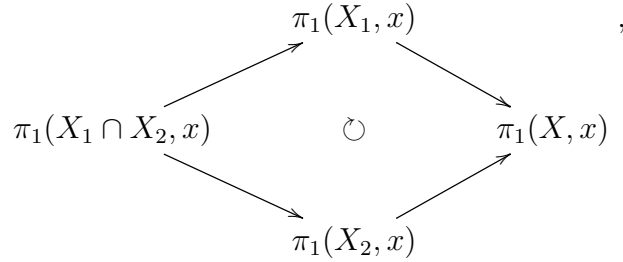
$$F(Y_1) \rightarrow \Pi_x(X_1) \xrightarrow{f_*} \Pi_x(X)$$

y observar que cualquier palabra que se anule en $\Pi_x(X_1)$ debe anularse en $\Pi_x(X)$ pues un homomorfismo lleva la identidad en la identidad. El mismo razonamiento prueba que las relaciones en K_2 se cumplen en $\Pi_x(X)$. Para

K_3 consideramos el diagrama conmutativo de inclusiones



lo que a nivel de grupos fundamentales nos dá el diagrama conmutativo de grupos

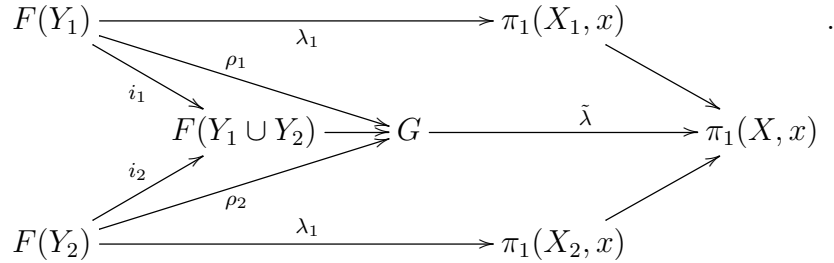


de donde se concluye lo pedido.

Demostración de Van Kampen (Parte III). Para la última parte de la demostración, asumiremos que G es un grupo generado por $Y_1 \cup Y_2$ que no satisface otras relaciones que aquellas que son consecuencia de las relaciones en K_1 , K_2 , y K_3 , en símbolos:

$$G = \langle Y_1 \cup Y_2 | K_1 \cup K_2 \cup K_3 \rangle.$$

Consideraremos el siguiente diagrama conmutativo:



Nuestro objetivo es probar que $\tilde{\lambda}$ es inyectiva, es decir, que si $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n}$ es una palabra en los elementos de $Y_1 \cup Y_2$ que se anula en $\pi_1(X, x)$, esta palabra se anula también como un elemento de G .

α_1			α_2		α_3
R_{25}	R_{26}	R_{27}	R_{28}	R_{29}	R_{30}
R_{19}	R_{20}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}
R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	R_{17}	R_{18}
R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6

Figure 17.3: Una partición del cuadrado $[0, 1]^2$.

Escojamos, para cada $i = 1, \dots, n$ un representante α_i en la clase $a_i^{\epsilon_i}$, el que supondremos completamente contenido en X_1 , si a_i pertenece a Y_1 , o en X_2, Y_2 . La hipótesis de que $a_1^{\epsilon_1} \cdots a_n^{\epsilon_n} = e$ en $\pi_1(X, x)$, implica que existe una homotopía H de extremos fijos entre $\alpha_1 * \cdots * \alpha_n$ y el camino constante c_x . Como es usual, interpretamos esta yuxtaposición como una partición del intervalo $[0, 1]$ en intervalos I_i que parametrizan las curvas α_i . Por el Lema 17.2, existe una partición de $[0, 1]^2$ en rectángulos R_i lo bastante fina para que cada imagen $H(R_i)$ esté contenida en X_1 o X_2 . Refinando la partición si es necesario, podemos suponer que cada punto divisorio entre los intervalos I_i , en el borde superior del cuadrado $[0, 1]^2$, es un vértice en algún rectángulo de la partición (ver Fig. 17.3).

Para cada rectángulo R_i , definimos una curva $h_i = k_i * m_i * n_i$ en $[0, 1]^2$ que llamaremos su borde superior, particionada como muestra la figura. Nótese que $h_{i-1} = k_i * r_i * n_i$. Cuando el rectángulo R_i está en el borde izquierdo, la subdivisión es un poco diferente, como muestra la figura de la derecha (ver Fig. 17.4).

Para cada vértice v de algún rectángulo R_i de la partición, se escoge una curva γ_v , de x a $H(v)$, como se explicó en la primera parte de la demostración, es decir, asumiendo que la curva está totalmente contenida en X_i si $H(v) \in X_i$. Suponemos además que γ_v es el camino constante si $H(v) = x$, lo que ocurre en los vértices del cuadrado mayor. A continuación, para cada arista δ de la partición de la Figura 17.3, cuya imagen esté contenida en X_1 , escogemos una palabra $u_1 = u_1(\delta)$ en $F(Y_1)$, que cumpla $\lambda_1(u_i) = [\gamma_v * (H \circ \delta) * \gamma_w^{\text{op}}]$. Si $H \circ \delta$ está contenida en X_2 , se define $u_2 = u_2(\delta)$ en $F(Y_2)$

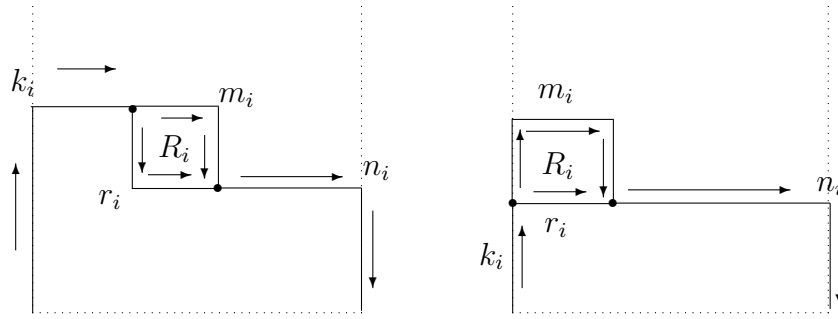


Figure 17.4: Curvas por encima, y por debajo, de un cuadrado dado.

análogamente. Nótese que, para cada arista δ , al menos una de las palabras u_1 o u_2 está definida.

Sea $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una curva que se obtiene yuxtaponiendo lados de ciertos rectángulos de la partición (como las curvas h_i más arriba). Más específicamente asumimos que $h = \delta_1 * \dots * \delta_m$, donde cada δ_i es una arista. Diremos que h es *demostrablemente trivial*, si

$$\rho_{j(1)}(u_{j(1)}(\delta_1)) \rho_{j(2)}(u_{j(2)}(\delta_2)) \dots \rho_{j(m)}(u_{j(m)}(\delta_m)) = e_G, \quad (17.1)$$

donde cada $j(i) \in \{1, 2\}$ se escoge de forma que $u_{j(i)}$ esté definida. Nótese que $\rho_1(u_1(\delta)) = \rho_2(u_2(\delta))$ cuando ambos están definidos, por lo que la elección no es relevante.

Probaremos por inducción que cada una de las curvas h_i definidas más arriba son demostrablemente triviales.

Para $i = 0$, la curva $H \circ h_0$ es la imagen del borde inferior de la homotopía, en particular si escribimos $H \circ h_0 = \delta_1 * \dots * \delta_T$, cada δ_i es un camino constante por lo que la yuxtaposición $\gamma_{v_{i-1}} * (H \circ \delta_i) * \gamma_{v_i}^{\text{op}}$ es una curva cerrada en $X_1 \cap X_2$, obtenemos $(u_{j(1)}(\delta_1)) = g_{i-1} g_i$, donde $g_i = [\gamma_{v_i}]$. Además, $g_0 = g_T = e$, pues asumimos que los caminos asociados a los vértices del cuadrado mayor son constantes, por lo que, en este caso la ecuación (17.1) se convierte en

$$g_1^{-1} (g_1 g_2^{-1}) (g_2 g_3^{-1}) \dots (g_{T-2} g_{T-1}^{-1}) g_{T-1} = e_G,$$

lo que es inmediato.

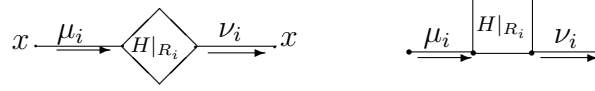


Figure 17.5: El espacio Z_i utilizado para probar la identidad $e_i = c_i$.

Supongamos ahora que el resultado ya se ha probado para $H \circ h_{i-1}$ y queremos probarlo para $H \circ h_i$. Obsérvese que, para $H \circ h_{i-1}$, la expresión (17.1) tiene la forma $b_i c_i d_i = e_G$, donde:

1. b_i es el producto de los factores que corresponden a la curva k_i en la Figura 17.4.
2. c_i es el producto de los factores que corresponden a la curva r_i en la figura.
3. d_i es el producto de los factores que corresponden a la curva n_i .

Sea e_i el producto de los factores que corresponden a la curva m_i . Basta ver que $e_i = c_i$. Nótese que esta es una identidad en el grupo G , por lo que debemos demostrar esto utilizando sólo las relaciones en $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Equivalentemente, la identidad debe probarse usando sólo cálculos hechos en cada grupo $\pi_1(X_i, x)$, y el hecho de que podemos identificar un elemento en un grupo con el elemento correspondiente en el otro, si corresponde a una curva en $X_1 \cap X_2$. Esto último fué ya considerado al observar que la expresión (17.1) no depende de la elección de j .

En resumen, debemos mostrar que $e_i = c_i$ utilizando una homotopía que tome valores en ún solo conjunto, X_1 o X_2 . Para esto tenemos $H|_{R_i}$, la restricción de la homotopía H al rectángulo R_i de la figura 17.4. Sea u el vértice inicial de r_i (o m_i), y sea s su vértice inicial. Como, en general, las imágenes $H(u)$ y $H(s)$ no coinciden con el punto base x , es necesario utilizar una construcción algo diferente. Sea Z_i el espacio topológico que se obtiene al pegar un segmento a R_i en cada uno de los puntos u y s . Si el rectángulo R_i no está en el borde izquierdo, Tenemos una función definida en Z_i como se muestra a la izquierda de la Figura 17.5. Si el rectángulo R_i está en el borde izquierdo, la función está definida como se encuentra a la derecha de la misma figura, Ahora puede definirse una homotopía componiendo con la

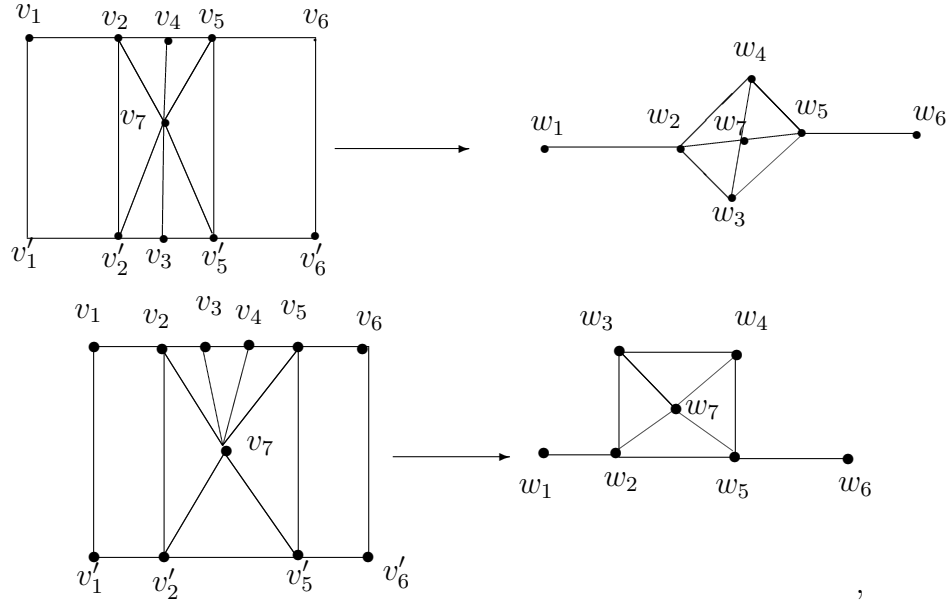


Figure 17.6: Función simplicial utilizada para definir una homotopía.

función simplicial $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow Z_i$ de acuerdo a lo mostrado en la Figura 17.6. con las mismas convenciones de la figura anterior. En cada caso esto nos dá una homotopía entre $\gamma_u * (H \circ r_i) * \gamma_s^{\text{op}}$ y $\gamma_u * (H \circ m_i) * \gamma_s^{\text{op}}$ totalmente contenida en X_1 o X_2 . Esto concluye la inducción.

Lo anterior nos permite concluir que el camino h_T , el cual pasa por arriba del último cuadrado R_T es demostrablemente trivial, es decir, si $h_T = \delta_1 * \dots * \delta_m$ es la descomposición de esta curva en aristas de la partición, el producto correspondiente en la ecuación (17.1) es trivial en G . Podemos asumir, por el mismo argumento usado para h_0 , que las aristas δ_i que aparecen en esta descomposición son sólo las del borde superior. Un subproducto de (17.1) corresponde a cada curva α_i , es decir $\alpha_i = \delta_{t_i+1} * \dots * \delta_{t_{i+1}}$, con

$$\tilde{\lambda}(a_i^{\epsilon_i}) = \tilde{\lambda}\left(\rho_{j(t_i+1)}\left(u_{j(t_i+1)}(\delta_{t_i+1})\right) \cdots \rho_{j(t_{i+1})}\left(u_{j(t_{i+1})}(\delta_{t_{i+1}})\right)\right).$$

Observemos ahora que j puede asumirse constante en la expresión de arriba, y que cada factor de la derecha corresponde a una curva de la forma $\hat{\delta}_i = \gamma_v * \delta_i * \gamma_w^{\text{op}}$, por lo que una homotopía entre $\delta_{t_i+1} * \dots * \delta_{t_{i+1}}$ y $\hat{\delta}_{t_i+1} * \dots * \hat{\delta}_{t_{i+1}}$ requiere sólo retraer algunos factores de la forma $\gamma_v^{\text{op}} * \gamma_v$, por lo que la identidad

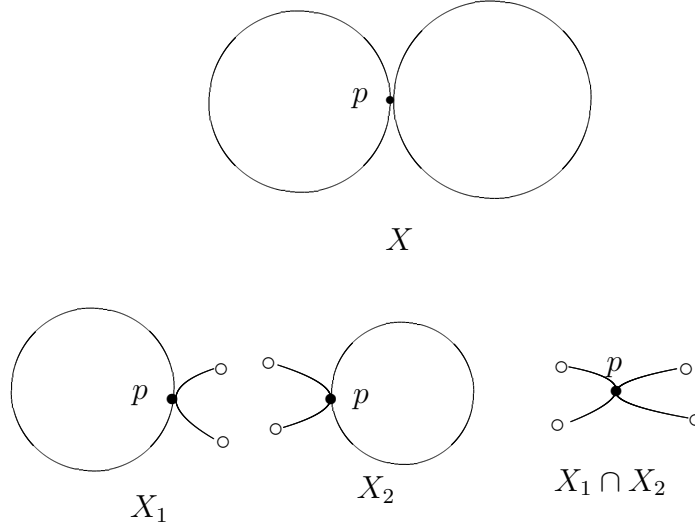


Figure 17.7: El espacio del ejemplo 17.3.

$a_i^{\epsilon_i} = u_j(\delta_{t_{i+1}}) \cdots u_j(\delta_{t_{i+1}})$ es cierta en $\pi_1(X_j, x)$, y por lo tanto también se tiene $\rho_j(a_i^{\epsilon_i}) = \rho_j(u_j(\delta_{t_{i+1}}) \cdots u_j(\delta_{t_{i+1}}))$ en G . Podemos reemplazar el lado derecho de la última ecuación, para cada $i = 1, \dots, n$, en (17.1), para probar que $\rho_j(1)(a_1^{\epsilon_1}) \cdots \rho_j(n)(a_n^{\epsilon_n}) = e_G$ como se pedía. $\square$

Nótese que si $f_*(a) = g_*(a)$ en G para cada generador a de $\pi_x(X_1 \cap X_2)$, esto se cumple para cada elemento de $\pi_x(X_1 \cap X_2)$. Por esta razón es suficiente incluir en K_3 una relación por cada generador.

ejemplo 17.3. Considerese el conjunto X definido como un espacio de identificación del coproducto de dos círculos obtenido al identificar un punto de cada círculo, o equivalentemente, la unión de dos círculos en $\mathbb{R}^2$ con un punto en común, como se muestra en la parte superior de la figura 17.7. El espacio así definido puede escribirse como la unión de dos subconjuntos abiertos X_1 y X_2 , cada uno de los cuales es un círculo con un pequeño arco pegado en el punto p . La intersección $X_1 \cap X_2$ es el espacio que se forma al pegar dos arcos por un punto interior.

Nótese que cada arco es contractible, de hecho la función que lleva cada arco al punto p es homotópica a la identidad del arco mediante una homotopia que mantiene fijo p , es decir $\{p\}$ es un retracto de deformación fuerte de

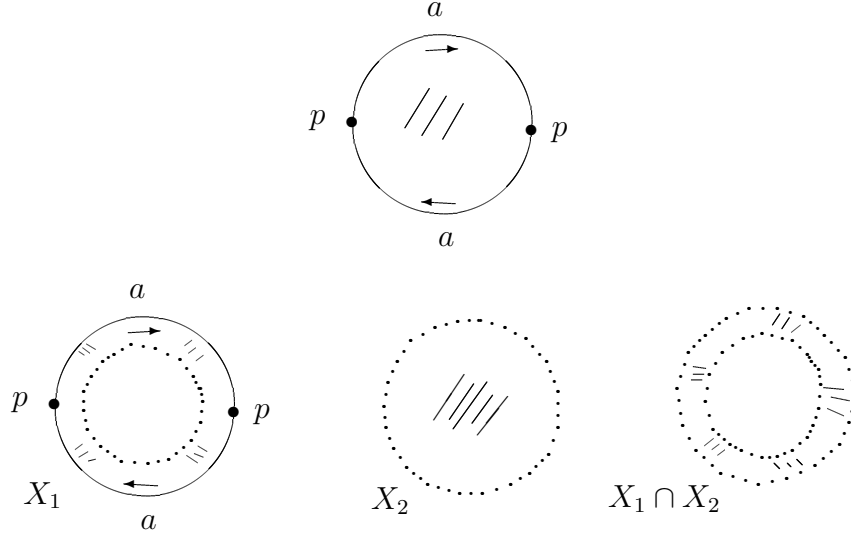


Figure 17.8: El espacio del ejemplo 17.4.

$X_1 \cap X_2$. Se sigue que la intersección $X_1 \cap X_2$ es contractible, mientras que cada uno de los espacios, X_1 y X_2 , es homotópicamente equivalente a un círculo. Se sigue que los grupos fundamentales de X_1 y X_2 están dados por

$$\pi_1(X_1, x) = \langle x | \emptyset \rangle, \quad \pi_1(X_2, x) = \langle y | \emptyset \rangle.$$

Como $X_1 \cap X_2$ es contractible, su grupo fundamental está generado por el conjunto vacío. Se sigue que K_3 puede tomarse vacío por la observación precedente. Concluimos que

$$\pi_1(X, x) = \langle x, y | \emptyset \rangle$$

es un grupo libre en dos generadores.

ejemplo 17.4. Sea X el espacio topológico que se obtiene al identificar puntos opuestos del círculo borde del disco de radio 1 como muestra la parte superior de la Figura 17.8. Para calcular el grupo fundamental de X consideramos la descomposición $X = X_1 \cup X_2$ donde X es la imagen de un anillo abierto que contiene el círculo borde y X_2 es un disco interior al círculo como muestra la parte inferior de la figura.

En este caso el espacio X_2 es contractible, por lo que su grupo fundamental es trivial. el espacio X_1 es homotópicamente equivalente a la imagen del

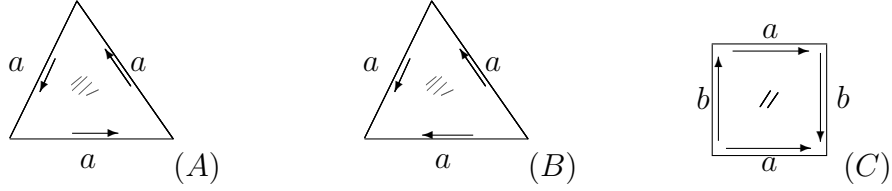


Figure 17.9: Tres espacios de identificación para los ejemplos 17.5-7.

círculo borde pues la función que proyecta el anillo en su círculo borde es homotópica a la identidad mediante la homotopía

$$H(t, z) = \frac{z}{t|z| + (1-t)}.$$

Se sigue que el grupo fundamental de X_1 es isomorfo a $\mathbb{Z}$ con generador $u = [a]$. De hecho $\pi_1(X_1, x) = \langle u | \emptyset \rangle$. El grupo fundamental de $X_1 \cap X_2$ es también isomorfo a $\mathbb{Z}$, con un generador x que es la clase de una curva que da una vuelta alrededor del anillo. Este generador es trivial en $\Pi_1(X_2, x)$ y coincide con u^2 en $\pi_1(X_1, x)$. Se sigue que K_3 puede tomarse como sigue:

$$K_3 = \{(u^2)(e)^{-1}\}.$$

Se concluye que $\pi_1(X, x) \cong \langle u | u^2 = e \rangle \cong C_2$.

ejemplo 17.5. El mismo argumento aplicado al espacio de identificación de la Figura 17.9(A) prueba que su grupo fundamental es

$$\pi_1(X, x) \cong \langle u | u^3 = e \rangle \cong C_3.$$

ejemplo 17.6. El mismo argumento aplicado al espacio de identificación de la Figura 17.9(B) prueba que su grupo fundamental es

$$\pi_1(X, x) \cong \langle u | u^2 u^{-1} = e \rangle = \{e\}.$$

Se sigue que el espacio de identificación de este ejemplo, el *gorrito de burro*, es simplemente conexo.

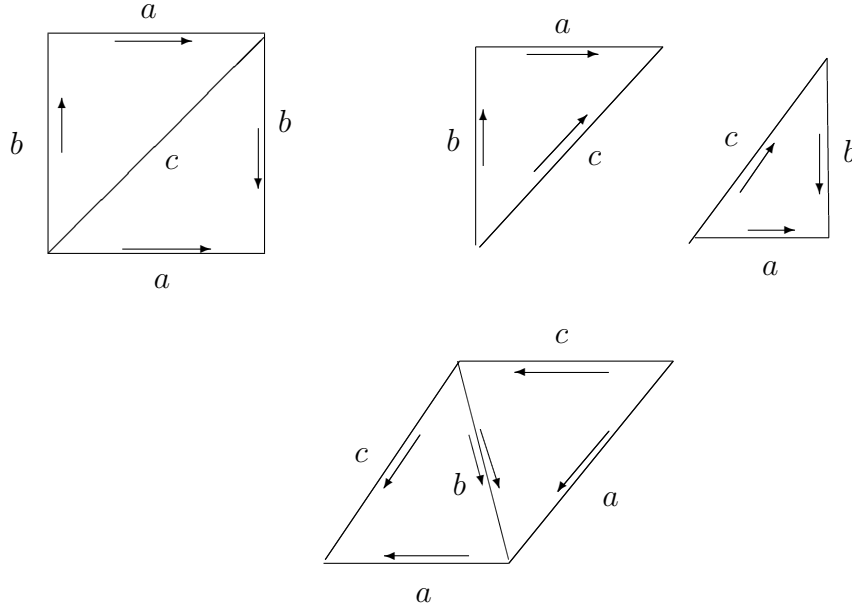


Figure 17.10: Otra interpretación de la botella de Klein como espacio de identificación.

ejemplo 17.7. El espacio de identificación B de la Figura 17.9(C), conocido como *Botella de Klein*, tiene como grupo fundamental a

$$\pi_1(B, x) \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b = e \rangle.$$

Por otro lado, dividiendo el cuadrado por la diagonal y pegando el lado b obtenemos un espacio de identificación que es homeomorfo al original (ver Fig. 17.10). Esta última construcción nos da la siguiente presentación del grupo fundamental:

$$\pi_1(B, x) \cong \langle a, c \mid c^2 = a^2 \rangle.$$

Dejamos al lector la tarea de comprobar directamente que ambos grupos son isomorfos.

ejemplo 17.8. En el siguiente ejemplo calcularemos el grupo fundamental del espacio que se obtiene al extraer, de $\mathbb{R}^3$, dos círculos entrelazados como los que se muestran en la figura 17.11. Para ello, comenzaremos dividiendo el

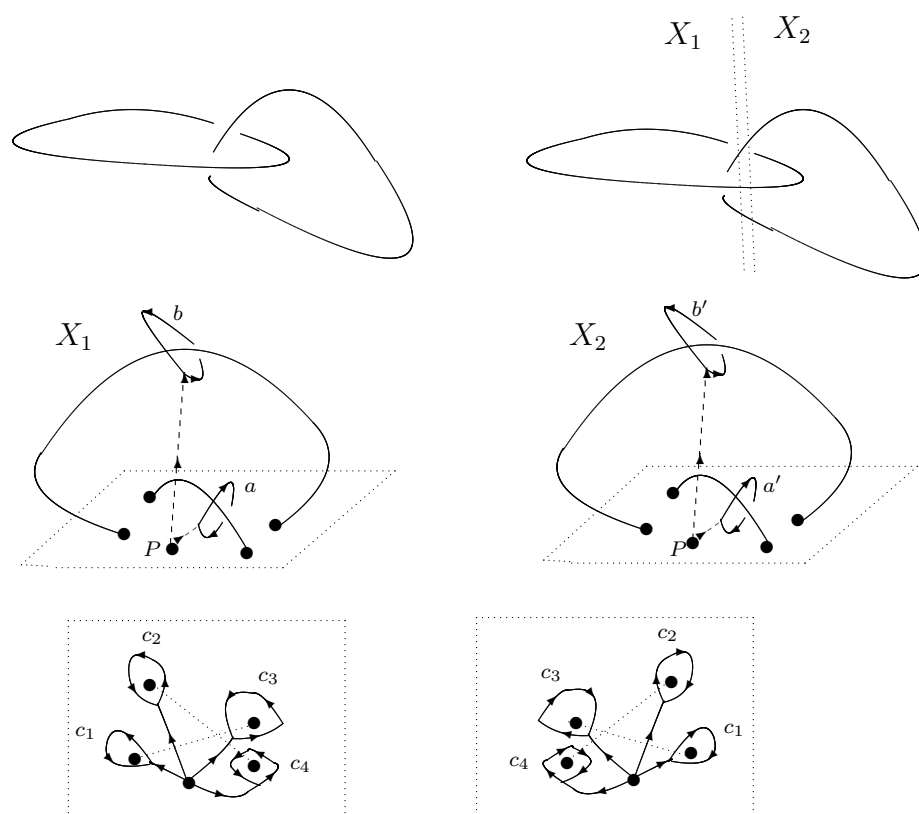


Figure 17.11: Calculando el grupo fundamental del espacio obtenido al retirar dos círculos entrelazados de $\mathbb{R}^3$.

espacio en dos semiespacios como muestra la figura superior derecha. Cada subespacio, X_1 o X_2 , consiste en un semiespacio del cual se han extraído dos arcos. No es difícil comprobar que un semiespacio sin un arco tiene un grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}$ (por ejemplo, si el arco es un semicírculo, dicho espacio puede escribirse como el producto del semiplano sin un punto por un espacio contractible). Se sigue, por una aplicación sencilla del teorema de Van Kampen, que cada uno de los espacios X_1 y X_2 tiene un grupo fundamental isomorfo al grupo libre F_2 . Por ejemplo, los generadores del grupo $\pi_1(X_1, P)$ son las curvas a y b de la figura, las que avanzan por la línea punteada, dan la vuelta indicada, y luego regresan a P recorriendo la línea punteada en sentido inverso. Esta convención vale para todos los curvas de este ejemplo.

Para calcular el grupo fundamental del espacio completo $X = X_1 \cup X_2$

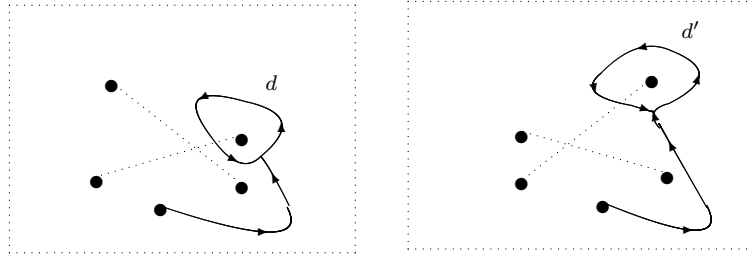


Figure 17.12: Una curva que si puede deslizarse para su identificación.

es necesario identificar las imágenes, en cada copia de F_2 , de cada uno de los generadores del espacio $X_1 \cap X_2$. Nótese que este último espacio se retrae fácilmente a un plano del cual se han sustraído cuatro puntos. El grupo fundamental de dicho plano perforado tiene 4 generadores, los que se ilustran en las dos figuras inferiores. Nótese que el dibujo de cada lado está realizado desde la perspectiva de un observador en el subespacio en cuestión. Es relativamente sencillo ahora identificar la imagen de cada generador en el subespacio correspondiente, con una salvedad. la imagen en X_1 del generador c_3 parece coincidir con b^{-1} , pero al tratar de deslizar dicha curva para hacerla coincidir con la curva opuesta al generador b , nos encontramos con que la curva se enreda en la manilla interior. Debemos, por lo tanto reemplazarla con una curva que pase por fuera de dicha manilla, como la curva d que se ilustra en la Figura 17.12. No es difícil ver que d es homotópica a $c_4 * c_3 * c_4^{-1}$ y que se identifica con b^{-1} en X_1 . Dado que c_4 se identifica con a , c_3 debe identificarse con $a^{-1} * b^{-1} * a$. Lo mismo ocurre con el generador correspondiente a c_2 en X_2 . $c_1^{-1} * c_2 * c_1$ es homotópica a $(d')^{-1}$, la que se identifica con b' , por lo que c_2 se identifica a $(a')^{-1} * b' * a'$. Las ecuaciones correspondientes a los cuatro generadores nos quedan como sigue:

1. Ecuación correspondiente a c_1 : $b = (a')^{-1}$.
2. Ecuación correspondiente a c_2 : $a^{-1} = (a')^{-1}b'a'$.
3. Ecuación correspondiente a c_3 : $a^{-1}b^{-1}a = a'$.
4. Ecuación correspondiente a c_4 : $a = (b')^{-1}$.

Concluimos que el grupo fundamental de X es isomorfo al grupo abeliano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.



Figure 17.13: Una curva anudada.

Ejercicios

1. Calcule el grupo fundamental del espacio que se obtiene al retirar n puntos de $\mathbb{R}^2$.
2. Calcule el grupo fundamental del espacio que se obtiene al pegar n círculos por un punto.
3. Probar que la esfera S^n es simplemente conexa, para $n \geq 2$.
4. Cuantos tipos de homotopía de espacios diferentes pueden obtenerse pegando un disco al plano proyectivo?
5. Calcule el grupo fundamental del espacio que se obtiene al retirar de $\mathbb{R}^3$ dos círculos no entrelazados.
6. Utilice el resultado anterior para probar que no existe un homeomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en sí mismo que lleve dos círculos entrelazados en dos círculos no entrelazados.
7. Calcule el grupo fundamental del complemento en $\mathbb{R}^3$ de una curva que se extiende infinitamente en ambas direcciones y está anudada como muestra la Figura 17.13.
8. Calcule el grupo fundamental del complemento de una esfera (bidimensional) en $\mathbb{R}^4$.

Chapter 18

Recubrimientos

Sea $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ una función continua epiyectiva. Diremos que ϕ es un recubrimiento (o una función recubridora) si para cada punto x en X existe una vecindad abierta V de x cuya preimagen $\phi^{-1}(V)$ es una unión disjunta de abiertos $\bigcup_{i \in I} V_i$, tal que la restricción de ϕ a cada V_i es un homeomorfismo entre V_i y V (ver Fig. 18.1). En particular, toda función recubridora es abierta.

En general, a una vecindad V de x con esta propiedad, es decir tal que su pre-imágen tiene la forma $\phi^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} V_i$, donde cada restricción $\phi|_{V_i}$ es un homeomorfismo, le llamaremos una vecindad trivialmente recubierta. Así, en un recubrimiento, todo punto tiene, al menos, una vecindad trivialmente recubierta.

Un recubrimiento $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ se dice conexo si $\tilde{X}$ es conexo. Esto implica que también X es conexo.

Proposición 18.1. *Sea X un espacio localmente conexo y sea $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento. Para cada componente arco-conexa $C \subseteq X$, la imagen $\phi(C)$ es a la vez abierta y cerrada.*

Demostración Sea $x \in X$, y sea V una vecindad trivialmente recubierta de x . Tomando una sub-vecindad de ser necesario, podemos suponer que V es conexa, por lo que cada conjunto V_i , es una componente conexa de $\phi^{-1}(V)$. Si $x \in \phi(C)$, algún V_i debe intersectar a C , y por lo tanto debe estar contenido en C por ser conexo. Se sigue que $V \subseteq \phi(C)$, por lo que x es un punto interior de $\phi(C)$. Como $x \in \phi(C)$ es arbitrario, esto prueba que $\phi(C)$ es abierto. Por otro lado, si $x \notin \phi(C)$, ninguno de los conjuntos V_i puede

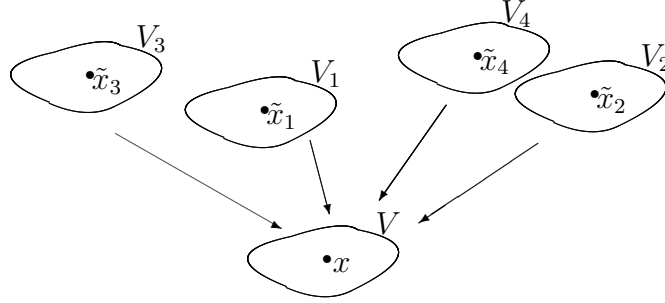


Figure 18.1: Una vecindad trivialmente recubierta.

cortar a $\phi(C)$ por el argumento precedente, luego la vecindad V está en el complemento de $\phi(C)$, por lo que x no puede ser un punto límite de $\phi(C)$. Se concluye que $\phi(C)$ es cerrado. $\square$

Obsérvese que cada pre-imagen V_i de V es un abierto, y por lo tanto una vecindad de alguna pre-imagen $\tilde{x}_i$ de x . Como todo elemento de $\tilde{X}$ es una pre-imagen de algún elemento de X , concluimos que, si X es localmente conexo, también $\tilde{X}$ lo es.

Corolario 18.1.1. *Si X es un espacio conexo y localmente conexo, para todo recubrimiento $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$, El espacio $\tilde{X}$ es un coproducto de espacios conexos, cada uno de los cuales recubre a X .*

Por esta razón, la teoría de recubrimientos se reduce a menudo al caso conexo.

definición 18.2. Sea $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento, y sea $f : Y \rightarrow X$ una función continua. Un levantamiento de f a $\tilde{X}$ es una función continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $f = \phi \circ \tilde{f}$. Observemos también que si f tiene un levantamiento a $\tilde{X}$, también lo tiene cualquier restricción de f .

Un problema importante que nos ocupará en este capítulo será determinar cuando existe un levantamiento, de una función dada, a un espacio arbitrario que recubre su recorrido.

ejemplo 18.3. Si Y es un espacio discreto, entonces la primera proyección $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ es un recubrimiento para todo espacio topológico X (ver Fig.

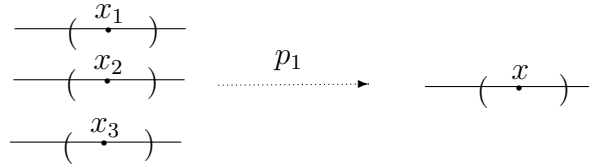


Figure 18.2: En un producto con un factor discreto, todo el espacio es trivialmente recubierto.

18.2). Más aún, en este caso, el espacio completo X es una vecindad trivialmente recubierta. Este recubrimiento no es conexo si Y contiene mas de un punto. Si X es conexo, las componentes conexas de $X \times Y$ son conjuntos de la forma $X \times \{y\}$ con $y \in Y$. Este ejemplo se interpreta como un recubrimiento trivial. Cada función continua $f : Z \rightarrow X$ se levanta a $X \times Y$. De hecho existe un recubrimiento $f_y(z) = (f(x), y)$ para cada elemento $y \in Y$, y todo recubrimiento tiene esa forma.

ejemplo 18.4. Para todo número natural n , la función $f_n : S^1 \rightarrow S^1$ definida por $f_n(z) = z^n$ es un recubrimiento conexo. Por ejemplo, para $n = 4$, un punto arbitrario del círculo, distinto de $(1, 0)$ tiene una pre-imágen en cada cuadrante (ver Fig. 18.3.A).

ejemplo 18.5. La función $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $E(r) = e^{2\pi ir}$ es un recubrimiento conexo (ver Fig. 18.3.B). De hecho, en un capítulo anterior ya definimos la noción de levantamiento en este caso particular. La nueva definición es cosistente con la antigua. Veremos más adelante que algunas propiedades de los levantamientos del círculo a $\mathbb{R}$, correctamente interpretados, se extienden al caso general.

No es difícil ver que existen funciones de ciertos espacios topológicos a S^1 que no pueden ser lavantadas a los recubrimientos descritos en los dos ejemplos anteriores. De hecho, la función identidad de S^1 en si mismo tiene esta propiedad.

En los resultados que siguen supondremos siempre que $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento y que $\tilde{X}$ y X son espacios de Hausdorff.

Lema 18.6. Sea Y un espacio conexo y sea $f : Y \rightarrow X$ una función continua. sean g y h levantamientos de f a $\tilde{X}$. Si $g(y_0) = h(y_0)$ para algún $y_0 \in Y$, entonces $g(y) = h(y)$ para algún $y \in Y$.

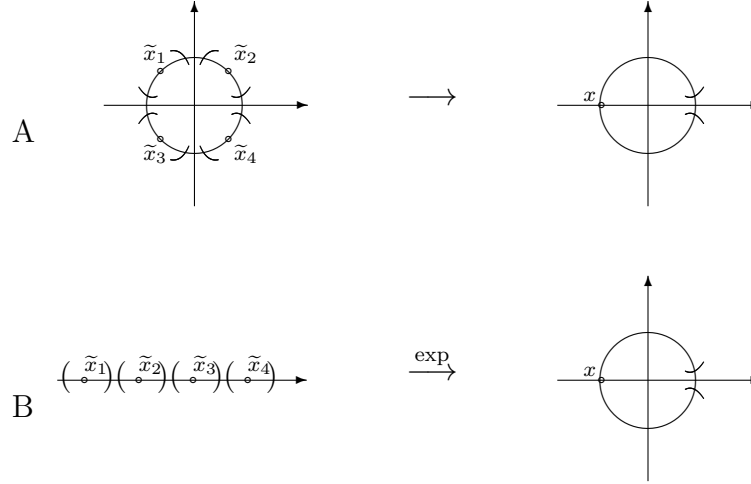


Figure 18.3: Dos recubrimiento conexos del círculo.

Demostración Sea $A = \{y \in Y | g(y) = h(y)\}$. Basta ver que A es abierto y cerrado. Es cerrado por ser la preimagen de la diagonal bajo la función continua $y \mapsto (g(y), h(y))$. Para ver que es abierto observamos que si $\tilde{x}_0 = g(y_0) = h(y_0)$ y si x_0 es su imagen en x , entonces existe una vecindad V de x_0 cuya preimagen en $\tilde{X}$ es una unión disjunta de abiertos $\bigcup_{i \in I} V_i$, tal que la restricción de ϕ a cada V_i es un homeomorfismo entre V_i y V . En particular, si $\tilde{x}_0 \in V_i$ entonces existe una vecindad U de y_0 tal que $g(U) \subseteq V_i$ y $h(U) \subseteq V_i$. Como cada punto de V tiene exactamente una pre-imagen en V_i , se tiene que $g(y) = h(y)$ para todo $y \in U$ y el resultado sigue. $\square$

Lema 18.7. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ una función continua. Sea c un punto del intervalo $]a, b[$. Entonces existe un intervalo cerrado J que contiene a c en su interior, tal que para todo $d \in J$ y todo $\tilde{x} \in \phi^{-1}(\alpha(d))$, existe un levantamiento $\tilde{\alpha}$ de la restricción de α a J que satisface $\tilde{\alpha}(d) = \tilde{x}$.

Demostración Sea V una vecindad de $\alpha(c)$ cuya preimagen en $\tilde{X}$ es una unión disjunta de abiertos $\bigcup_{i \in I} V_i$, tal que la restricción de ϕ a cada V_i es un homeomorfismo entre V_i y V . Supongamos que $\tilde{x} \in V_i$ y sea ψ la restricción de ϕ a V_i . Sea J un intervalo que con c en su interior tal que

$\alpha(J) \subseteq V$. Entonces podemos definir $\tilde{\alpha}(t) = \psi^{-1}(\alpha(t))$ para todo $t \in J$. $\square$

Lema 18.8. Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ una función continua. Sea c un punto de $]a, b[$. Sea α_1 la restricción de α a $[a, c]$ y sea α_2 la restricción de α a $[c, b]$. Si α_1 y α_2 tienen levantamientos $\tilde{\alpha}_1$ y $\tilde{\alpha}_2$ a $\tilde{X}$ que satisfacen $\tilde{\alpha}_1(c) = \tilde{\alpha}_2(c)$ entonces también α tiene un levantamiento a $\tilde{X}$.

Demostración Basta ver que $\tilde{\alpha} : [a, b] \rightarrow \tilde{X}$ definida mediante

$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_1(t) & \text{si } a \leq t \leq c \\ \tilde{\alpha}_2(t) & \text{si } c \leq t \leq b \end{cases}$$

es continua, lo que sigue del lema 10.6. $\square$

Proposición 18.9. Sea $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento, y sea $\alpha : I \rightarrow X$ una curva tal que $\alpha(0) = x$. Para cada preimagen $\tilde{x}$ de x existe un único levantamiento $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$.

Demostración Sea A el conjunto de los elementos $s \in [0, 1]$ tales que la restricción de α a $[0, s]$ tiene un levantamiento a $\tilde{X}$. Claramente $0 \in A$ y A es un intervalo ya que si la restricción de α a $[0, t]$ tiene un levantamiento, con mayor razón la restricción de α a $[0, s]$ tiene un levantamiento para $s < t$. Sea a el supremo de A y supongamos $a < 1$. Existe un intervalo $[b, c]$ con $b < a < c$ para el cual la restricción de α a $[b, c]$ tiene un levantamiento con cualquier extremo inicial en $\phi^{-1}(\alpha(b))$. Entonces $b \in A$ luego la restricción de α a $[0, b]$ tiene un levantamiento. Se sigue que la restricción de α a $[0, c]$ tiene un levantamiento, lo que contradice la elección de a . Se sigue que $a = 1$, de donde la restricción de α a $[0, u]$ tiene un levantamiento para todo $u < 1$. Existe un intervalo $[b, 1]$ tal que la restricción de α a $[b, 1]$ tiene un levantamiento con cualquier extremo inicial en $\phi^{-1}(\alpha(b))$. Como la restricción de α a $[0, b]$ tiene un levantamiento, el resultado sigue como antes. La unicidad sigue del Lema 18.6. $\square$

En particular, si se introduce la notación

$$C_{x,?}(I, X) = \{\alpha \in C(I, X) \mid \alpha(0) = x\},$$

entonces existe para cada pre-imagen $\tilde{x}$ de x , una función levantamiento bien definida

$$L : C_{x,?}(I, X) \rightarrow C_{\tilde{x},?}(I, \tilde{X}).$$

Proposición 18.10. *La función levantamiento es continua con respecto a la topología compacto-abierta.*

Demostración Sea α un camino en $C_{x,?}(I, X)$, y sea $\{\alpha_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red de caminos en $C_{x,?}(I, X)$ que convergen a α en la topología compacto-abierta. Sea C un subconjunto compacto de I y sea U un abierto de $\tilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(C) \subseteq U$. Basta probar que los levantamientos $\tilde{\alpha}_\lambda$ de cada α_λ satisfacen $\tilde{\alpha}_\lambda \in \mathcal{O}_{C,U}$ para λ suficientemente grande. Para cada punto x en X existe una vecindad abierta V_x de x cuya preimagen $\phi^{-1}(V_x)$ es una unión disjunta de abiertos $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} V_{x,i}$, tal que la restricción de ϕ a cada $V_{x,i}$ es un homeomorfismo entre $V_{x,i}$ y V_x . Para cada $t \in I$ existe una vecindad compacta y conexa J_t de t tal que $\alpha(J_t) \subseteq V_{\alpha(t)}$. Remplazando J_t por un intervalo menor si es necesario puede suponerse que J_t no intersecta a C si $t \notin C$ y que $\tilde{\alpha}(J_t) \subseteq U$ si $t \in C$. Como los interiores de los intervalos J_t recubren I existe una subcolección finita $\{J_{t_1}, \dots, J_{t_r}\}$ que también lo hace. Reordenando, podemos suponer que $0 \in J_{t_1}$. Si 1 no pertenece al interior de J_1 , debe haber algún intervalo cuyo interior corte a J_1 pero no esté contenido en J_1 (pues I es conexo). Llamemos a este intervalo J_2 . Iterando, podemos suponer que cada J_{t_i} intersecta no trivialmente a $J_{t_{i+1}}$ y que $1 \in J_{t_r}$.

Para λ suficientemente grande, se tiene $\alpha_\lambda(J_{t_j}) \subseteq V_{\alpha(t_j)}$ para todo $j = 1, \dots, r$. Como cada J_t es un intervalo, es conexo, por lo que cada conjunto conexo $\tilde{\alpha}(J_{t_j})$ está contenido en un único entorno $V_{\alpha(t_j), i(j)}$. Este podría en principio ser o no el mismo que el conjunto $V_{\alpha(t_j), i(j, \lambda)}$ que contiene a $\tilde{\alpha}_\lambda(J_{t_j})$. Para cada λ sea M_λ el conjunto de aquellos elementos $j \in \{1, \dots, r\}$ tales que $i(j) = i(j, \lambda)$. Nótese que como $J_{t_j} \cap J_{t_{j+1}}$ es no vacía, la condición anterior para λ implica que si $i(j) = i(j, \lambda)$, entonces $i(j+1) = i(j+1, \lambda)$ pues el subconjunto $\alpha_\lambda(J_{t_j} \cap J_{t_{j+1}})$ debe estar contenido en $V_{\alpha(t_j)} \cap V_{\alpha(t_{j+1})}$ y por lo tanto si los levantamientos de α y α_λ están en la misma preimagen en J_{t_j} , lo mismo debe suceder en $J_{t_{j+1}}$. Se sigue que $i(j) = i(j, \lambda)$ para todo j .

Observese que los intervalos de la forma J_{t_i} con $t_i \in C$ recubren C (pues los restantes no intersectan C), de modo que todo $t \in C$ está en alguno de estos intervalos, digamos J_{t_i} , y se tiene por hipótesis $\tilde{\alpha}(J_i) \subseteq U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)}$. En consecuencia, $\alpha(J_i) \subseteq \phi(U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)})$, donde el último conjunto es abierto por ser ϕ abierta. Se concluye que para λ suficientemente grande $\alpha_\lambda(J_i) \subseteq \phi(U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)})$ y por lo tanto $\tilde{\alpha}_\lambda(J_i) \subseteq U \cap V_{\alpha(t_j), i(j)} \subseteq U$. $\square$

Corolario 18.10.1 (Lema del levantamiento de homotopías). *Levantamientos de caminos homotópicos con el mismo punto inicial son homotópicos. En*

particular, tienen el mismo punto final.

Demostración Una homotopía de extremos fijos entre dos curvas β y γ es una función continua $H : I^2 \rightarrow X$ con $H(0, t) = x$ y $H(1, t)$ constante, tal que $H(s, 0) = \beta(s)$ y $H(s, 1) = \gamma(s)$. La función $\alpha : I \rightarrow C_{x,?}(I, X)$ definida por $\alpha(t)(s) = H(s, t)$ es una curva tal que $\alpha(0) = \beta$ y $\alpha(1) = \gamma$. sea $\tilde{\alpha} = L \circ \alpha$. Entonces $\tilde{H}(s, t) = \tilde{\alpha}(t)(s)$ define una homotopía entre los levantamientos de β y γ . Basta ver que es una homotopía de extremos fijos. Obsérvese que la imagen en X de $\tilde{H}(1, t)$ es $H(1, t)$, que es constante. En otras palabras $\tilde{H}(1, t)$ es un levantamiento de una curva constante. Se sigue que $\tilde{H}(1, t)$ es constante por la unicidad del levantamiento. $\square$

Corolario 18.10.2. Sea $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ un recubrimiento, y sea $x_0 = \phi(\tilde{x}_0)$. Entonces existe una acción de $\Pi_{x_0}(X)$ en $\phi^{-1}(x_0)$ tal que para cada punto $\hat{x}_0 \in \phi^{-1}(x_0)$ y cada clase $a = [\alpha] \in \Pi_{x_0}(X)$ se tiene $a \cdot \hat{x}_0 = \tilde{\alpha}(1)$ donde $\tilde{\alpha}$ es el levantamiento de α que satisface $\tilde{\alpha}(0) = \hat{x}_0$. El estabilizador de $\tilde{x}_0$ bajo esta acción es el grupo $\phi_*[\Pi_{\tilde{x}_0}(\tilde{X})]$. $\square$

Lema 18.11. Si $\mathfrak{B}$ es una base de vecindades de y en Y , y si para cada $B \in \mathfrak{B}$ tenemos un camino $\gamma_B : I \rightarrow B$, entonces la red $\{\gamma_B\}_{B \in \mathfrak{B}}$ converge a c_y , la función constante dada por $c_y(t) = y$ para todo $t \in I$, en la topología compacto-abierta de $C(I, Y)$.

Demostración Sea C un subconjunto compacto de I , y sea U un abierto en Y , tales que $c_y \in \mathcal{O}_{C,U}$. Si C es no vacío, esto significa $y \in U$. Luego existe $B_0 \in \mathfrak{B}$ tal que $B_0 \subseteq U$, por lo que para $B \subseteq B_0$ se tiene $\gamma_B(C) \subseteq B \subseteq B_0 \subseteq U$. $\square$

Proposición 18.12. Sea Y un espacio simplemente conexo y localmente arco-conexo. Si $f : Y \rightarrow X$ es continua, entonces existe un levantamiento de f a $\tilde{X}$. Mas aún, si se escogen puntos $x \in X$, $y \in Y$ y $\tilde{x} \in \tilde{X}$, tales que $\phi(\tilde{x}) = \psi(y) = x$, entonces puede suponerse que $\lambda(y) = \tilde{x}$.

Demostración Sea y_0 un punto arbitrario fijo de Y y sea $x_0 = f(y_0) \in X$. Escogemos $\tilde{x}_0 \in \phi^{-1}(x_0)$. Sea $y \in Y$ un punto arbitrario. Sea α un camino que une y_0 con y , y sea β el único levantamiento de $f \circ \alpha$ que satisface $\beta(0) = \tilde{x}_0$. Entonces definimos $\tilde{f}(y) = \beta(1)$. Esta definición no depende de la elección de α ya que si α' es otro camino que une y_0 con y , entonces existe una

homotopía de extremos fijos entre α y α' , por lo que existe una homotopía de extremos fijos entre β y el levantamiento β' de $f \circ \alpha'$. Basta probar que $\tilde{f}$ así definida es continua. Para ello, sea $\mathfrak{B}$ una base de vecindades arco-conexas de y en Y . Basta probar que si $\{y_B\}_{B \in \mathfrak{B}}$ una red que satisface $y_B \in B$ para cada $B \in \mathfrak{B}$, entonces $\tilde{f}(y_B) \rightarrow \tilde{f}(y)$. Por la hipótesis en $\mathfrak{B}$, para cada $B \in \mathfrak{B}$, existe un camino $\gamma_B : [0, 1] \rightarrow B$ que une y con y_B . Entonces $\alpha * \gamma_B$ es un camino que une y_0 con y_B , el cual podemos usar para calcular $\tilde{f}(y_B)$. Por el Lema 18.11, el camino $\alpha * \gamma_B$ converge, en la topología compacto-abierta, a $\alpha * c_y$, donde c_y es el camino constante en y . Recuerdese que la función $\alpha \mapsto f \circ \alpha$ (por Lema 13.13), la función levantamiento, y la función $\beta \mapsto \beta(1)$ (por Lema 13.9) son continuas. Se sigue que

$$\begin{aligned} \alpha * \gamma_B &\xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} \alpha * c_y \Rightarrow f \circ (\alpha * \gamma_B) \xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} f \circ (\alpha * c_y) \Rightarrow \\ &f \circ \widetilde{(\alpha * \gamma_B)} \xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} f \circ \widetilde{(\alpha * c_y)} \Rightarrow f \circ \widetilde{(\alpha * \gamma_B)}(1) \xrightarrow{B \in \mathfrak{B}} f \circ \widetilde{(\alpha * c_y)}(1), \end{aligned}$$

y la última convergencia es por definición $\tilde{f}(y_B) \rightarrow \tilde{f}(y)$. $\square$

En particular, se sigue que si un espacio localmente arco-conexo X tiene un recubrimiento $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ con $\tilde{X}$ simplemente conexo, entonces para cualquier otro recubrimiento $\psi : Y \rightarrow X$ existe una función continua $\lambda : \tilde{X} \rightarrow Y$ tal que $\phi = \psi \circ \lambda$. Mas aún, si se escogen puntos $x \in X$, $y \in Y$ y $\tilde{x} \in \tilde{X}$, tales que $\phi(\tilde{x}) = \psi(y) = x$, puede suponerse que $\lambda(\tilde{x}) = y$. De hecho puede decirse aún más:

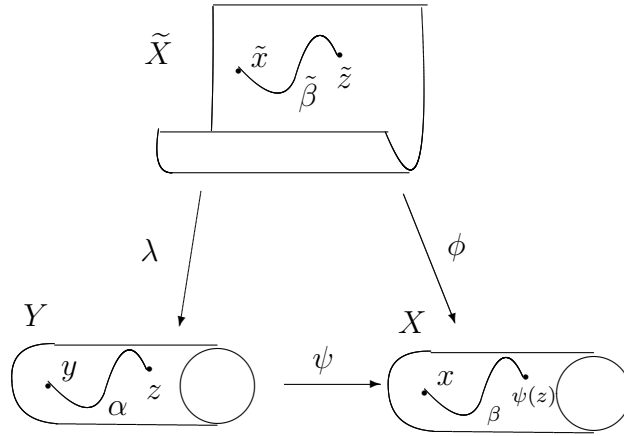
Proposición 18.13. *si un espacio localmente arco-conexo X tiene un recubrimiento $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ con $\tilde{X}$ conexo y simplemente conexo, entonces para cualquier otro recubrimiento $\psi : Y \rightarrow X$ existe una única función recubridora $\lambda : \tilde{X} \rightarrow Y$ tal que $\phi = \psi \circ \lambda$. Mas aún, si se escogen puntos $x \in X$, $y \in Y$ y $\tilde{x} \in \tilde{X}$, tales que $\phi(\tilde{x}) = \psi(y) = x$, puede suponerse que $\lambda(\tilde{x}) = y$. Bajo estas condiciones, el recubrimiento λ es único.*

Demostración Por definición de recubrimiento, para cada punto x de X existe una vecindad V que cumple las siguientes condiciones:

1. V es arco-conexa.
2. La pre-imagen de V en $\tilde{X}$ es una unión disjunta de abiertos V_i tal que la restricción de ϕ a cada V_i es un homeomorfismo.

3. La pre-imagen de V en Y es una unión disjunta de abiertos W_j tal que la restricción de ψ a cada W_j es un homeomorfismo.

Si λ es epimorfismo, la condición de conexidad implica que la imagen bajo λ de cada V_i es un único W_j , y λ es un homeomorfismo en V_i ya que ϕ y ψ lo son. Basta por lo tanto probar la epiyectividad de λ . Sea $z \in Y$ un punto arbitrario. Basta probar que z está en la imagen de λ . Para ello tomamos una curva α que une y con z y sea $\beta = \psi \circ \alpha$. Sea $\tilde{\beta}$ un levantamiento de β . Entonces α y $\lambda \circ \tilde{\beta}$ son levantamientos de β a Y con punto inicial y . Se sigue que $\alpha = \lambda \circ \tilde{\beta}$ por la unicidad del levantamiento. En particular $z = \lambda[\tilde{\beta}(1)]$. $\square$



Corolario 18.13.1. Si un espacio localmente arco-conexo X tiene dos recubrimientos $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ y $\psi : \hat{X} \rightarrow X$, con $\tilde{X}$ y $\hat{X}$ simplemente conexos, entonces existe un homeomorfismo $\lambda : \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ tal que $\phi = \psi \circ \lambda$. $\square$

Por la razón anterior, si X es localmente arco-conexo, un recubrimiento $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ con $\tilde{X}$ simplemente conexo se denomina un recubrimiento universal de X . Estudiaremos ahora las condiciones bajo las cuales un tal recubrimiento universal existe.

Corolario 18.13.2. Sea X un espacio con recubrimiento universal y si $\psi : Y \rightarrow X$ es un recubrimiento, entonces Y tiene un recubrimiento universal y es homeomorfo al recubrimiento universal de X . $\square$

definición 18.14. Un espacio X se dice semilocalmente simplemente conexo si cada punto x de X tiene una base de vecindades B tales que todo camino cerrado contenido en B es homotópico a un camino constante en X (pero no necesariamente en B). Nótese que es suficiente que cada punto tenga una vecindad de este tipo.

Proposición 18.15. *Si un espacio localmente arco-conexo X tiene un recubrimiento universal, entonces X es un espacio semilocalmente simplemente conexo X .*

Demostración Sea $x \in X$ un punto arbitrario. Por definición de recubrimiento, existe una vecindad V de x en X que es la imagen homeomorfa de un subconjunto U del recubrimiento universal $\tilde{X}$. Toda curva cerrada α en V es la imagen de una curva cerrada $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{X}$ y es por lo tanto homotópica a una curva constante. $\square$

Proposición 18.16. *En un espacio localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo X , las componentes conexas de $C_{x,y}(I, X)$ son abiertas.*

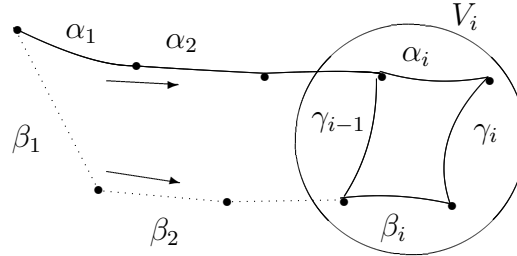
Demostración Sea α una curva que une x con y . Afirmamos que existe una partición $0 = t_0, t_1, \dots, t_r = 1$ del intervalo I tal que para cada sub-intervalo $I_i = [t_{i-1}, t_i]$, su imagen $\alpha(I_i)$ está contenida en un abierto arco-conexo V_i tal que todo camino cerrado contenido en V_i es homotópico a un camino constante en X . Nótese que para cada i existe una vecindad arco-conexa W_i de $\alpha(t_i)$ contenida en $V_i \cap V_{i+1}$. Afirmamos también que si β satisface:

1. $\beta(I_i) \subseteq V_i$ para $i = 1, \dots, r$,
2. $\beta(t_i) \in W_i$ para $i = 1, \dots, r$,

entonces β es homotópico a α . Esto termina la prueba pues las condiciones impuestas a β determinan una vecindad abierta de α en la topología compacto-abierta.

Para probar la última afirmación observamos que α es homotópico a $\alpha_1 * \dots * \alpha_r$ donde α_i es una reparametrización de la restricción de α al intervalo I_i . Del mismo modo β es homotópico a $\beta_1 * \dots * \beta_r$ donde β_i es una reparametrización de la restricción de β al intervalo I_i . Sea γ_i un camino en W_i que une $\beta(t_i)$ con $\alpha(t_i)$. Basta probar por inducción que $\alpha_1 * \dots * \alpha_i$ es

homotópico a $\beta_1 * \dots * \beta_i * \gamma_i$, utilizando el hecho de que $\gamma_{i-1}^{\text{op}} * \beta_i * \gamma_i * \alpha_i^{\text{op}}$ es un camino cerrado en V_i y es por lo tanto homotópicamente trivial.



Para probar la existencia de la partición, observamos que para cada $x \in X$ existe una vecindad arco-conexa V_x tal que todo camino cerrado contenido en B es homotópico a un camino constante en X . Para cada $t \in I$, sea J_t una vecindad compacta y conexa (es decir un intervalo cerrado) de t en I tal que $\alpha(J_t)$ está contenido en el interior de $V_{\alpha(t)}$. Como los intervalos abiertos $\text{int}(J_t)$ recubren I , existe un sub-recubrimiento finito $\{\text{int}(J_{t_1}), \text{int}(J_{t_2}), \dots, \text{int}(J_{t_r})\}$ que recubre I . Los extremos de estos intervalos forman una partición con las propiedades requeridas. $\square$

Proposición 18.17. *Un espacio conexo, localmente arco-conexo y semilocalmente simplemente conexo tiene un recubrimiento universal.*

Demostración Definimos el espacio $\tilde{X}$ como el espacio de identificación $C_{x_0,?}(I, X)/\sim$, donde $\alpha \sim \beta$ quiere decir que existe una homotopía de extremos fijos entre α y β . La función $\phi : \tilde{X} \rightarrow X$ is defined by $\phi[\alpha] = \alpha(1)$. Esta función es epiyectiva ya que X es arco-conexo, y es continua por Lema 13.9. Sea $x \in X$, y sea V una vecindad arco-conexa de x en X tal que todo camino cerrado contenido en V es homotópico a un camino constante en X . Sea α un camino de x_0 a x , y sea W_α la imagen en $\tilde{X}$ del conjunto de caminos de la forma $\alpha * \beta$ donde β es un camino contenido en V . Si γ es un camino que une x_0 con algún punto $z \in V$, entonces existe un camino δ en V que une x con z . Se sigue que $[\gamma] = [(\gamma * \delta^{\text{op}}) * \delta]$, por lo que la pre-imagen en $\tilde{X}$ de V es la unión de los conjuntos W_α donde $[\alpha]$ recorre el conjunto de clases de homotopía de caminos de x_0 a x . Afirmamos que cada conjunto W_α es abierto y que la restricción de ϕ a W_α es un homeomorfismo. Esto prueba que ϕ es una función recubridora.

Para ver que W_α es abierto, basta ver que su pre-imagen en $C_{x_0,?}(I, X)$ lo es. Sea $\{\beta_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red que converge a un elemento β de W_α . Si γ_λ es un camino que une $\beta_\lambda(1)$ con $\beta(1) = z$ y está contenido en V , entonces $\beta_\lambda * \gamma_\lambda$ converge a $\beta * c_z$, donde c_z es el camino constante en z . Se sigue del lema precedente que para λ suficientemente grande los caminos $\beta_\lambda * \gamma_\lambda$ y $\beta * c_z$ son homotópicos, por lo que β_λ es homotópico a $\beta * \gamma_\lambda^{\text{op}}$. Por definición $[\beta] \in W_\alpha$ significa que β es homotópico a un camino de la forma $\alpha * \delta$ con $\delta : I \rightarrow V$. Se sigue que β_λ es homotópico a $(\alpha * \delta) * \gamma_\lambda^{\text{op}}$ de donde se obtiene $[\beta_\lambda] \in W_\alpha$.

La restricción de ϕ a W_α es uno a uno, ya que los elementos de W_α son de la forma $[\alpha * \gamma]$ con $\gamma : I \rightarrow V$, y para cada par de curvas en V con los mismos extremos existe una homotopía de extremos fijos entre ellas. Se sigue que para demostrar que la restricción de ϕ a W_α es un homeomorfismo, basta ver que es bicontinua. Sea $\{y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una red que converge a y en V . Basta ver que podemos escoger caminos de la forma $\alpha * \gamma_\lambda$ con $\gamma_\lambda : I \rightarrow V$ uniendo x con y_λ y $\alpha * \gamma$ con $\gamma : I \rightarrow V$ uniendo x con y , tales que $\alpha * \gamma_\lambda \rightarrow \alpha * \gamma$, puesto que esto implica $[\alpha * \gamma_\lambda] \rightarrow [\alpha * \gamma]$. Para ver que tales caminos existen, observamos que si δ es cualquier camino en V que une x con y y si cada μ_λ es un camino en V que une y con y_λ , entonces $\alpha * (\delta * \mu_\lambda)$ converge a $\alpha * (\delta * c_y)$. Se sigue que podemos tomar $\gamma = \delta * c_y$ y $\gamma_\lambda = \delta * \mu_\lambda$.

Finalmente, probaremos que $\tilde{X}$ es simplemente conexo. Para ello, sea $\tilde{\alpha}$ una curva cerrada con base en $[c_{x_0}]$ y sea α su imagen en x . Entonces α es una curva cerrada con base en x_0 . Afirmamos que $[\alpha] = [c_{x_0}]$ como elementos de $\tilde{X}$, es decir que α es homotópicamente trivial. Esto implica que su levantamiento $\tilde{\alpha}$ también lo es, de donde sigue el resultado. Para ello basta ver que si α_s denota el camino $\alpha_s(t) = \alpha(st)$, entonces $\tilde{\alpha}(s) = [\alpha_s]$. Esta última afirmación es trivial si $s = 0$ y la imagen de ambos lados es $\alpha(s) = \alpha_s(1)$, por lo que la afirmación sigue de la unicidad del levantamiento. Concluimos que $[c_{x_0}] = \tilde{\alpha}(1) = [\alpha]$ como se afirmaba. $\square$

De la demostración anterior se obtiene también el siguiente resultado. Los detalles se dejan al lector.

Proposición 18.18. *Sea X un espacio con recubrimiento universal y sea $\psi : Y \rightarrow X$ un recubrimiento. Sea $x \in X$ y sea V una vecindad abierta de x tal que cada curva cerrada en V es homotópicamente trivial en X , entonces la pre-imagen de V es una unión de abiertos U_α de Y , cada uno de los cuales es homeomorfo a V .* $\square$

Dejamos también al lector la demostración del corollario siguiente.

Corolario 18.18.1. *Si el espacio X tiene un recubrimiento universal, y si $\psi : Y \rightarrow X$ y $\rho : Z \rightarrow Y$ son recubrimientos, entonces $\psi \circ \rho : Z \rightarrow X$ es un recubrimiento.* $\square$

Chapter 19

Acciones propiamente discontinuas

Sea G un grupo que actúa continuamente en un espacio topológico X (esto quiere decir que para cada $g \in G$ la función $x \mapsto g \cdot x$ es continua, no se supone que G tenga una topología, o si la tiene, que la función $f(g, x) = g \cdot x$ sea continua en g). Diremos que la acción es propiamente discontinua si para todo $x \in X$ existe una vecindad U tal que para todo $g \in G$ se tiene $U \cap g \cdot U = \emptyset$. Nótese que la condición implica $g_1 \cdot U \cap g_2 \cdot U = \emptyset$ para cada par de elementos distintos g_1 y g_2 de G . En particular, una acción propiamente discontinua carece de puntos fijos.

ejemplo 19.1. El espacio proyectivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ se define como el cociente de la esfera S^2 por la acción del grupo cíclico $C_2 = \langle \sigma \rangle$ definida por $\sigma(x) = -x$.

ejemplo 19.2. Sea G un grupo topológico conexo y sea H un subgrupo discreto. El subgrupo H actúa en G por multiplicación a izquierda (o a derecha). Como H es discreto, debe existir una vecindad V de la identidad e de G que no contiene elementos de H distintos de e . Por la continuidad de las operaciones de grupo existe una vecindad U de e tal que UU^{-1} está contenido en V y por lo tanto $U \cap hU = \emptyset$ para todo $h \in H$ distinto de e .

El siguiente resultado es inmediato de las definiciones:

Proposición 19.3. *Si la acción de G en X es propiamente discontinua, y si H es un subgrupo de G entonces la acción de H en X es propiamente discontinua.* $\square$

Proposición 19.4. *Si la acción de G en X es propiamente discontinua, y si N es un subgrupo normal de G entonces la acción de G/N en X/N es propiamente discontinua. En particular el cociente $(X/N)/(G/N)$ es homeomorfo a X/G .*

Demostración Sea x un punto en X y sea $\bar{x}$ su imagen en el espacio cociente X/G . Sea U una vecindad abierta de x tal que para todo $g \in G$ se tiene $U \cap g \cdot U = \emptyset$. Entonces si $\tilde{U}$ es la imagen de U en X/G , su preimagen en X es $\bigcup_{g \in G} g \cdot U$, es una unión disjunta de abiertos. En el cociente X/N se identifican las vecindades gU y $ngU = gn'U$, con $n, n' \in N$, es decir se identifican las vecindades que corresponden a elementos en una misma clase lateral. Como las clases laterales en G/N no se intersectan, tampoco lo hacen las imágenes en X/N de los conjuntos de la forma $\bigcup_{n \in N} ng \cdot U$, y la unión de estos conjuntos es la pre-imagen de U . La última afirmación sigue del corolario 5.16.1 $\square$

Proposición 19.5. *Si la acción de G en X es propiamente discontinua, entonces la proyección canónica de X en el espacio cociente X/G es un recubrimiento.*

Demostración Sea x un punto en X y sea $\bar{x}$ su imagen en el espacio cociente X/G . Sea U una vecindad abierta de x tal que para todo $g \in G$ se tiene $U \cap g \cdot U = \emptyset$. Entonces si $\tilde{U}$ es la imagen de U en X/G , su preimagen en X es $\bigcup_{g \in G} g \cdot U$, que es abierto y por lo tanto $\tilde{U}$ es una vecindad abierta de $\bar{x}$. Por otro lado, como $\bigcup_{g \in G} g \cdot U$ es una unión disjunta de vecindades abiertas, cada una homeomorfa a U , entonces existe un homeomorfismo

$$\phi : \bigcup_{g \in G} g \cdot U \rightarrow G \times U$$

definido por $\phi(gu) = (g, u)$. Bajo esta identificación se tiene $h \cdot (g, u) = (hg, u)$, de donde el espacio cociente $\tilde{U}$ es homeomorfo a cada $g \cdot U$ mediante $gu \mapsto \bar{u}$. El resultado sigue. $\square$

Lema 19.6. *Si la acción de G en X es propiamente discontinua, y si una curva cerrada α en X/G tiene un levantamiento cerrado a X entonces cada levantamiento de α a X es cerrado.*

Demostración Sea α una curva cerrada en X con extremos en x_0 . Entonces todo levantamiento de su imagen $p \circ \alpha$ es de la forma $t \mapsto g \cdot \alpha(t)$, luego es cerrado. $\square$

Proposición 19.7. *Si la acción de G en X es propiamente discontinua, y si $p : X \rightarrow X/G$ es la proyección canónica entonces la imagen $p_*[\Pi_{x_0}(X)]$ del grupo fundamental de X es normal en $\Pi_{p(x_0)}(X/G)$.*

Demostración Sea α una curva cerrada en X con extremos en x_0 , y sea β una curva cerrada en X/G con extremos en $p(x_0)$. Entonces, si $\tilde{\beta}$ es el levantamiento de β con punto inicial x_0 y α' es un levantamiento de $p \circ \alpha$ con extremos en $\tilde{\beta}(1)$ (que existe por el lema precedente), entonces $\tilde{\beta} * \alpha' * \tilde{\beta}^{\text{op}}$ es un camino cerrado con extremos en x_0 y su imagen en X/G corresponde al elemento $[\beta]p_*[\alpha][\beta]^{-1}$. $\square$

El siguiente ejemplo es fundamental en lo que sigue:

ejemplo 19.8. Si X es un espacio conexo, localmente conexo y semi-localmente simplemente conexo, el grupo fundamental $G = \Pi_x(X)$ de X actúa en el recubrimiento universal $\tilde{X}$ mediante $[\alpha][\gamma] = [\alpha * \gamma]$. Se sigue de la construcción explícita de $\tilde{X}$ y de la demostración de que es un recubrimiento que todo punto x de X tiene una vecindad V tal que la preimagen de V en $\tilde{X}$ es una unión de copias de V que corresponden a las distintas clases de homotopía de curvas de x a $y \in V$ y que dados dos puntos distintos y e y' en V , existe una correspondencia natural entre clases de homotopía de curvas de x a y con las clases de homotopía de curvas de x a y' dada por $[\alpha] \mapsto [\alpha * \epsilon]$ donde ϵ es un camino contenido en V . Se sigue de aquí que la acción de G en $\tilde{X}$ es propiamente discontinua. Nótese que si γ es un camino cerrado en X con extremos en x , se tiene $\beta(1) = \gamma * \beta(1)$, por lo que la función recubridora $p : \tilde{X} \rightarrow X$ induce una función continua epiyectiva $q : \tilde{X}/G \rightarrow X$, la que es abierta ya que p lo es (por ser una aplicación recubridora), e inyectiva pues $p[\beta_1] = p[\beta_2]$ si y sólo si $\beta_1(1) = \beta_2(1)$ por lo que $\beta_1 * \beta_2^{\text{op}}$ es un camino cerrado. Se sigue que q es un homeomorfismo, de modo que puede identificarse X con $\tilde{X}/G$.

Sea $\phi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ el recubrimiento universal de Y . Por la Proposición 18.13, para todo recubrimiento $q : X \rightarrow Y$, existe una función recubridora $\psi : \tilde{Y} \rightarrow X$ tal que $\phi = q \circ \psi$ y $\psi[c_y] = x$, donde c_y es el camino constante igual a y . Consideramos la acción definida en el ejemplo 19.8. Recordemos

que si α es un camino en Y con extremo inicial en y , su único levantamiento en $\tilde{Y}$ con extremo inicial en $[c_y]$ viene dado por $\tilde{\alpha}(t) = [\alpha_t]$, donde α_t es el camino definido por $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$. Se sigue que para todo camino α en Y con extremo inicial en y se tiene $\psi[\alpha] = \hat{\alpha}(1)$ donde $\hat{\alpha}$ es el levantamiento de α a X con extremo inicial en x .

Proposición 19.9. *Sea $q : X \rightarrow Y$ un recubrimiento. Sea $y = q(x)$ y sea $H = q_*[\Pi_x(X)] \subseteq G = \Pi_y(Y)$. Entonces existe un homeomorfismo $\psi' : \tilde{Y}/H \rightarrow X$ inducido por la función $\psi : \tilde{Y} \rightarrow X$.*

Demostración Dos elementos $[\beta_1]$ y $[\beta_2]$ en $\tilde{X}$ están en la misma H -órbita si y sólo si β_1 es homotópico a $(q \circ \gamma) * \beta_2$ para algún camino cerrado γ en X con extremos en x . Se sigue que si $\hat{\beta}_i$ es un levantamiento de β_i a X con extremo inicial en x , se tiene

$$\psi[\beta_1] = \hat{\beta}_1(1) = \gamma * \hat{\beta}_2(1) = \hat{\beta}_2(1) = \psi[\beta_2],$$

ya que γ es un camino cerrado. Se concluye que $\psi' : \tilde{Y}/H \rightarrow X$ está bien definida. Esta función es epiyectiva por ser X conexo (y por lo tanto arco-conexo), y abierta dado que ψ lo es (por ser una aplicación recubridora). Falta sólo ver que es inyectiva, lo que seguirá si probamos que $\psi[\beta_1] = \psi[\beta_2]$ implica que el levantamiento $\hat{\beta}_1$ a X es homotópico a un camino de la forma $\gamma * \hat{\beta}_2$ con γ cerrado en X , pero esto es inmediato ya que $\psi[\beta_1] = \psi[\beta_2]$ implica $\hat{\beta}_1(1) = \hat{\beta}_2(1)$ y por lo tanto $\hat{\beta}_1 * \hat{\beta}_2^{\text{op}}$ es un camino cerrado. $\square$

El resultado precedente puede re-interpretarse como sigue:

Cada recubrimiento de Y es isomorfo a un recubrimiento de la forma $\tilde{Y}/H \rightarrow Y$, donde Y es un subgrupo del grupo fundamental.

Nótese que existe una función continua $\phi : \tilde{Y}/H \rightarrow \tilde{Y}/K$ que conmuta con las funciones recubridoras si y sólo si $H \subseteq K$, de modo que existe una correspondencia entre recubrimientos de Y y subgrupos de su grupo fundamental análoga a la correspondencia entre subgrupos y subcuerpos que estudia la Teoría de Galois. Estamos ahora en condiciones de probar el inverso de la Proposición 19.7:

Proposición 19.10. *Supongamos que Y es conexo, localmente arco-conexo, y semi-localmente simplemente conexo. Sea $q : X \rightarrow Y$ un recubrimiento con*

X conexo. Si la imagen $q_[\Pi_x(X)]$ del grupo fundamental de X es normal en $\Pi_{q(x)}(Y)$, entonces existe un grupo G actuando en X tal que la acción de G en X es propiamente discontinua y un homeomorfismo $\phi : Y \rightarrow X/G$ tal que la proyección canónica $p : X \rightarrow X/G$ satisface $p = \phi \circ q$.*

Demostración Como $\psi' : \tilde{Y}/N \rightarrow X$ es un homeomorfismo, basta trasladar la acción de $\tilde{G}/N$ en $\tilde{Y}/N$ a X para obtener lo pedido. $\square$

Un recubrimiento $q : X \rightarrow Y$ con X conexo se dice regular si $q_*[\Pi_x(X)]$ es normal en $\Pi_{q(x)}(Y)$ para algún (todo) punto x de X . Los resultados anteriores dicen que un recubrimiento es regular si y sólo si proviene de una acción propiamente discontinua. Otra caracterización de los recubrimientos regulares es la siguiente:

Proposición 19.11. *Un recubrimiento $q : X \rightarrow Y$ es regular si y sólo si cada curva cerrada α en Y que tiene un levantamiento cerrado a X tiene todos sus levantamientos a X cerrados.*

Demostración Si q es regular, proviene de una acción propiamente discontinua y el resultado sigue por el Lema 19.6. Supongamos ahora que cada curva cerrada α en Y que tiene un levantamiento cerrado a X tiene todos sus levantamientos a X cerrados. Sea $a \in q_*[\Pi_x(X)]$. En particular $a = [q \circ \alpha]$ para alguna curva cerrada α en X . Basta probar que para todo elemento $b \in \Pi_{q(x)}(Y)$, se tiene $bab^{-1} \in q_*[\Pi_x(X)]$. Sea γ un representante de b y sea $\hat{\gamma}$ un levantamiento de γ a X con extremo inicial en x . Sea α' el levantamiento de $q \circ \alpha$ con extremo inicial en $\hat{\gamma}(1)$. Este es también su extremo final por hipótesis, dado que α es cerrada. Se sigue que $\hat{\gamma} * \alpha' * \hat{\gamma}^{\text{op}}$ es un camino cerrado y su imagen es bab^{-1} . $\square$

Dejamos al lector la tarea de dar una segunda demostración de este hecho probando que para todo recubrimiento del tipo $\tilde{Y}/H \rightarrow Y$ donde H es un subgrupo no-normal del grupo fundamental de Y existe una curva cerrada α en Y que tiene algunos levantamientos cerrados y otros no. Esto es suficiente ya que todo recubrimiento de Y es isomorfo a un recubrimiento de este tipo.

Chapter 20

El teorema de clasificación de superficies.

Chapter 21

Teorías de homología.

El grupo fundamental nos permite distinguir un buen número de espacios topológicos, como hemos visto con las superficies en el capítulo precedente. Sin embargo, este concepto no es tan útil, por ejemplo, para distinguir esferas de dimensión superior. Es posible definir análogos del grupo fundamental en dimensiones mayores. Tales grupos son llamados grupos de homotopía. Sin embargo, estos grupos son a menudo difíciles de calcular. Es por tal razón que introduciremos una herramienta algebraica que facilita este estudio en una variedad amplia de situaciones. Son los llamados grupos de homología. El contexto natural para definir estos grupos es el de complejos de cadenas. En estas notas, por un complejo de cadenas, entenderemos una sucesión C_n de grupos abelianos junto con una sucesión de funciones $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ que satisfacen

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Si n es claro del contexto, o al hablar de todas estas funciones en forma genérica, omitiremos el sub-índice, escribiendo, por ejemplo, la ecuación anterior como $\partial^2 = 0$. Definiremos también

$$Z_n = \ker(\partial_n), \quad B_n = \operatorname{im}(\partial_{n+1}), \quad H_n = Z_n / B_n.$$

Nótese que esto tiene sentido ya que la ecuación $\partial^2 = 0$ nos da $B_n \subseteq Z_n \subseteq C_n$. Llamaremos a H_n el n -ésimo grupo de homología del complejo. A menudo utilizaremos una notación del tipo

$$\mathfrak{C} : \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow \{0\}$$

para denotar tal complejo de cadenas, en cuyo caso utilizaremos notaciones como $Z_n(\mathfrak{C})$ o $H_n(\mathfrak{C})$, especialmente la última.

ejemplo 21.1. Consideremos el complejo de cadenas

$$\mathfrak{C} : \dots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow \{0\},$$

donde $\partial_n = 0$ para cada n . Entonces $H_n(\mathfrak{C}) = C_n$ para cada n .

ejemplo 21.2. Consideremos el complejo de cadenas

$$\mathfrak{C} : \dots \xrightarrow{\partial_3} \{0\} \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow \{0\},$$

donde $C_n = 0$ para cada $n \geq 3$. Supongamos además que

$$C_2 = \mathbb{Z}, \quad C_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad C_0 = \mathbb{Z},$$

mientras que las funciones borde no triviales están definidas por

$$\partial_2(n) = (n, -n), \quad \partial_1(s, t) = s + t.$$

Podemos comprobar que se trata de un complejo de cadenas, puesto que

$$\partial_1 \circ \partial_2(n) = n + (-n) = 0.$$

En este caso comprobamos que $H_n(\mathfrak{C}) = \{0\}$ para cada $n \geq 1$, mientras que $H_0(\mathfrak{C}) = \mathbb{Z}$.

En general, nos interesan, por cierto, complejos de cadenas que tengan una definición sencilla en términos de ciertos objetos de interés en topología. Daremos, a continuación, algunos de los ejemplos que juegan un rol central en los capítulos que siguen.

Homología Simplicial: Sea Σ un complejo simplicial, como se definió en el capítulo 16. Para cada símplice $T \in \Sigma$ se escoge un orden en sus vértices, es decir, escribimos $T = T_{x_0, \dots, x_n}$, y consideramos para este símplice un elemento abstracto $[x_0, \dots, x_n]$. Asociamos a Σ un complejo de cadenas en el que los grupos C_n se definen formalmente como sigue:

$$C_n^{\text{simp.}}(\Sigma) = \bigoplus_{T_{x_0, \dots, x_n} \in \Sigma} \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n].$$

Para cada permutación ρ del conjunto $\{0, \dots, n\}$ se utiliza la convención $[x_{\rho(0)}, \dots, x_{\rho(n)}] = (\text{sgn}(\rho))[x_1, \dots, x_n]$, donde sgn denota la función signo. Los operadores borde ∂_n se definen mediante la fórmula

$$\partial[x_0, \dots, x_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n].$$

Este recibe el nombre de complejo de cadenas simpliciales. Podemos comprobar que de hecho se trata de un complejo de cadenas por un simple cálculo:

$$\begin{aligned} \partial^2[x_0, \dots, x_n] &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial[x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n] \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \partial[x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \partial[x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n] \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \partial[x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n] \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \partial[x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n] = 0, \end{aligned}$$

donde, en el penúltimo paso, se intercambia i por j en la primera suma. Este complejo de cadenas se denota $\mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Sigma)$. Los correspondientes grupos de homología se definen por $H_n^{\text{simp.}}(\Sigma) := H_n(\mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Sigma))$. Se les llama grupos de homología simplicial.

ejemplo 21.3. Consideremos el complejo simplicial de la Figura 21.1. En este caso tenemos los bordes

$$\partial A = e - b + a, \quad \partial B = c - d + e, \quad \partial a = x - w,$$

$$\partial b = y - w, \quad \partial c = z - y, \quad \partial d = z - x, \quad \partial e = y - x.$$

Lo que nos dá el complejo de cadenas

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^5 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^4 \longrightarrow \{0\},$$

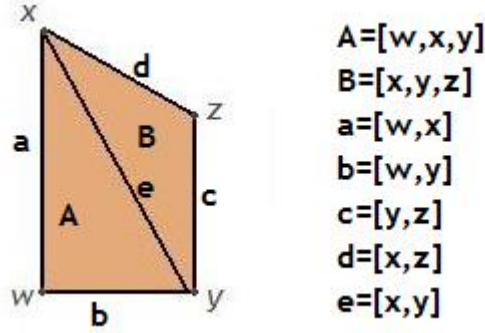


Figure 21.1: Un complejo y una orientación para sus símplices.

con bases ordenadas $\{A, B\}$, $\{a, b, c, d, e\}$, $\{x, y, z, w\}$, y donde los operadores borde están dados por las matrices

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aquí comprobamos que $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma) = H_1^{\text{simp.}}(\Sigma) = \{0\}$, mientras que la 0-homología nos da $H_0^{\text{simp.}}(\Sigma) = \mathbb{Z}$.

Llamaremos Δ -complejo, o complejo simplicial generalizado, a un complejo simplicial en el que algunos símplices han sido identificados entre ellos, con la condición de que si dos símplices se identifican, lo mismo ocurre con todas sus caras en forma consistente. La notación para símplices dada más arriba no es tan útil en este contexto más general, pero la definición dada all  puede aún extenderse. Dejamos al lector la tarea de convencerse de esto.

ejemplo 21.4. Consideremos el complejo simplicial generalizado de la Figura 21.2. En este caso tenemos los bordes

$$\begin{aligned} \partial A &= e - b + a, & \partial A' &= e - b + a, \\ \partial a &= x - w, & \partial b &= y - w, & \partial c &= y - x. \end{aligned}$$

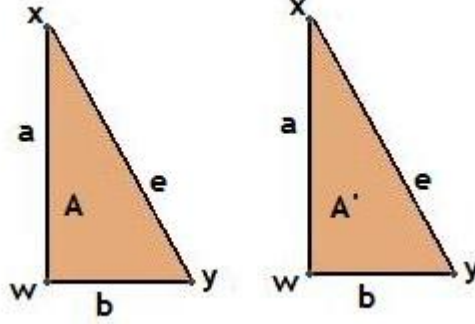


Figure 21.2: Dos símplices con bordes identificados.

Lo que nos da el complejo de cadenas

$$\{0\} \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \{0\},$$

con bases ordenadas $\{A, B\}$, $\{a, b, e\}$, $\{w, x, y\}$, y donde los operadores borde están dados por las matrices

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquí comprobamos que $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma) = \mathbb{Z}$, $H_1^{\text{simp.}}(\Sigma) = \{0\}$ y $H_0^{\text{simp.}}(\Sigma) = \mathbb{Z}$.

Δ -Homología: Sea Σ un Δ -complejo. Un símplice singular combinatorial (o más simplemente, un símplice combinatorial) es una función simplicial $\sigma : T_u \rightarrow \Sigma$ donde T_u es el símplice unitario definido en el capítulo 16. Definimos el grupo de Δ - n -cadenas por

$$C_n^\Delta(\Sigma) = \bigoplus_{\substack{\sigma: T_u \rightarrow \Sigma \\ \text{simp. sing. comb.}}} \mathbb{Z}\sigma.$$

Por simplicidad, escribiremos la base de $\mathbb{R}^{n+1}$ como $\{e_0, \dots, e_n\}$. Si la imagen del vector e_i de la base canónica es a_i , y si esto determina totalmente el símplece imagen (lo que no es necesariamente cierto en un Δ -complejo), denotaremos este símplece por $||[a_0, \dots, a_n]||$. En tal caso, podemos definir el borde por la misma función definida más arriba, es decir

$$\partial||[x_0, \dots, x_n]|| = \sum_{i=0}^n (-1)^i ||[x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]||,$$

y en tal caso la fórmula $\partial^2 = 0$ se prueba como antes, con un ligero cambio de paréntesis. En el caso general, se define la i -ésima cara del símplece unitario por

$$\tau_i = ||[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_n]||,$$

y se define el operador borde mediante $\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \tau_i$. Si extendemos el operador composición linealmente a todo el grupo $C_n^\Delta(\Sigma)$, esta última fórmula se re-escribe $\partial\sigma = \sigma \circ (\partial\sigma_u)$, donde

$$\sigma_u = ||[e_0, \dots, e_u]|| : T_u \rightarrow T_u$$

es la función identidad. Esta observación permite demostrar fácilmente la fórmula $\partial^2 = 0$ en completa generalidad. Este complejo de cadenas se denota $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma)$. Los correspondientes grupos de homología son $H_n^\Delta(\Sigma) := H_n(\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma))$. Los llamaremos grupos de Δ -homología.

ejemplo 21.5. Incluso complejos simpliciales muy sencillos (o poco complejos!) tienen un número infinito de símlices singulares combinatoriales, por lo que calcular ejemplos explícitos es difícil en este punto. Calcularemos aquí sólo la Δ -homología del complejo que contiene sólo un símplece y de dimensión 0, es decir un punto. En este caso existe un único símplece singular en cada dimensión n . Lo denotaremos λ_n . No es difícil ver que $\lambda_n \circ \tau_i = \lambda_{n-1}$ para cada i , ya que este es el único símplece de la dimensión correcta. Concluimos que el complejo de Δ -cadenas tiene la forma

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}\lambda_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\lambda_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\lambda_0 \longrightarrow \{0\}.$$

Observamos que $\partial\lambda_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \lambda_{n-1} = \frac{(-1)^{n+1}-1}{2} \lambda_{n-1}$, de modo que los operadores borde ∂_n , con n par, coinciden con el isomorfismo canónico, mientras

los restantes son nulos. Identifiquemos cada generador con 1 por simplicidad. Obtenemos así la sucesión

$$\dots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow \{0\},$$

el cual tiene homología nula salvo en dimensión 0. En este caso la Δ -homología coincide con la simplicial. Veremos más adelante que este es siempre el caso (al menos en el caso de complejos simpliciales en la versión actual).

Homología Singular: Sea X un espacio topológico. Un símplice singular en X es cualquier función continua $\sigma : T_u \rightarrow X$, con T_u como antes. Definimos el grupo de n -cadenas singulares mediante

$$C_n^{\text{sing.}}(X) = \bigoplus_{\substack{\sigma: T_u \rightarrow X \\ \text{simp. sing.}}} \mathbb{Z}\sigma.$$

El operador borde se define mediante $\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \tau_i$, como en el ejemplo anterior, y se demuestra la fórmula $\partial^2 = 0$ también análogamente. En este caso escribimos $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$ por el complejo, y $H_n^{\text{sing.}}(X) := H_n(\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X))$ por los grupos de homología.

ejemplo 21.6. Se deduce fácilmente que los grupos de homología singular del espacio $\{p\}$ con un único punto son de la forma

$$H_0^{\text{sing.}}(\{p\}) = \mathbb{Z}, \quad H_n^{\text{sing.}}(\{p\}) = \{0\} \text{ para } n > 1,$$

puesto que este espacio tiene una estructura natural como Δ -complejo y cada símplice singular allí es combinatorial.

Modelos de papel: El conjunto de símplices singulares puede parecer, en la practica, bastante poco manejable, pero hay un truco que permite reducir muchos cálculos a la Δ -homología. Sea $\tilde{\Sigma}$ cualquier familia finita de símplices singulares en un espacio topológico X . Asumiremos que esta familia es cerrada bajo caras y permutaciones, donde una cara de un símplice σ es cualquiera de los símplices $\sigma \circ \tau_i$ que aparecen en la definición del operador borde, mientras que una permutación es cualquier símplice de la forma

$$\sigma \circ [e_{\mu(0)}, e_{\mu(1)}, \dots, e_{\mu(n)}],$$

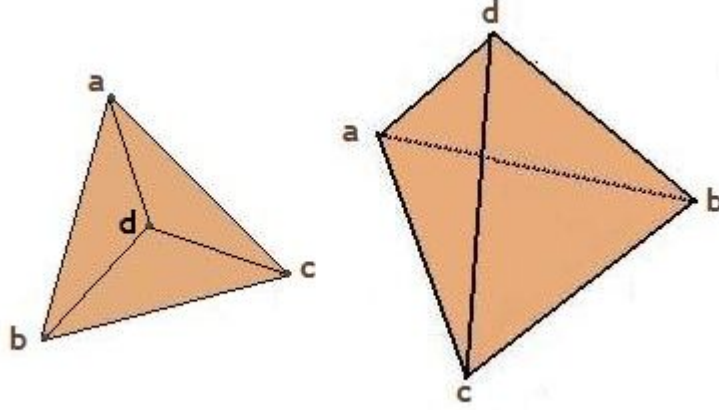


Figure 21.3: Modelo de papel para una subdivisión del 2-símplice.

donde μ es una permutación del conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$. Podemos definir un Δ -complejo Σ con un símple (geométrico) por cada símple singular en $\tilde{\Sigma}$, identificando caras y permutaciones de la manera natural. Los símlices singulares pueden pegarse para dar una función continua $\phi : |\Sigma| \rightarrow X$ tal que cada símple singular en $\tilde{\Sigma}$ es la imagen de un símple combinatorial de Σ . Este truco permite trasladar identidades obtenidas para símlices combinatoriales al caso más general de símlices singulares, y reducir muchos cálculos a la construcción de modelos de papel apropiados.

ejemplo 21.7. Consideremos un 2-símplice combinatorial arbitrario y procedamos a dividirlo en tres símlices menores como muestra la Figura 21.3. Podemos probar que, ordenando apropiadamente los vértices de los símlices menores, existe un 3-símplice singular ρ que satisface $\sigma + \partial\rho = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, donde la imagen de σ es el símple mayor, mientras σ_1 , σ_2 , y σ_3 tienen como imágenes a los símlices menores. Una manera de hacer esto es construir un modelo de papel, que en este caso es el borde de un 3-símplice geométrico. No es difícil extender este modelo a uno que incluya el interior del 3-símplice. De hecho, puede extenderse mediante una función lineal. Pudiendo hacer esto con un símple geométrico, no es difícil ver que lo mismo se aplica a cualquier símple singular. Los detalles se dejan al lector.

ejemplo 21.8. Sea σ un 1-símplice singular arbitrario, y denotemos por τ

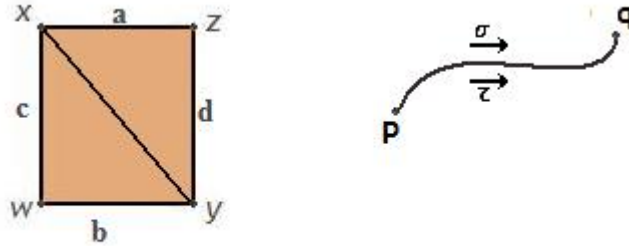


Figure 21.4: Modelo de papel para exhibir la diferencia de dos reparametrizaciones como un borde.

una reparametrización del mismo. Sabemos por el Lema 15.2 que existe una homotopía entre ambas curvas. Triangulando el cuadrado de forma apropiada, obtenemos un modelo de papel para esta situación como el representado en la Figura 21.4. La imagen de las líneas horizontales c y d son funciones constantes. Se deduce fácilmente del ejemplo 21.5 que el 1-símplice constante es un borde y por lo tanto también lo es el ciclo $\sigma - \tau$, que es la imagen de $a - b$.

Homología con coeficientes: Todo lo dicho anteriormente se aplica si, para cualquiera de las teorías precedentes, remplazamos una cadena $\mathfrak{C}$ por la cadena $\mathfrak{C} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ para un grupo abeliano A cualquiera. En otras palabras, remplazamos el grupo de n -cadenas C_n por el producto tensorial $C_n \otimes_{\mathbb{Z}} A$, y definimos el operador borde en este nuevo complejo por $\hat{\partial} = \partial \otimes \text{Id}$. De este modo obtenemos los grupos de homología $H_n^{\text{Simp}}(\Sigma, A)$, $H_n^{\Delta}(\Sigma, A)$ y $H_n^{\text{Simg}}(X, A)$, donde Σ es un complejo simplicial y X un espacio topológico. En este caso, hablaremos de grupos de homología con coeficientes en A .

Ejercicios: (Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos).

1. Calcule la homotopía del complejo

$$0 \xrightarrow{a} C_3 \xrightarrow{b} C_2 \xrightarrow{c} C_1 \xrightarrow{d} C_0,$$

donde se tienen las identidades

$$C_3 = \mathbb{Z}^3, \quad C_2 = \mathbb{Z}^3, \quad C_1 = \mathbb{Z}^3, \quad C_0 = \mathbb{Z}^2,$$

y las funciones a, b, c, d tienen las matrices respectivas

$$[a] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [b] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[c] = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [d] = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Calcule la homotopía del complejo

$$0 \xrightarrow{a} C_3 \xrightarrow{b} C_2 \xrightarrow{c} C_1 \xrightarrow{d} C_0,$$

donde se tienen las identidades

$$C_3 = \mathbb{F}_2^3, \quad C_2 = \mathbb{F}_2^3, \quad C_1 = \mathbb{F}_2^3, \quad C_0 = \mathbb{F}_2^2,$$

y las funciones a, b, c, d tienen las matrices descritas mas arriba (pero en $\mathbb{F}_2$).

3. Sea A un grupo abeliano arbitrario. Sea $t : A \rightarrow A$ el homomorfismo $t(x) = nx$ para algún entero n fijo. Pruebe que $0 \rightarrow A \xrightarrow{t} A \rightarrow 0$ es un complejo de cadenas y calcule sus grupos de homología.
4. Sea K el complejo de la Figura 21.5, cuyos simplices de dimensión 3 y 4 están indicados: Calcule los grupos de homología simplicial de K .
5. Probar que el poliedro de un grafo finito es un árbol si y sólo si $H_1^{\text{simp.}}(G) = \{0\}$.
6. Sea Σ un complejo bidimensional cuyo poliedro es homeomorfo al disco. Llamaremos a este tipo de complejo un disco combinatorial. Probar por inducción que $H_1^{\text{simp.}}(\Sigma)$ y $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma)$ son triviales.
7. Sea Σ un complejo que se obtiene pegando dos discos combinatoriales por el borde, de modo que el poliedro $|\Sigma|$ es homeomorfo la esfera S^1 . Probar, usando el ejercicio anterior, que $H_2^{\text{simp.}}(\Sigma) \cong \mathbb{Z}$.

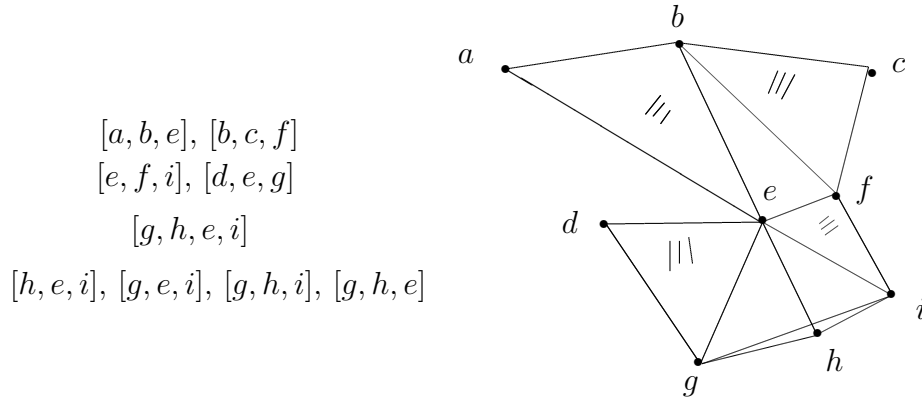


Figure 21.5: Un complejo simplicial.

8. Probar que si K es un complejo de dimensión n , entonces $H_n^{\text{simp.}}(K)$ es libre de torsión.
9. Probar que para todo complejo K y para cada $p \geq n + 2$ se tiene $H_n^{\text{simp.}}(K) = H_n^{\text{simp.}}(K_p)$, donde K_p es el p -esqueleto de K .
10. Sea K un complejo arbitrario. Probar que $H_0^{\text{simp.}}(K) \cong \mathbb{Z}^r$ donde r es el número de componentes conexas de K .
11. Encuentre un Δ -complejo K_n , para cada entero n , tal que $H_1^{\text{simp.}}(K_n) \cong C_n$, donde C_n es el grupo cíclico con n elementos.
12. Sea X un espacio topológico con r componentes arco-conexas, probar que $H_0^{\text{sing.}}(X) \cong \mathbb{Z}^r$.
13. Sea X un espacio topológico contractible. Probar que para toda curva cerrada γ en X existe una función continua $\rho : B^2 \rightarrow X$ tal que γ puede verse como el borde de ρ en un sentido apropiado. Usar esta idea para probar que $H_1^{\text{sing.}}(X)$ es trivial.
14. Sea K una triangulación de una superficie compacta X . Diremos que K es orientable si es posible dar una orientación a cada cara (2-símplice) de K de modo que caras vecinas tengan orientaciones compatibles. Probar

que, si K es orientable, entonces $H_2^{\text{sing.}}(K) \cong \mathbb{Z}$, y en caso contrario $H_2^{\text{sing.}}(K) = \{0\}$.

Chapter 22

Homotopías de Cadenas.

El propósito del siguiente capítulo es estudiar la invariancia topológica de los grupos de homología. Es claro, ya de la definición, que los grupos de homología singular dependen sólo del espacio topológico sobre el cual se definen, por lo que son invariantes bajo homeomorfismos. Esto no es, a priori, cierto para la Δ -homología, o la homología simplicial, puesto que estas dependen de la representación de un cierto espacio como el polihedro de un complejo. Sin embargo, es posible mostrar que todas estas teorías coinciden y que son invariantes bajo equivalencia homotópica, lo que es mucho más fuerte que la invariancia bajo homeomorfismos. En este capítulo mostraremos que este es el caso para la homología singular, y que esta coincide con la Δ -homología (al menos para complejos simpliciales). Para cumplir nuestro primer objetivo, debemos interpretar la noción de homotopía en términos de complejos de cadenas.

Para efectos de este apunte, una función de cadenas $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ es una familia de morfismos $f_n : C_n \rightarrow D_n$ que satisfacen la identidad $f_{n-1} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_n$, a menudo resumida mediante la fórmula $f\partial = \partial f$. Una función de cadenas lleva ciclos en ciclos y bordes en bordes, por lo que define una función $f_* : H_n(\mathfrak{C}) \rightarrow H_n(\mathfrak{D})$ a nivel de grupos de homología.

ejemplo 22.1. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ define una función de cadenas $f_\Delta : \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(Y)$ mediante $f_\Delta(\sigma) = f \circ \sigma$, por lo que también define un morfismo $f_* : H_n^{\text{sing.}}(X) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(Y)$ a nivel de homología.

Recordemos que una homotopía entre dos funciones $f, g : X \rightarrow Y$ es una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ que coincide con f o g cuando el parámetro $t \in I$ es 0 o 1, respectivamente. Esto hace que, para estudiar

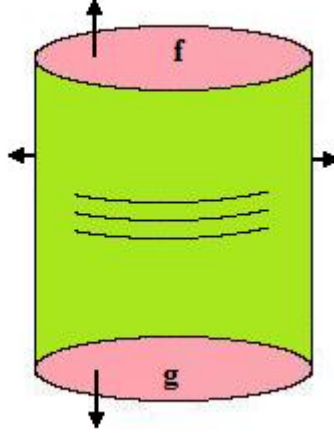


Figure 22.1: El borde de un tarro.

homotopías, entre funciones de cadenas, sea natural verlas en términos de una triangulación del "tarro" mostrado en la Figura 22.1. Los bordes superiores e inferiores se interpretan como copias del espacio X . Sin embargo, el borde del tarro tiene un tercer componente, la parte verde del dibujo. Por así decirlo, el "manto del tarro". En símbolos, tenemos

$$\partial(X \times I) = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (\partial X \times I).$$

La idea es convertir esta relación conjuntista en una relación a nivel de grupos de cadenas que podamos utilizar como un análogo algebraico a la idea de homotopía. El primer obtáculo que encontramos reside en el hecho de que un producto de símlices no es, en general, un símplex por lo que necesitamos una triangulación.

Si $T_u = [e_0, e_1, \dots, e_n]$ es el símplex unitario, describimos el producto como $T_u \times I$, un prisma cuyos vértices son los elementos del conjunto

$$\{(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (e_0, 1), (e_1, 1), \dots, (e_n, 1)\}.$$

Este puede verse como la unión de las imágenes los símlices de la forma

$$\rho_i = \left| \left[(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_n, 1) \right] \right|, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Consideremos ahora los símplices de la formas siguientes

$$\mu_{i,j} = \left| \left[(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (\widehat{e_j, 0}), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (e_n, 1) \right] \right|, \quad j \leq i,$$

$$\nu_{i,j} = \left| \left[(e_0, 0), (e_1, 0), \dots, (e_i, 0), (e_i, 1), \dots, (\widehat{e_j, 0}), \dots, (e_n, 1) \right] \right|, \quad i \leq j.$$

Es f cil deducir la identidad $\mu_{i,i} = \nu_{i-1,i-1}$, de donde se tiene la relación

$$\begin{aligned} \partial \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \rho_i \right) &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \mu_{i,j} + \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j+1} \nu_{i,j} \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \mu_{i,j} + \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} \nu_{i,j} + \nu_{n,n} - \mu_{0,0}. \end{aligned}$$

En particular, si a cada n símplice singular σ le asociamos la cadena $K\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \tilde{H} \circ \rho_i$, donde $\tilde{H} : T_u \times I \rightarrow Y$ es la composición $H \circ (\sigma, \text{id})$, entonces podemos identificar a la suma

$$- \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \tilde{H} \circ \mu_{i,j} - \sum_{j > i} (-1)^{i+j+1} \tilde{H} \circ \nu_{i,j}$$

con su análogo $K(\partial\sigma)$ en dimensión menor (sugerimos al lector escribir esto con cuidado para cerciorarse de ello). Por otro lado $\tilde{H} \circ \nu_{n,n} = g_\Delta(\sigma)$ y $\tilde{H} \circ \mu_{0,0} = f_\Delta(\sigma)$. Concluimos que se tiene la fórmula: $\partial K = -K\partial + g_\Delta - f_\Delta$. Esto es, de hecho, todo lo que necesitamos para concluir que las funciones inducidas, a nivel de homología, coinciden.

En general, por una homotopía de cadenas $K : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ entre dos funciones de cadenas $f, g : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$, nos referiremos a una familia de funciones $K_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ que cumplen la identidad $\partial K + K\partial = g - f$. Cuando tal homotopía existe diremos que las funciones de cadenas son homotópicas.

Proposición 22.2. *Funciones de cadenas homotópicas definen la misma función a nivel de homología.*

Proof. Sea $c \in C_n$ un ciclo. Entonces $g(c) - f(c) = (\partial K + K\partial)(c) = \partial(Kc)$. Como esta última cadena es un borde se tiene $g_*([c]) - f_*([c]) = 0$ y el resultado sigue. $\square$

Corolario 22.2.1. *Espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de homología isomorfos.*

Un lema técnico que nos hará la vida mas sencilla en lo que sigue es el siguiente:

Lema 22.3. *Si $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ es una función de cadenas, y si $K_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ denota cualquier familia de funciones, entonces $g = K\partial + \partial K + f$ es una función de cadenas.*

Proof. Esto se deduce del cálculo siguiente:

$$\begin{aligned}\partial g &= \partial(K\partial + \partial K + f) = \partial K\partial + \partial f \\ &= \partial K\partial + f\partial = (\partial K + K\partial + f)\partial = g\partial.\end{aligned}$$

□

Es fácil definir una función de cadenas $i : \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing}}(|\Sigma|)$ para cada Δ -complejo Σ . Basta con interpretar cada símplice combinatorial, que ya es una función, como un símplice singular, es decir, olvidamos que proviene de la estructura del complejo. Es inmediato que i es una función de cadenas y que, por lo tanto, define una función $i_* : H_n^\Delta(\Sigma) \rightarrow H_n^{\text{sing}}(|\Sigma|)$ a nivel de homología. En lo que sigue probaremos que esta función es un isomorfismo.

Subdivisión Baricéntrica. Sea $\sigma : T_u \rightarrow X$ un símplice singular arbitrario. Consideremos la división de este utilizando su baricentro b_0 , como la que se muestra en el Ejemplo 21.7 (Ver figura 21.3). Definamos el $n+1$ -símplice singular

$$L_{n,1}\sigma = -\sigma \circ [b_0, e_0, e_1, \dots, e_n],$$

y escribamos $\delta_{n,1}\sigma = \partial(L_{n,1}\sigma) + \sigma$. Nótese que esta última cadena está dada por la fórmula

$$\delta_n\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ [b_0, e_0, e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n].$$

Agregamos ahora un nuevo vértice $b_{1,i}$ por cada cara $\tau_i = [e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]$, el que puede identificarse como el baricentro de su imagen, y definimos

$$L_{n,2}\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ [b_0, b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n],$$

$$\delta_{n-1}\sigma = \partial L_{n,2}\sigma + L_{n-1,1}(\partial\sigma) + \delta_n\sigma.$$

Nótese que cada término de la forma $\sigma \circ |[b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]|$, del primer sumando se cancela con el segundo sumando, y cada término de la forma $\sigma \circ |[b_0, e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]|$ se cancela con el tercer sumando. Nos quedan así sólo términos de una de las dos formas siguientes:

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_n]|,$$

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,i}, e_0, \dots, \widehat{e_j}, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n]|.$$

Asumamos ahora que tenemos definida la cadena

$$\delta_{n-k}\sigma = \sum_{\rho} \epsilon_{\rho} \sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, a_0, \dots, a_{n-k-1}]|,$$

donde cada $b_{i,\rho}$ es el baricentro de un $n-i$ -símplice S_i que satisfacen

$$S_1 \subseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_k \supseteq S_{k+1} = \text{im}\left(|[a_0, \dots, a_{n-k-1}]|\right).$$

Definimos a continuación

$$L_{n,k+2}\sigma = (-1)^k \sum_{\rho} \epsilon_{\rho} \sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, b_{k+1,\rho}, a_0, \dots, a_n]|,$$

donde $b_{k+1,\rho}$ es el baricentro de S_{k+1} . Además ponemos

$$\delta_{n-k-1}\sigma = \partial L_{n,k+2}\sigma + L_{n-1,k+1}(\partial\sigma) + \delta_{n-k}\sigma.$$

Como antes, los términos de la forma

$$\sigma \circ |[b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, b_{k+1,\rho}, a_0, \dots, a_n]|$$

se cancelan con los del segundo sumando, y los de la forma

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, b_{k,\rho}, a_0, \dots, a_n]|$$

se cancelan con el tercer sumando. Para recuperar la hipótesis de inducción necesitamos también probar que los símlices de la forma

$$\sigma \circ |[b_0, b_{1,\rho}, \dots, \widehat{b_{i,\rho}}, \dots, b_{k,\rho}, b_{k+1,\rho}, a_0, \dots, a_n]|,$$

se cancelan. Para ello, observamos que cada vez que se agrega un baricentro se remueve un vértice original, y la lista de baricentros guarda la información

sobre el orden en que los vértices originales fueron removidos. La ausencia del término $b_{i,\rho}$ nos dice que hay dos de estos vértices originales que fueron removidos consecutivamente, pero no sabemos en que orden. Concluimos que este término aparece dos veces en la expresión $\partial L_{n,k+2}\sigma$. El hecho de que ambos tengan signos diferentes se prueba por un argumento similar al utilizado para probar la relación $\partial^2 = 0$ en el capítulo precedente.

La función $\delta = \delta_1 : \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$ es una función de cadenas por el Corolario 22.2.2, y recibe el nombre de subdivisión baricéntrica. El siguiente resultado es ahora inmediato:

Proposición 22.4. *La subdivisión baricéntrica induce la función identidad a nivel de grupos de homología.*

ejemplo 22.5. Sea X un espacio topológico, y sea $\wp$ un recubrimiento abierto de X . Un símplice singular σ se dice subordinado a $\wp$ si su imagen está contenido en uno de los conjuntos de la partición. El complejo de cadenas $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, \wp)$ recibe el nombre de complejo de cadenas singulares subordinadas a $\wp$. Se tiene una inclusión canónica $i : \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, \wp) \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$, la que es una función de cadenas. Afirmamos que esta función induce un isomorfismo a nivel de homología. Para probar esto observamos que para todo ciclo c se tiene

$$[c] = \delta_*^n[c] = [\delta^n(c)],$$

y $\delta^n(c)$ esta subordinada a $\wp$ para n suficientemente grande, lo que prueba que i_* es epiyectiva. Por otro lado, si c es una cadena subordinada a $\wp$ que satisface $c = \partial d$ para alguna cadena d de $\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)$, entonces tenemos $\delta^n(c) = \partial(\delta^n(d))$ para todo n , y de nuevo $\delta^n(d)$ está subordinada a $\wp$ para n suficientemente grande, por lo que podemos escribir

$$[c] = [\delta^n(c)] = [\partial(\delta^n(d))] = [0] \in H_n^{\text{sing.}}(X, \wp).$$

Dado un complejo simplicial Σ , podemos definir otro complejo $\Sigma^{(1)}$, llamado su subdivisión baricéntrica, en el que cada símplice T se remplace por la unión de todos los símplices de la forma $[b_0, b_1, \dots, b_n]$, donde, como antes, cada b_i es el baricentro de un $n - i$ -símplice S_i que satisfacen $T = S_0 \supseteq S_1 \supseteq \dots \supseteq S_n$. Dada cualquier colección de símplices singulares, podemos construir un modelo de papel de su subdivisión baricéntrica, tomando la subdivisión baricéntrica de su modelo de papel. Otra propiedad importante de

la subdivisión baricéntrica es que nos permite reducir muchas demostraciones al caso de complejos simpliciales, ya que la segunda subdivisión baricéntrica $\Sigma^{(2)} = (\Sigma^{(1)})^{(1)}$ es siempre un complejo simplicial. Dejamos al lector la tarea de convencerse de este hecho.

Aproximación Simplicial. Sean Σ y Σ' complejos simpliciales. Una función simplicial $s : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$ es una aproximación simplicial debil de una función continua $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$, si para cada punto $x \in |\Sigma|$ existe un símplice T de Σ' que contiene a ambos $\sigma(x)$ y $f(x)$. En tal caso existe una homotopía entre ambas funciones. De hecho

$$H(x, t) = (1 - t)s(x) + tf(x)$$

es una homotopía bien definida, por ser Σ' un complejo simplicial, el cual podemos suponer contenido en algún espacio $\mathbb{R}^n$. Esto prueba el siguiente resultado:

Lema 22.6. *Bajo las hipótesis precedentes, si s es una aproximación simplicial de f , entonces ambas funciones inducen la misma función a nivel de homología singular.*

Es este último resultado lo que nos impide extender la demostración de este capítulo al caso de Δ -complejos. Si identificamos los extremos de una arista para formar un círculo, no es difícil ver que en el Δ -complejo resultante la identidad puede aproximarse por una función constante.

Diremos que $s : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$ es una aproximación simplicial de una función continua $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$ si para cada punto $x \in |\Sigma|$ la imagen $s(x)$ está contenida en el menor símplice que contiene a $f(x)$.

Lema 22.7. *Bajo las hipótesis precedentes, si s y s' son dos aproximaciones simplicial de la misma función continua f , entonces ambas funciones inducen la misma función a nivel de Δ -homología.*

Proof. La hipótesis implica que, para cada punto $x \in |\Sigma|$, las imagenes $s(x)$ y $s'(x)$ están contenidas en un mismo símplice. La homotopía entre ambas funciones puede definirse por

$$H(x, t) = (1 - t)s(x) + ts'(x).$$

Basta comprobar que esta función es afín en cada símplice de la triangulación que utilizamos para transformar homotopías de funciones en homotopías de cadenas. $\square$

Para cada vértice v de Σ podemos definir su vecindad estrellada $\text{Est}(v) \subseteq |\Sigma|$ como la unión de los interiores de los símlices que tienen a v como vértices. Una consecuencia inmediata de la definición es el siguiente resultado:

Lema 22.8. *Sea Σ un complejo simplicial, y sea $V = \{v_0, \dots, v_n\}$ un conjunto de vértices en Σ . Existe un símplex T en Σ cuyo conjunto de vértices es V si y sólo si*

$$\bigcap_{i=0}^n \text{Est}(v_i) \neq \emptyset.$$

Supongamos que, para cada vértice v of Σ , podemos encontrar un vértice v' en Σ' que satisfaga la relación $f(\text{Est}(v)) \subseteq \text{Est}(v')$. Entonces, definimos una función simplicial que satisface $s(v) = v'$. Para ver que tal cosa es posible, necesitamos probar que las imágenes de los vértices de cualquier símplex de Σ son los vértices de un símplex de Σ' . Sean estos $v_0, \dots, v_n$. Sea x un elemento del interior del símplex en cuestión. Entonces $x \in \text{Est}(v_i)$ para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Concluimos que

$$f(x) \in \text{Est}(s(v_i)) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad (22.1)$$

por lo que la intersección de dichas estrellas es no vacía, y por tanto los vértices $\{s(v_0), s(v_1), \dots, s(v_n)\}$ definen un símplex S . Además, por definición, $s(x)$ pertenece al símplex S , mientras que (22.1) nos dice que $f(x)$ está en un símplex que tiene a S como cara.

El siguiente resultado es ahora inmediato de propiedades conocidas de los espacios métricos y se deja al lector:

Proposición 22.9. (Teorema de aproximación Simplicial). *Sea $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma'|$ una función continua entre poliedros. Entonces existe $n > 0$ para el cual f tiene una aproximación simplicial $s : \Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma'$.*

Podemos ahora mostrar la equivalencia entre homología simplicial y singular.

Proposición 22.10. *Sea Σ un complejo simplicial. La función $i_* : H_n^\Delta(\Sigma) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|)$ es un isomorfismo.*

Proof. Sea c una ciclo singular en $X = |\Sigma|$, y sea $\phi : |\tilde{\Sigma}| \rightarrow X$ un modelo de papel para el conjunto de símplices que aparecen en c , junto con sus caras y permutaciones. Entonces podemos escribir $c = \phi_{\Delta}(c')$, donde c' es un simplece combinatorial de $\tilde{\Sigma}$. Remplazando este por una subdivisión baricéntrica, de ser necesario, podemos suponer que $\tilde{\Sigma}$ es un complejo simplicial y que $\phi : |\tilde{\Sigma}| \rightarrow |\Sigma|$ tiene una aproximación simplicial $s : \tilde{\Sigma} \rightarrow \Sigma$. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n^{\Delta}(\tilde{\Sigma}) & \xrightarrow{s_*} & H_n^{\Delta}(\Sigma) , \\ & \searrow \phi_* & \swarrow i_* \\ & H_n^{\text{sing.}}(X) & \end{array}$$

concluimos que

$$[c] = \phi_*[c'] = i_* \circ s_*[c'],$$

de donde i_* es epiyectiva. Por el mismo razonamiento, si c es un ciclo combinatorial que satisface $i_*[c] = 0$, podemos escribir $c = \partial d$ para alguna cadena singular d . Remplazando ambas cadenas por subdivisiones baricéntricas si fuera necesario, podemos suponer que existe un modelo de papel $\phi : \tilde{\Sigma} \rightarrow X$ con una cadena $d' \in C_{n+1}^{\Delta}(\tilde{\Sigma})$ que satisface $\phi_{\Delta}(d') = d$, y que ϕ tiene una aproximación simplicial s . Además, para cada símplice en la expresión de c , la función ϕ es simplicial, por lo que $c = \phi_*(\partial(d'))$ es homólogo al c clo $s_*(\partial(d'))$ a nivel de Δ -homología. El resultado sigue. $\square$

Proposición 22.11. *Existe una aproximación simplicial $\chi : \Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma$ de la identidad $\text{id} : |\Sigma| = |\Sigma^{(n)}| \rightarrow |\Sigma|$.*

Proof. Basta con comprobar que, para cada vértice v de la subdivisión baricéntrica existe un vértice v' en Σ que satisface la relación $f(\text{Est}(v)) \subseteq \text{Est}(v')$. Esto es inmediato. $\square$

Proposición 22.12. *Si $\chi : \Sigma^{(n)} \rightarrow \Sigma$ es una aproximación simplicial de la identidad $\text{id} : |\Sigma| = |\Sigma^{(n)}| \rightarrow |\Sigma|$, entonces $\chi_* : H_n^{\Delta}(\Sigma^{(n)}) \rightarrow H_n^{\Delta}(\Sigma)$ es el isomorfismo inverso de $\delta_* : H_n^{\Delta}(\Sigma) \rightarrow H_n^{\Delta}(\Sigma^{(n)})$.*

Proof. Basta considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 H_n^\Delta(\Sigma^{(1)}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\chi_*} \\ \xleftarrow{\delta_*} \end{array} & H_n^\Delta(\Sigma) , \\
 & \searrow i_* \quad \swarrow i_* & \\
 & H_n^{\text{sing.}}(X) &
 \end{array}$$

y observar que cada una de las funciones horizontales es la identidad a nivel de símplices singulares. $\square$

De hecho, es posible probar que estas funciones son inversas a nivel de homotopía, es decir que las composiciones $\chi \circ \delta$ y $\delta \circ \chi$ son homotópicas a las identidades respectivas. Utilizando este hecho, es posible demostrar muchas de las propiedades functoriales de la Δ -homología, o de la homología simplicial, sin pasar por la homología singular. Para un estudio más detallado utilizando este enfoque, referimos al lector al libro de Armstrong.

Ejercicios: (Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos).

1. Probar que si el poliedro $|K|$ de un complejo es un espacio conexo, existe un recorrido de aristas que conecta a dos vértices cualesquiera de K (sugerencia: Aproxime simplicialmente una curva).
2. Dado un espacio topológico X se define el cono CX como el espacio que se obtiene al identificar entre ellos los puntos cuya segunda coordenada es 1 en $X \times [0, 1]$. Si $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ es un complejo, se define el cono $C\Sigma$ como el complejo que se obtiene al considerar Σ como un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y agregarlo todos los símplices generados por un símplice de Σ (incluyendo el vacío) y un vértice fijo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$. Probar que $C|\Sigma|$ y $|C\Sigma|$ son espacios homeomorfos. Utilizar este resultado para probar que los grupos de Δ -homología de $C\Sigma$ son triviales.
3. Probar que si X e Y son espacios triangulables, probar que $X \times Y$ es triangulable (Sugerencia: Probarlo primero para dos símplices, generalizando la construcción al comienzo de este capítulo).
4. Sea Λ un subcomplejo de Σ y sea N la colección de todos los símplices σ de $\Sigma^{(2)}$ para los cuales existe un símplice τ en $\Lambda^{(2)}$ tal que los vértices de

σ junto con los del símlice τ determinan un símlice de $\Sigma^{(2)}$. Probar que N es un subcomplejo de $\Sigma^{(2)}$ y que $|\Lambda|$ está contenido en el interior de $|N|$.

5. Sea Σ un complejo y sea Λ un subcomplejo. Probar que el espacio de identificación de $|\Sigma|$ que se obtiene al contraer $|\Lambda|$ a un punto es triangulable.
6. Dadas triangulaciones Σ_k y Σ_n de las esferas S^k y S^n con $k < n$, probar que toda aplicación simplicial de Σ_k en Σ_n es homotópica a una constante. Utilice el Teorema de aproximación simplicial para probar que toda función continua de S^k en S^n es homotópica a una constante.
7. Utilice el teorema de aproximación simplicial, y una triangulación de la n -esfera para probar que $H_k^{\text{sing.}}(S^n) = \{0\}$ para todo $k < n$.
8. Probar que una aplicación simplicial de Σ en Σ' induce una aplicación simplicial de $\Sigma^{(n)}$ en $(\Sigma')^{(n)}$ para todo n .
9. Sea K el $(n-1)$ -esqueleto del n -símlice $[v_0, \dots, v_n]$. Probar que toda $(n-1)$ -cadena cerrada de K es un múltiplo de la cadena

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n].$$

Chapter 23

Sucesiones exactas de grupos de homología.

Por una sucesión exacta corta de complejos de cadenas, denotada en un diagrama por

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \rightarrow \{0\},$$

nos referimos a una sucesión de sucesiones exactas cortas de grupos abelianos

$$\{0\} \rightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \rightarrow \{0\}$$

para las cuales los diagramas

$$\begin{array}{ccccc} A_n & \xrightarrow{f_n} & B_n & \xrightarrow{g_n} & C_n \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ A_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & B_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & C_{n+1} \end{array}$$

conmutan para cada n . Estas sucesiones juegan un papel central en la teoría homológica dado que nos permiten obtener relaciones importantes entre diversos grupos de homología, gracias, en parte, al siguiente resultado:

Proposición 23.1. *Una sucesión exacta corta de complejos de cadenas*

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{B} \xrightarrow{g} \mathfrak{C} \rightarrow \{0\}$$

induce una sucesión exacta larga del tipo

$$\dots \rightarrow H_n(\mathfrak{A}) \xrightarrow{f_*} H_n(\mathfrak{B}) \xrightarrow{g_*} H_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(\mathfrak{B}) \rightarrow \dots,$$

a nivel de grupos de homología.

Proof. La función ∂_* se define como sigue: Para cada n -ciclo c en $\mathfrak{C}$, escogemos una pre-imagen b , la cual es una n -cadena en $\mathfrak{B}$ (pero no necesariamente un ciclo). El borde de esta cadena satisface $g(\partial b) = \partial c = 0$, dado que c es un ciclo. Concluimos que existe una $n-1$ cadena a en $\mathfrak{A}$ tal que $f(a) = \partial b$. Como $f(\partial a) = \partial^2 b = 0$, y como f es inyectiva, se tiene que a es un ciclo. Definimos $\partial_*[c] = [a]$.

Debemos probar primero que esta clase es independiente de la elección de la pre-imagen b de c . Si b' es otra pre-imagen, es decir, si $g(b') = c = g(b)$, concluimos que $b' = b + f(a')$ para alguna cadena a' . Se sigue que $\partial b' = \partial b + f(\partial a')$. Como f es inyectiva, esto implica que $a'' = a + \partial a'$ es la única solución de $f(a'') = b'$. Concluimos que $[a''] = [a]$, por lo que nuestra función está bien definida.

Falta probar que la sucesión larga es exacta en cada lugar. Es fácil ver que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$. Supongamos ahora que $g_*[b] = 0$. Esto significa que $g(b) = \partial c'$ para alguna cadena c' . Sea b' una pre-imagen de c' . Entonces $g(b - \partial b') = 0$, por lo que existe una cadena a en $\mathfrak{A}$ que satisface $f(a) = b - \partial b'$. Como f es inyectiva y $b - \partial b'$ es un ciclo, también lo es a , y se tiene $f_*[a] = [b - \partial b'] = [b]$. Esto prueba que la sucesión es exacta en $H_n(\mathfrak{B})$.

Probaremos ahora la exactitud en $H_n(\mathfrak{C})$. Si $[c] = g_*[b]$, podemos asumir que $c = g(b)$, donde b es un ciclo, y podemos utilizar la definición con $\partial b = 0$, de donde $a = 0$. Por otro lado, si $\partial_*[c] = [a] = 0$, el ciclo a debe ser un borde $\partial a'$, de donde $f(\partial a') = f(a) = \partial b$. Nótese que $b - f(a')$ es también una pre-imagen de c , y de hecho $\partial(b - f(a')) = \partial b - \partial b = 0$ por lo que es un ciclo. Concluimos que $[c] = g_*[b - f(a')]$.

Finalmente, nos ocupamos de la exactitud en $H_n(\mathfrak{A})$. Si $[a] = \partial_*[c]$, manteniendo las notaciones anteriores, se tiene $f(a) = \partial b$ por lo que $f_*[a] = 0$. Por otro lado, si $f_*[a] = 0$, existe una cadena b que satisface $\partial b = f(a)$, por lo que $\partial g(b) = g(\partial b) = 0$, y podemos obtener $\partial_*[c] = [a]$ definiendo $c = g(b)$, el cual es un ciclo. El resultado sigue. $\square$

Homología simplicial relativa. Sea Σ un Δ -complejo, y sea Υ un subcomplejo. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i} \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma) \xrightarrow{p} \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon) \rightarrow \{0\},$$

donde los grupos de cadenas del complejo $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$ son los cocientes

$$C_n^\Delta(\Sigma)/C_n^\Delta(\Upsilon).$$

No es difícil ver que tales cocientes de complejos de cadenas son también complejos de cadenas o, en el lenguaje de la teoría de categorías, la categoría de complejos de cadenas admite cocientes. Concluimos que existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_n^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i_*} H_n^\Delta(\Sigma) \xrightarrow{p_*} H_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^\Delta(\Sigma) \rightarrow \dots,$$

donde $H_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$ es el n -ésimo grupo de homología del complejo $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$. Este recibe el nombre de grupo de homología relativa.

ejemplo 23.2. Sea Σ el n -símplice unitario, visto como un complejo simplicial, y sea Υ su borde. Sabemos por los resultados del capítulo anterior que Σ tiene la homología de un punto, es decir

$$H_n^\Delta(\Sigma) = \{0\}, \text{ si } n \geq 1, \quad H_0^\Delta(\Sigma) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, el complejo $\mathfrak{C}^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$ tiene símplices en dimensión n o mayor, por lo que $H_m^\Delta(\Sigma, \Upsilon) = \{0\}$ para $m < n$. Se sigue que $H_m^\Delta(\Upsilon) \cong H_m^\Delta(\Sigma) \cong \{0\}$ para $0 < m < n - 1$. Afirmamos que $H_m^\Delta(\Sigma, \Upsilon) \cong \mathbb{Z}$ y que $\sigma = [e_0, \dots, e_n]$ es un generador. Este símplice es claramente un ciclo, pues cada símplice de su borde es 0 en el cociente, y es no nulo como elemento de $C_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$. De hecho, este último es el grupo libre generado por todos los símplices combinatoriales que son permutaciones de σ . Por un razonamiento similar, $C_{n+1}^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$ es el grupo libre generado por los símplices de la forma $\sigma = [a_0, \dots, a_{n+1}]$ que tienen a lo más un vértice repetido. El borde de cualquiera de tales símplices es una expresión del tipo

$$\rho(\sigma) - \left(\text{sgn}(\rho^{-1}\lambda) \right) \lambda(\sigma),$$

donde ρ y λ son permutaciones de la base canónica. Por ejemplo

$$\partial[e_1, e_0, e_2, e_1] = [e_1, e_0, e_2] - [e_0, e_2, e_1],$$

dado que todos los sumandos restantes son símplices combinatoriales con imagen contenida en el borde, y por lo tanto con imagen nula en el grupo $C_n^\Delta(\Sigma, \Upsilon)$. El resultado sigue. La sucesión exacta larga de homología nos queda

$$\dots \rightarrow H_n^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i_*} \{0\} \xrightarrow{p_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^\Delta(\Upsilon) \xrightarrow{i_*} \{0\} \rightarrow \dots$$

Lo que nos dice, no sólo que $H_{n-1}^\Delta(\Upsilon) \cong \mathbb{Z}$, sino también que un generador puede obtenerse calculando el borde de σ . Por los resultados del capítulo anterior, y utilizando la observación de que $|\Upsilon| \cong S^{n-1}$ es la $(n-1)$ -esfera, obtenemos también la fórmula $H_n^{\text{sing.}}(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Homología singular relativa. Sea X un espacio topológico, y sea Y un subespacio. Nuevamente, existe una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sign.}}(Y) \xrightarrow{i} \mathfrak{C}^{\text{sign.}}(X) \xrightarrow{p} \mathfrak{C}^{\text{sign.}}(X, Y) \rightarrow \{0\},$$

donde el complejo $\mathfrak{C}^{\text{sign.}}(X, Y)$ se define como el complejo cociente. Concluimos que existe una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sign.}}(Y) \xrightarrow{i_*} H_n^{\text{sign.}}(X) \xrightarrow{p_*} H_n^{\text{sign.}}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sign.}}(Y) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}^{\text{sign.}}(X) \rightarrow \dots$$

Nuevamente, $H_n^{\text{sign.}}(X, Y)$ recibe el nombre de grupo de homología relativa.

ejemplo 23.3. Sea $X = B^n$ la bola unitaria en $\mathbb{R}^n$, y sea $Y = S^{n-1}$. Los cálculos precedentes nos dejan la sucesión exacta

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sign.}}(Y) \xrightarrow{i_*} \{0\} \xrightarrow{p_*} H_n^{\text{sign.}}(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} \{0\} \rightarrow \dots$$

Lo que nos dice que $H_n^{\text{sing.}}(X, Y) \cong \mathbb{Z}$, generado por cualquier ciclo cuyo borde es un generador de $H_{n-1}^{\text{sing.}}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{R}^n - \{0\}$ es homotópicamente equivalente a la $(n-1)$ -esfera, el mismo razonamiento prueba que $H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}$, y que cualquier símple $\sigma : T_u \rightarrow \mathbb{R}^n$ afín que contenga a 0 en su interior es un generador.

Una de las propiedades centrales de los grupos de homología relativa es la siguiente:

Proposición 23.4. (Lema de la escisión). Si A y B son conjuntos abiertos en X , con $X = A \cup B$, entonces la inclusión induce un isomorfismo $j_* : H_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B) \cong H_n^{\text{sing.}}(X, B)$.

Proof. Denotemos por $\wp$ el recubrimiento abierto $X = A \cup B$. Sea c un ciclo singular en $C_n^{\text{sing.}}(X, B)$. Remplazándolo por una subdivisión baricéntrica de ser necesario, podemos suponer que está subordinada a $\wp$. Como las imágenes de los símlices contenidos en B se anulan en el grupo $C_n^{\text{sing.}}(X, B)$ de cadenas relativas, podemos suponer que no hay ninguno, por lo que el ciclo está en $C_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B)$. Concluimos que $[c] \in j_* \left(H_n^{\text{sing.}}(A, A \cap B) \right)$. Por otro lado, si $j_*[c] = 0$, esto significa que existe una cadena singular d en X y una cadena e en B tal que $c = \partial d + e$. Aplicando la subdivisión baricéntrica se tiene

$$\delta^n(c) = \partial \left(\delta^n(d) \right) + \delta^n(e).$$

Escribiendo $\delta^n(d) = d_1 + d_2$, donde cada símplice de d_1 est  contenido en A y cada símplice de d_2 est  contenido en B , se puede escribir

$$\delta^n(c) - \partial d_1 = \left(\partial d_2 + \delta^n(e) \right),$$

donde cada símplice de la cadena de la izquierda está contenido en A y cada símplice de la derecha está contenido en B . Concluimos que $d_3 = \delta^n(c) - \partial d_1$ es una cadena en $A \cap B$ y se tiene $\delta^n(c) = \partial d_1 + d_3$. $\square$

ejemplo 23.5. Sea M una variedad topológica, es decir un espacio localmente homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ para algún n . Entonces, para todo punto $p \in M$, se tiene

$$H_n^{\text{sing.}}(M, M - \{p\}) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Además, para $0 < m < n$ se tiene

$$H_m^{\text{sing.}}(M, M - \{p\}) \cong H_m^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \{0\}.$$

Esto implica que n , la dimensión de M en el punto p , est  bien definido y es localmente constante. Si M es conexa, su dimensión est  bien definida.

El siguiente resultado es bastante útil al comparar sucesiones exactas largas:

Proposición 23.6. (El 5-Lema). *En un diagrama conmutativo de grupos abelianos*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d & & \downarrow e \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

con filas exactas, si los morfismos a , b , d y e son isomorfismos, también lo es c .

Proof. Definamos un complejo simplicial $\mathfrak{A}$, en el cual $A_1 = A$, $A_0 = A'$, y todos los otros grupos de cadenas son 0. Asumimos que $\partial_1 = a$ en este complejo. Entonces a es inyectiva si y sólo si $H_1(\mathfrak{A}) = \{0\}$, mientras que a es epiyectiva si y sólo si $H_0(\mathfrak{A}) = \{0\}$. Se definen, análogamente los complejos $\mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{E}$. Definiendo $\mathfrak{F} = \ker(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})$ y $\mathfrak{G} = \text{Im}(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}) \cong \ker(\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C})$, tenemos una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \{0\}.$$

Del mismo modo definimos sucesiones exactas

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{H} \rightarrow \{0\},$$

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow \{0\},$$

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{I} \rightarrow \{0\}$$

y

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{I} \rightarrow \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{K} \rightarrow \{0\}.$$

Como $\mathfrak{C}$ es acíclico (por ser e un isomorfismo), se tiene $H_1(\mathfrak{J}) \cong H_2(\mathfrak{K}) = \{0\}$, dado que ninguno de los complejos tiene 2-cadenas. Como $\mathfrak{D}$ es acíclico, se tiene $H_1(\mathfrak{J}) \cong H_2(\mathfrak{J}) = \{0\}$ y $H_0(\mathfrak{J}) \cong H_1(\mathfrak{J}) = \{0\}$. Del mismo modo, como A es acíclico, se tiene $H_0(\mathfrak{G}) = \{0\}$, y como $\mathfrak{B}$ es acíclico, se tiene $H_1(\mathfrak{H}) \cong H_0(\mathfrak{G}) = \{0\}$ y $H_0(\mathfrak{H}) = \{0\}$. Ahora se usa la sucesión que contiene a $\mathfrak{C}$ para probar que $H_0(\mathfrak{C})$ y $H_1(\mathfrak{C})$ se anulan. $\square$

ejemplo 23.7. Sea Σ un complejo simplicial, y sea Υ el complejo que se obtiene al remover un n -símplice T , el que no es cara de ningún otro símplice. Sea B el abierto que se obtiene al remover el baricentro de T y sea A el interior de T . El lema de la escisión nos dice que el cálculo se reduce sólo al símplice T , es decir

$$H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, B) \cong H_n^{\text{sing.}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}.$$

Como el polihedro $|\Upsilon|$ es un retracto de deformación de B , en el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, |\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Sigma|) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n^{\text{sing.}}(B) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, B) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(B) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Sigma|) \end{array}$$

todas las funciones verticales, salvo quizás γ son isomorfismos. Una aplicación directa del 5-Lema muestra que γ es un isomorfismo. Del mismo modo, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} H_n^{\Delta}(\Upsilon) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(\Sigma) & \longrightarrow & H_n^{\Delta}(\Sigma, \Upsilon) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\Delta}(\Upsilon) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\Delta}(\Sigma) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \eta & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|) & \longrightarrow & H_n^{\text{sing.}}(|\Sigma|, |\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Upsilon|) & \longrightarrow & H_{n-1}^{\text{sing.}}(|\Sigma|) \end{array}$$

muestra que $H_n^{\Delta}(\Sigma, \Upsilon) \equiv \mathbb{Z}$.

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(A \cap B) \xrightarrow{f} \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(A) \oplus \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(B) \xrightarrow{g} \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X, \varnothing) \rightarrow \{0\},$$
$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(A \cap B) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{sing.}}(A) \oplus H_n^{\text{sing.}}(B) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{sing.}}(X, \wp) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing.}}(A \cap B) \rightarrow \dots$$
$$\dots \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(A \cap B) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{sing.}}(A) \oplus H_n^{\text{sing.}}(B) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{sing.}}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing.}}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

ejemplo 23.8. Sea $X = S^n$ la n -esfera. Sean A y B vecindades abiertas de los hemisferios norte y sur. Nótese que A y B son contractibles, mientras que $A \cap B$ es homeomorfo a la $(n - 1)$ -esfera. En este caso, si $n > 2$, se tiene la siguiente sucesión exacta:

$$\{0\} = H_n^{\text{sing.}}(A) \oplus H_n^{\text{sing.}}(B) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{sing.}}(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{sing.}}(A \cap B) \rightarrow \dots$$

$$\xrightarrow{\quad} H_n^{\text{sing.}}(A) \oplus H_n^{\text{sing.}}(B) = \{0\} \quad ,$$

ejemplo 23.9. Este ejemplo generaliza el que precede. Para todo espacio topológico X , el cono $C(X)$ sobre X se define identificando en un punto todos los elementos de la forma $(x, 1) \in X \times I$, donde $I = [0, 1]$ es el intervalo cerrado. La suspensión $\Sigma(X)$ de X se define identificando en un punto los elementos de la base del cono, es decir los elementos de la forma $(x, 0) \in C(X)$.

Ciertamente todo cono es contractible, mientras que $\Sigma(X)$ puede verse como la unión de dos conos cuya intersección es homotópicamente equivalente a X (se retrae al ecuador). Concluimos, por un razonamiento análogo al del ejemplo precedente que $H_n^{\text{sing.}}(\Sigma(X)) \cong H_{n-1}^{\text{sing.}}(X)$. para $n \geq 2$.

La sucesión de Mayer-Viettoris simplicial. Consideremos ahora un Δ -complejo Σ , el que podemos escribir como unión de dos sub-complejos $\Sigma = \Upsilon \cup \Omega$. En este caso aún tenemos una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Upsilon \cap \Omega) \xrightarrow{f} \mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Upsilon) \oplus \mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Omega) \xrightarrow{g} \mathfrak{C}^{\text{sing.}}(\Sigma) \rightarrow \{0\},$$

dado que, aquí, cada símplice está contenido en un complejo o en el otro por definición. De nuevo, se definen las funciones de cadenas mediante $f(c) = (c, -c)$ y $g(a, b) = a + b$. Aplicando la teoría general, obtenemos una sucesión exacta larga de grupos de homología

$$\dots \rightarrow H_n^{\text{simp.}}(\Upsilon \cap \Omega) \xrightarrow{f_*} H_n^{\text{simp.}}(\Upsilon) \oplus H_n^{\text{simp.}}(\Omega) \xrightarrow{g_*} H_n^{\text{simp.}}(\Sigma) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}^{\text{simp.}}(\Upsilon \cap \Omega) \rightarrow \dots$$

Puede obtenerse un resultado análogo para la Δ -homología.

Ejercicios: (Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos).

1. Calcule los grupos de homología del espacio que se obtiene al unir la esfera de radio 1 con su proyección en el plano XY .
2. Calcule la homología del espacio que se obtiene al identificar los polos norte de n esferas en un punto, y los polos sur de las mismas esferas en un punto.
3. calcule los grupos de homología del toro, escribiendo este como la unión de dos espacios homotópicamente equivalentes al círculo.
4. Calcule los grupos de homología del complemento de n puntos en $\mathbb{R}^n$.
5. Calcule los grupos de homología del complemento de una m -esfera en $\mathbb{R}^n$, con $m < n$.
6. Calcule los grupos de homología del espacio que se obtiene al remover un círculo de un toro sólido, como el de la Figura 23.1.A.

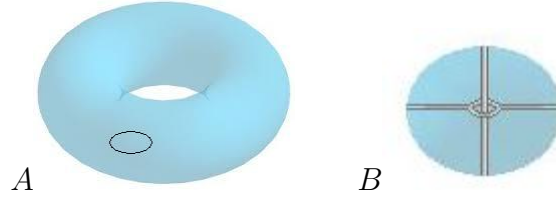


Figure 23.1: Un toro sólido, menos un círculo (A) y una esfera con dos túneles (B).

7. Calcule los grupos de homología del complemento de un nudo en $\mathbb{R}^3$. Depende este cálculo del nudo?
8. Calcule los grupos de homología del espacio que se obtiene al cavar, de una esfera, los túneles indicados en la Figura 23.1.B.
9. Probar que para todo espacio topológico X se tiene

$$H_0^{\text{sing.}}(X) \cong H_1^{\text{sing.}}(\Sigma(X)) \oplus \mathbb{Z}.$$

10. Sea Σ un Δ -complejo. Considere un complejo de cadenas $\mathfrak{C}^\Gamma(\Sigma) \subseteq \mathfrak{C}^\Delta(\Sigma)$ que contiene, precisamente, aquellas cadenas con coeficiente nulo para cada símplice degenerado.
 - (a) Pruebe que este es un complejo de cadenas, y defina los grupos de Γ -homología $H_n^\Gamma(\Sigma)$.
 - (b) Demuestre que la sucesión de Mayer-Vietoris es exacta en este caso.
 - (c) Defina los grupos de Γ -homología relativa $H_n^\Gamma(\Sigma, \Upsilon)$, y calcule el grupo de Γ -homología relativo $H_n^\Gamma(\Sigma^n, \Sigma^{n-1})$, donde Σ^n denota el $(n-1)$ -esqueleto de un Δ -complejo.
 - (d) Es la Γ -homología un invariante de homotopía? Justifique.

Chapter 24

Teoría del grado y homología celular.

Recordemos que la n -homología de la n -esfera S^n está dada por $H_n^{\text{sing.}} \cong \mathbb{Z}$. En particular, esto nos dice que, para toda función continua $f : S^n \rightarrow S^n$, existe un entero $d = d(f)$ para el cual se tiene $f_*[c] = d[c]$, para todo ciclo singular c en la esfera. Este entero $d(f)$ recibe el nombre de grado de la función f . Este grado juega un papel fundamental en la topología de la esfera. En este capítulo veremos algunas aplicaciones de esta definición.

El siguiente resultado se demuestra de manera análoga al Ejemplo 13.4, con una homotopía del tipo

$$H(x, t) = \frac{f(x) + t[-x - f(x)]}{\|f(x) + t[-x - f(x)]\|}.$$

Proposición 24.1. *Una función continua $f : S^n \rightarrow S^n$ sin puntos fijos es homotópica a la función antipodal $a(x) = -x$.* $\square$

Corolario 24.1.1. *Una función continua $f : S^n \rightarrow S^n$ sin puntos fijos tiene el mismo grado que la función antipodal.* $\square$

Esto plantea el problema de calcular el grado de la función antipodal. Para ello consideramos un complejo simplicial Σ_n con un vértice en el punto cartesiano correspondiente a cada vector e_i de la base canónica de $\mathbb{R}^{n+1}$, o su inverso $-e_i$, y con todos los símlices de la forma $[\varepsilon_1 e_{i_1}, \dots, \varepsilon_k e_{i_k}]$, donde $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n\}$ son diferentes y cada ε_i es 1 o -1 (ver Figura 24.1). Este complejo tiene un polihedro homeomorfo a la n -esfera, y no es difícil ver

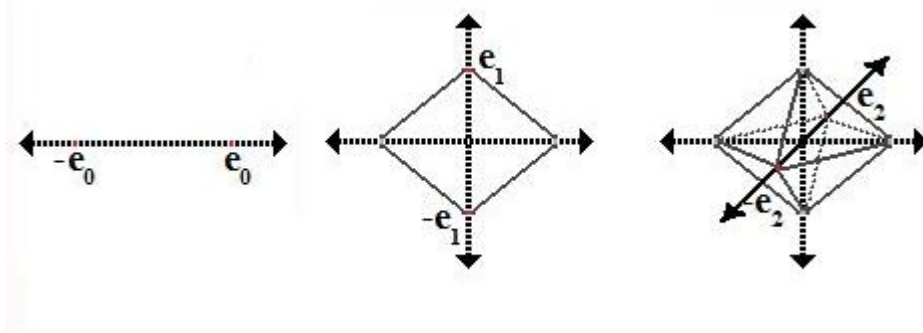


Figure 24.1: La triangulación del texto para las esferas de dimensión 0,1 y 2.

que un generador de su Δ -homología en dimensión n (y por lo tanto también de su homología singular) está dado por la suma

$$c = \sum_{\vec{\varepsilon}} (\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n) |[\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n]|,$$

donde $\vec{\varepsilon}$ recorre el conjunto de todos los vectores reales con coordenadas 1 o -1 . Ahora observamos que, en Σ_n , la función antipodal es, de hecho, simplicial, y se tiene

$$a_{\Delta}(c) = \sum_{\vec{\varepsilon}} (\varepsilon_0 \cdots \varepsilon_n) |[-\varepsilon_0 e_0, \dots, -\varepsilon_n e_n]| = (-1)^n c.$$

Concluimos que el grado de la función antipodal es $(-1)^{n+1}$.

Corolario 24.1.2. *Si el grado de una función continua $f : S^n \rightarrow S^n$ es diferente de $(-1)^{n+1}$, entonces f tiene un punto fijo.* $\square$

Corolario 24.1.3. *Si G es un grupo topológico homeomorfo a la esfera S^n , entonces n es par.*

Proof. Si g es un elemento diferente de la identidad, la función $x \mapsto gx$ no tiene puntos fijos, pero esta función debe ser homotópica a la identidad mediante una homotopía del tipo $H(x, y) = \gamma(t)x$, donde γ es una curva que une la identidad con g . concluimos que $(-1)^{n+1} = 1$. $\square$

Recordemos que un campo vectorial en una variedad diferenciable M es una función diferenciable f de M en su fibrado tangente TM que satisface $f(p) \in T_p M$ para cada punto $p \in M$. Un campo vectorial define un flujo $\Phi : M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ mediante la ecuación diferencial $\frac{d}{dt}\Phi(x, t) = V(x)$.

Corolario 24.1.4. *Sea $V : S^n \rightarrow TS^n$ un campo vectorial en la esfera. Entonces existe un punto $p \in S^n$ que satisface $V(p) = 0$.*

Proof. La función $x \mapsto \Phi(x, t)$ debe tener un punto fijo para cada t . Si $\{t_m\}_m$ es una sucesión que converge a cero, podemos encontrar una sucesión $x_m \in S^n$ tal que $\Phi(x_m, t_m) = x_m$. La sucesión $\{x_m\}_m$ debe tener un punto de acumulación x_∞ , y en este se tiene $\frac{d}{dt}\Phi(x_\infty, 0) = 0 = V(x_\infty)$. $\square$

Proposición 24.2. *Una función continua impar $f : S^n \rightarrow S^n$ debe tener grado impar.*

Proof. Observemos primero que si f es impar, entonces tiene una aproximación simplicial impar. Esto sigue del hecho de que una aproximación simplicial s sólo necesita cumplir con la condición

$$f(\text{Est}(v)) \subseteq \text{Est}(s(v)),$$

por lo que las imágenes pueden escogerse de modo que respeten antípodas.

Utilizaremos la homología con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}_2$ con dos elementos. No es difícil ver que, en este caso, un generador de la homología es

$$\bar{c} = \sum_{\vec{\varepsilon}} |[\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n]|,$$

para el complejo simplicial definido antes, ya que el signo en el coeficiente ya no es relevante. Una función continua tiene grado impar sí y sólo si induce un isomorfismo a nivel de $H_n^{\text{sing.}}(S^n, \mathbb{F}_2)$. En caso contrario inducirá la función 0. Asumiremos esto último para llegar a una contradicción.

Definimos

$$b = \sum_{\substack{\vec{\varepsilon} \\ \varepsilon_n=1}} |[\varepsilon_0 e_0, \dots, \varepsilon_n e_n]|,$$

de modo que se tenga $\bar{c} = b + a_\Delta(b)$. Consideremos una aproximación simplicial $s : \Sigma_n^{(m)} \rightarrow \Sigma_n$, donde Σ es el complejo simplicial definido antes, y ponemos $b_0 = \delta^m b$. Como esta función tiene grado par debe inducir la función

0 a nivel de homología. Utilizando el hecho de que la homología singular es homeomorfa a la Γ -homología (véase [Cap. 3, Ejer. 10]), dado que no hay Γ cadenas no triviales de dimensión $n + 1$, la imagen bajo s_Δ de cualquier generador de la Γ -homología de $\Sigma_n^{(m)}$ debe ser trivial. En otras palabras, tenemos $s_\Delta(b_0) + a_\Delta s_\Delta(b_0) = 0$, es decir $s_\Delta(b_0) = a_\Delta s_\Delta(b_0)$. Concluimos que cada vez que un símplice aparece en la expresión de $s_\Delta(b_0)$, también aparece su antipodal. En particular, puede escribirse $s_\Delta(b_0) = h + a_\Delta(h)$ para cierta cadena h .

Supongamos primero que $n = 1$, de modo que $b = |[e_0, e_1]| + |[-e_0, e_1]|$. En este caso $\partial b_0 = \partial b = |[e_0]| + |[-e_0]|$, por lo que

$$\partial s_\Delta(b_0) = |[s(e_0)]| + |[s(-e_0)]| = |[s(e_0)]| + |[-s(e_0)]|.$$

Por otro lado, se tiene

$$\partial s_\Delta(b_0) = \partial h + \partial a_\Delta(h),$$

es decir la suma de un número par de vértices (∂h) y sus antípodas. La expresión de más arriba no tiene esa forma, lo que demuestra el teorema en este caso.

Más generalmente, ∂b_0 es el ecuador de $\Sigma_n^{(m)}$, por lo que puede escribirse $\partial b_0 = b_1 + a_\Delta(b_1)$, donde

$$b_1 = \delta^m \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-2}} |[\epsilon_0 e_0, \dots, \epsilon_{n-2} e_{n-2}, e_{n-1}]|,$$

suma que se extiende sobre todas las posibles elecciones de los signos ϵ_i . En particular, se tiene

$$\partial h + s_\Delta(b_1) = a_\Delta(\partial h + s_\Delta(b_1)),$$

de donde tenemos, por el mismo razonamiento anterior

$$\partial h + s_\Delta(b_1) = h_1 + a_\Delta(h_1),$$

para cierta cadena h_1 . Aplicando el operador borde y utilizando la fórmula $\partial^2 = 0$, obtenemos

$$s_\Delta(\partial b_1) = \partial s_\Delta(b_1) = \partial h_1 + a_\Delta(\partial h_1).$$

Como ∂b_1 es el ecuador de la $n - 1$ esfera, podemos definir b_2 por la fórmula

$$b_2 = \delta^m \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-3}} |[\epsilon_0 e_0, \dots, \epsilon_{n-3} e_{n-3}, e_{n-2}]|,$$

como antes, para obtener $\partial b_1 = b_2 + a_\Delta(b_2)$, y por ende

$$\partial h_1 + s_\Delta(b_2) = a_\Delta(\partial h_1 + s_\Delta(b_2)).$$

Iterando este proceso obtenemos finalmente

$$\partial h_{n-2} + s_\Delta(b_{n-1}) = h_{n-1} + a_\Delta(h_{n-1}),$$

donde $b_{n-1} = \delta^m (|[e_0, e_1]| + |[-e_0, e_1]|)$, y la demostración se termina como antes. $\square$

Corolario 24.2.1. (Teorema de Borsuk-Ulam). *Sea $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces existe un punto $x \in S^n$ para el cual $f(x) = f(-x)$.*

Proof. En caso contrario, la fórmula $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$ define una función impar $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$. Su restricción al ecuador es una función $g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ que es homotópica a una constante, por lo que tiene grado cero. Esto contradice el resultado anterior. $\square$

Corolario 24.2.2. (Teorema del sandwich de Jamón y queso). *Dados tres conjuntos medibles y acotados en el espacio, existe un plano que los bisecta simultáneamente a los tres.*

Proof. Llamemos a estos conjuntos A , B y C . Sea $\vec{u} \in S^2$ un vector unitario, y sea L un plano perpendicular a $\vec{u}$. Sean Ω_1 y Ω_2 los dos semi-espacios determinados por L . Para fijar ideas, digamos que Ω_1 se encuentra en la dirección de $\vec{u}$. Nótese que $\text{Vol}(A \cap \Omega_1) - \text{Vol}(A \cap \Omega_2)$ varía continuamente con la posición de L , mientras que su valor converge a $\text{Vol}(A)$ cuando esta posición se aleja hacia el infinito en una dirección, y a $-\text{Vol}(A)$ en la dirección contraria. Concluimos que es posible escoger dicho plano de modo que bisecte a A , es decir $\text{Vol}(A \cap \Omega_1) = \text{Vol}(A \cap \Omega_2)$.

Define la función

$$f(\vec{u}) = (\text{Vol}(B \cap \Omega_1), \text{Vol}(C \cap \Omega_1)).$$

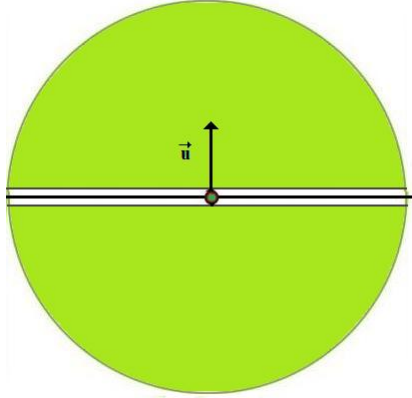


Figure 24.2: La esfera de la demostración del Teorema del sandwich de Jamón y queso.

Afirmamos que esta es una función continua de S^2 en $\mathbb{R}^2$, por lo que existe un valor del vector unitario $\vec{u}$ para el cual $f(\vec{u}) = f(-\vec{u})$. Nótese que remplazar $\vec{u}$ por $-\vec{u}$ intercambia Ω_1 y Ω_2 , por lo que se sigue el resultado.

Falta probar la continuidad. Esto requiere algo de geometría. Consideremos una bola suficientemente grande para contener a todos los conjuntos, y removamos de ella una pequeña vecindad de la parte del plano L que la intersecta. Si $\text{Vol}(A) = V$, la intersección de A con cada una de las zonas verdes de la Figura 24.2 contiene un volumen entre $\frac{V}{2} - \varepsilon$ y $\frac{V}{2}$. Además, el resto de A se ubica en la franja intermedia. Concluimos que, para vectores unitarios $\vec{v}$ cercanos a $\vec{u}$, el plano P que es perpendicular a $\vec{v}$ y bisecta a A se encuentra muy cerca de la franja, por lo que las regiones en las que P divide a B y C son también similares. Dejamos los detalles al lector.

□

Homología celular:

En esta sección daremos una generalización de la homología simplicial que simplifica bastante los cálculos y coincide con la homología singular. La homología simplicial es un caso particular de esta, por lo que, en particular, este resultado implica que la homología simplicial coincide con la singular. Antes de entrar en materia necesitamos un pequeño lema:

Lema 24.3. Sea $B_n \subseteq \mathbb{R}^n$ la bola de centro $\vec{0}$ y radio 1, y sea ∂B_n su borde. Entonces, existe un isomorfismo canónico entre $H_n^{\text{sing.}}(B_n, \partial B_n)$ y $H_n^{\text{sing.}}(S^n)$.

Proof. Razonando como en el ejemplo 23.7, observamos que $H_n^{\text{sing.}}(B_n, \partial B_n)$ es canónicamente isomorfo al grupo $H_n^{\text{sing.}}(B_n, B_n - \{\vec{0}\})$ de homología local en $\vec{0}$. Basta por lo tanto observar que lo mismo vale para el grupo $H_n^{\text{sing.}}(S^n)$. Esto último sigue de la sucesión exacta

$$\tilde{H}_n^{\text{sing.}}(S^n - \{p\}) \rightarrow \tilde{H}_n^{\text{sing.}}(S^n) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(S^n, S^n - \{p\}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}^{\text{sing.}}(S^n - \{p\}),$$

donde se utiliza la homología reducida para incluir el caso $n = 1$. Dado que $S^n - \{p\}$ es contractible, ambos extremos de la sucesión son grupos triviales, por lo que el morfismo central es un isomorfismo. $\square$

Sea $B_n/\partial B_n$ el espacio que se obtiene al identificar todo el borde a un punto. La existencia del isomorfismo canónico de arriba es lo que permite hablar de homeomorfismos entre $B_n/\partial B_n$ y S^n que preservan (o invierten) la orientación. Definiremos este concepto en mayor generalidad en las secciones que siguen.

Recordemos ahora la definición de CW-complejo dada en el capítulo 14. Un CW-complejo, o mejor dicho su espacio topológico subyacente X se obtiene como la unión (límite directo) de una sucesión de espacios $\{X^{(n)}\}_n$, donde cada $X^{(n)}$ se obtiene del anterior $X^{(n-1)}$ adjuntando una familia de n -bolas euclideas $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I_n}$, las n celdas, mediante funciones de pegado $g_\alpha : \partial B_\alpha \rightarrow X^{(n-1)}$. El espacio $X^{(0)}$ es discreto. Afirmamos que existe un isomorfismo canónico

$$H_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong \bigoplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z}\alpha.$$

De hecho, $X^{(n-1)}$ es un retracto del espacio $Y = X^{(n)} - \{p_\alpha | \alpha \in I_n\}$, el cual se obtiene removiendo el centro p_α de cada celda B_α . Razonando como en el ejemplo 23.7, podemos concluir que $H_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \cong H_n^{\text{sing.}}(X^{(n)}, Y)$. Utilizando el Lema de la Escisión, puede remplazarse $X^{(n)}$ por un conjunto de la forma $\bigcup_{\alpha \in I_n} V_\alpha$, donde V_α es una vecindad del punto p_α . El resultado sigue fácilmente de esta observación y del cálculo de la homología local en $\mathbb{R}^n$.

Definamos ahora un complejo de cadenas $\mathfrak{C}^{\text{cel.}}$ como sigue: El grupo de n -cadenas se define por

$$C_n^{\text{cel.}} = \bigoplus_{\alpha \in I_n} \mathbb{Z}\alpha,$$

exacta larga precedente aparecen $j_{*,n}$ y $\partial_{*,n}$. Now we consider the following chain of isomorphisms:

$$\begin{aligned}
 H_n(\mathfrak{C}^{\text{cel.}}) &= \frac{\ker \delta_n}{\text{Im} \delta_{n+1}} \cong \frac{\ker(j_{*,n-1} \circ \partial_{*,n})}{\text{Im}(j_{*,n} \circ \partial_{*,n+1})} \cong \frac{\ker(\partial_{*,n})}{j_{*,n}(\text{Im}(\partial_{*,n+1}))} \\
 &= \frac{j_{*,n}(H_n(X^{(n)}))}{j_{*,n}(\partial_{*,n+1}(H_n(X^{(n+1)}, X^{(n)})))} \cong \frac{H_n(X^{(n)})}{\partial_{*,n+1}(H_n(X^{(n+1)}, X^{(n)}))} \\
 &\cong H_n(X^{(n+1)}) \cong H_n(X).
 \end{aligned}$$

En la primera fila se utilizan sólo las definiciones y el hecho de que $j_{*,n-1}$ es inyectivo. Lo último es una consecuencia de la sucesión exacta larga. En la identidad de la segunda fila se utiliza nuevamente la exactitud de esa sucesión, al remplazar el núcleo de ∂_* por la imagen de j_* . El isomorfismo de esa fila es, de nuevo, una consecuencia de la inyectividad de j_* . El primer isomorfismo de la tercera fila sigue, una vez más, de la sucesión exacta, mientras que el último se prueba por inducción a partir de la sucesión siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \{0\} \cong H_{n+1}(X^{(n+k+1)}, X^{(n+k)}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(X^{(n+k)}) \\
 & \cong & \\
 & \xrightarrow{\quad} & H_n(X^{(n+k+1)}) \longrightarrow H_n(X^{(n+k+1)}, X^{(n+k)}) \cong \{0\},
 \end{array}$$

válido para $k \geq 1$, y del hecho de que cada identidad entre cadenas es válida en algún modelo de papel finito, lo que sólo puede involucrar un número finito de celdas. $\square$

Nos queda por probar el siguiente resultado:

Proposición 24.5. *Si X es el polihedro de un complejo simplicial generalizado Σ , el que puede interpretarse como un CW-complejo de forma natural, entonces, con las definiciones precedentes, se tiene $H_n(\mathfrak{C}^{\text{cel.}}) \cong H_n^{\text{simp.}}(\Sigma)$.*

Proof. Los grupos de n -cadenas son idénticos en ambos complejos, por lo que basta ver que los operadores borde coinciden. Identificamos el borde ∂T del símplece $T = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ con la n -esfera S^n mediante la función

$$f(x) = \frac{x - \bar{a}}{|x - \bar{a}|},$$

donde $\bar{a}$ denote el baricentro. En particular, el generador estándar de la $(n-1)$ -homología singular del borde está dado por la suma

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n].$$

Por otro lado, si identificamos en un punto el complemento, en ∂T , del interior de un símplece $T_i = [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n]$, podemos utilizar la imagen del símplece combinatorial $[a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n]$ como representante del generador estándar de la $(n-1)$ -homología singular de la esfera $S^{(n-1)}$. Esto debido a la hipótesis de que la identificación de $T_i/\partial T_i$ con $S^{(n-1)}$ preserva la orientación. $\square$

Grado de una aplicación entre variedades compactas orientables.

Sea M una variedad conexa sin borde y triangulable. Mostraremos que el concepto de grado se extiende sin dificultad a funciones $f : M \rightarrow M$. Para ello, escojamos un complejo simplicial Σ cuyo polihedro $|\Sigma|$ es homeomorfo a M y lo utilizamos para calcular la homología de M vía homología simplicial. Consideremos dos símlices adyacentes de dimensión máxima n , denotados A y B como en la Figura 24.3. Sea c una cara común entre ambos símlices. Consideremos un ciclo (simplicial) γ de dimensión máxima. Supongamos que el coeficiente de A en γ es no nulo. Entonces el coeficiente de B debe serlo también, y de hecho, existe una única elección de este último coeficiente que permite que el coeficiente de la cara común c se anule. Además, si el coeficiente de A es t , el coeficiente de B es t o $-t$. Lo mismo se aplica a otros vecinos de A o B , e inductivamente a todo los símlices de la triangulación, por ser M conexa.

En particular se concluye lo siguiente:

1. Si existe un ciclo no trivial, este debe ser suma de todos los símlices, con una elección coherente de signo.

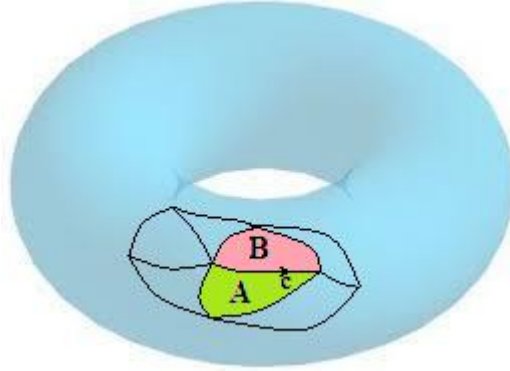


Figure 24.3: Dos símlices adyacentes en una triangulación de una variedad compacta sin borde.

2. Si existe un ciclo no trivial, la triangulación debe tener sólo una cantidad finita de símlices de dimensión máxima. En particular, M es compacta.
3. Un ciclo no trivial existe si y sólo si la elección de signo puede realizarse de manera coherente en todos los símlices de dimensión maximal de la triangulación. En este caso diremos que la triangulación es orientable.
4. Si un ciclo no trivial existe, al no haber cadenas no triviales de dimensión mayor, la homología n -dimensional es no trivial, y de hecho $H_n^{\text{sing.}}(M) \cong \mathbb{Z}$.

Concluimos, de esta última observación, que la orientabilidad es una propiedad de la variedad, no de la triangulación escogida. Le llamaremos una orientación, a una elección de un generador de $H_n^{\text{sing.}}(M)$. Nótese que, como prueba lo dicho más arriba, basta escoger la orientación de un sólo símplex.

Si M es una variedad conexa, compacta, orientable y triangulable, le llamaremos grado $d = \deg(f)$ de una aplicación continua $f : M \rightarrow M$ al número entero d que satisface la relación $f_*(a) = da$ para cada $a \in H_n^{\text{sing.}}(M)$. Es posible también definir el grado de una aplicación continua $f : M \rightarrow N$ entre variedades distintas, pero sólo si se escoge un generador de cada grupo de homología, es decir una orientación de cada variedad.

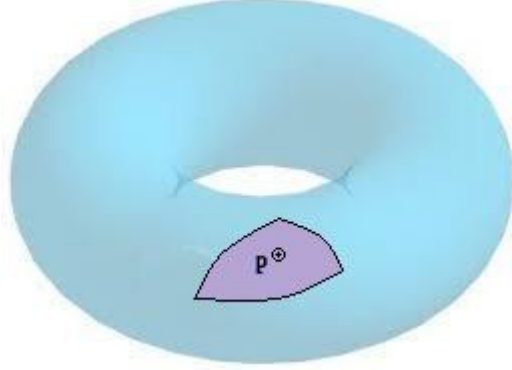


Figure 24.4: Un generador de la homología local.

Grado local y principio local-global.

Sea M como en la sección anterior, y sea $p \in M$. El grupo de homología local $H_{n,p}^{\text{sing.}}(M) = H_n^{\text{sing.}}(M, M - \{p\})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$, de modo que es posible definir un grado local $\deg_p(f)$ mediante la fórmula $f_*(a) = [\deg(f)]b$, donde a es un generador de $H_{n,p}^{\text{sing.}}(M)$ y b es un generador de $H_{n,f(p)}^{\text{sing.}}(M)$, para cada función continua $f : M \rightarrow N$. Esta definición depende, en general, de los generadores a y b . Sin embargo, si $M = N$ es una variedad orientable, es posible escogerlos coherentes, en el sentido de que las orientaciones locales estén inducidas por una misma orientación global. Una manera de visualizar esto es tomando un generador de la homología local, el cual puede ser la imagen de un símple que contenga al punto p en su interior, como el que se muestra en la Figura 24.4. Podemos suponer que el símple mostrado en la figura es uno de los símple del complejo Σ que triangula la variedad, como el que mostramos en la sección anterior. Existe, por lo dicho allí, un único generador $a \in H_n^{\text{sing.}}(M)$ representado con una cadena cuyo coeficiente en el símple dado es 1. De hecho el homomorfismo canónico

$$\rho_* : H_n^{\text{sing.}}(M) \rightarrow H_{n,p}^{\text{sing.}}(M)$$

es un isomorfismo. Más aún, si $f : M \rightarrow N$ es una función continua, para

cada punto $q \in N$ se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M) & \xrightarrow{f_*} & H_n(N) \\ \downarrow \mu_* & & \downarrow \rho_* \\ H_n(M, M - f^{-1}(q)) & \xrightarrow{f_*} & H_{n,q}(N) \end{array}$$

donde μ_* es la función inducida por la proyección

$$\mu : H_n^{\text{sing.}}(M) \rightarrow H_n^{\text{sing.}}(M, M - f^{-1}(q)).$$

Supongamos que la pre-imagen $f^{-1}(q)$ es finita, y que cada uno de sus puntos está en el interior de un símlice, como p en la Figura 24.4 (lo último siempre puede suponerse con una elección apropiada de la triangulación). En tal caso, la homología relativa $H_n^{\text{sing.}}(M, M - f^{-1}(q))$, es la suma directa de los grupos de homología $H_{n,p}^{\text{sing.}}(M)$, donde p recorre $f^{-1}(q)$, y se tiene

$$\mu_*(a) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} a_p,$$

donde cada a_p es un generador del grupo de homología local correspondiente. En particular, se tiene el cálculo siguiente

$$\begin{aligned} [\deg(f)]a_p &= \rho_*([\deg(f)]a_N) = \rho_* \circ f_*(a_M) = f_* \circ \mu_*(a_M) \\ &= \sum_{p \in f^{-1}(q)} f_*(a_p) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f(a_p). \end{aligned}$$

El siguiente resultado es ahora inmediato

Proposición 24.6. (*Principio local global*). *El grado de una función continua entre variedades sin borde, compactas, conexas y triangulables es la suma de los grados locales en las pre-imágenes de cada punto con pre-imagen finita.*

ejemplo 24.7. Sea $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función analítica de la esfera de Riemann en si misma. Recordemos que el grupo de homología local $H_{2,0}(\hat{\mathbb{C}})$ es isomorfo a $H_{2,0}(\mathbb{C}) \cong H_1(\mathbb{C}^*)$. Este último espacio es homotópicamente equivalente

al círculo, por lo que la clase correspondiente a una curva cerrada puede calcularse utilizando el número de vueltas. Si f tiene un cero de orden n en 0 , entonces podemos escribir $f(z) = az^n + f_1(z)$, donde $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(z)z^{-n} = 0$. Es fácil ver que la curva $s \mapsto f(\varepsilon e^{2s\pi i})$ es homotópica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $s \mapsto a\varepsilon^n e^{2ns\pi i}$ para ε suficientemente pequeño ($\varepsilon \ll 1$) mediante una homotopía del tipo

$$H(s, t) = tf(\varepsilon e^{2s\pi i}) + (1-t)a\varepsilon^n e^{2ns\pi i} = a\varepsilon^n e^{2ns\pi i} + tf_1(\varepsilon e^{2s\pi i}),$$

dado que el último término está acotado por $a\varepsilon^n/2$ para $\varepsilon \ll 1$, por lo que la homotopía no se anula. Concluimos que el grado local de f en 0 es igual a n . De este resultado se obtiene fácilmente la fórmula

$$\deg\left(\frac{P}{Q}\right) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$$

para el cociente de dos polinomios P y Q . Dejamos los detalles al lector.

El número de Lefschetz:

Sea Σ un complejo simplicial finito, de modo que en particular $H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$ sea un espacio vectorial de dimensión finita para cada n . Más específicamente $H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\beta_n}$. El entero no negativo β_n se denomina el n -ésimo número de Betty de Σ .

Sea $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma|$ una función continua, y sea $f_{*,n} : H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q}) \rightarrow H_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$ la función que induce a nivel de homología n -dimensional. Definamos

$$\Lambda_f := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(f_{*,n}).$$

Este se denomina número de Lefschetz de f .

Antes de probar el resultado principal de esta sección necesitamos un lema técnico:

Lema 24.8. *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, y sea W un subespacio. Sea $f : V \rightarrow V$ una función lineal que satisface $f(W) \subseteq W$, y sea $\tilde{f} : V/W \rightarrow V/W$ la función inducida. Sea f' la restricción de f a W . Entonces $\text{tr}(f') + \text{tr}(\tilde{f}) = \text{tr}(f)$.*

Proof. Este resultado sigue fácilmente de la observación de que si A es la matriz de f' y B es la matriz de $\tilde{f}$, entonces f tiene una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

□

Proposición 24.9. (Teorema del punto fijo de Lefschetz). Si $f : |\Sigma| \rightarrow |\Sigma|$ es una función continua que satisface $\Lambda_f \neq 0$, entonces f tiene un punto fijo.

Proof. El espacio topológico $X = |\Sigma|$ es compacto y metrizable, por lo que podemos encontrar un mínimo no nulo de la función $x \mapsto d(x, f(x))$, para cualquier métrica de defina la topología. En particular, remplazando Σ por una subdivisión baricéntrica suficientemente fina, podemos suponer que, para cualquier símplice T de Σ , la distancia entre T y $f(T)$ es mayor a tres veces el diámetro de cualquier símplice. Si ahora $s : \Sigma^m \rightarrow \Sigma$ es una aproximación simplicial, entonces afirmamos que la función inducida $s_{\Delta, n} : C_n^{\text{simp.}}(\Sigma^m, \mathbb{Q}) \rightarrow C_n^{\text{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$ satisface $\text{tr}(\delta^m s_{\Delta, n}) = 0$. De hecho, sea T un símplice arbitrario de Σ^m , y sea U un símplice arbitrario de Σ que lo contiene. Sea x un punto interior de T , de modo que el soporte W de $f(x)$ en Σ contiene a $s(x) \in s(U)$. Se sigue que la distancia de $f(x)$ a $s(x)$ es menor que el diámetro de W . Se sigue que la distancia de x a $s(x)$ es mayor al doble del diámetro de un símplice. Se sigue que T y $s(T)$ no se intersectan. Los símplices que aparecen en la expresión $\delta^m s_{\Delta, n}(T)$ son aquellos en los que $s(T)$ se subdivide, por lo que ninguno de ellos coincide con T . La afirmación sigue.

Probaremos ahora que el número de Lefschetz satisface

$$\Lambda_f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{\Delta, n}).$$

Esto termina la demostración. Es claro que

$$\Lambda_f = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(s_{*, n}),$$

por lo que podemos utilizar las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow B_n \rightarrow Z_n \rightarrow H_n \rightarrow 0 \quad \text{y}$$

$$0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0,$$

junto con el lema precedente para escribir

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{*, k}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{Z, k}) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \text{tr}(\delta^m s_{B, k})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{tr}(\delta^m s_{\Delta,k}) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{tr}(\delta^m s_{B,k-1}) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{tr}(\delta^m s_{B,k}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{tr}(\delta^m s_{\Delta,k}),
\end{aligned}$$

donde $s_{Z,k} : Z_k^{\operatorname{simp.}}(\Sigma^{(m)}, \mathbb{Q}) \rightarrow Z_k^{\operatorname{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$ y $s_{B,k} : B_k^{\operatorname{simp.}}(\Sigma^{(m)}, \mathbb{Q}) \rightarrow B_k^{\operatorname{simp.}}(\Sigma, \mathbb{Q})$ son las funciones inducidas correspondientes, y el resultado sigue del hecho de que δ^m induce la identidad a nivel de homología. Nótese que en la suma del medio de la segunda línea aparece una función $s_{B,-1}$ que debe interpretarse como 0. $\square$

ejemplo 24.10. Si $|\Sigma| = S^n$, entonces $\Lambda_f = 1 + (-1)^n \deg(f)$, con lo que se recupera el criterio dado al comienzo de este capítulo para que una función entre esferas tenga un punto fijo.

La característica de Euler de un espacio compacto triangulable X se define por $\chi(X) = \Lambda_{\operatorname{id}}$, el número de Lefschetz de la identidad. La demostración del Teorema de Punto Fijo de Lefschetz muestra que esta puede calcularse utilizando la fórmula

$$\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k N_k,$$

donde N_k es el número de k -símplices en una triangulación dada de X . Esta tiene la propiedad aditiva

$$\chi(X_1 \cup X_2) = \chi(X_1) + \chi(X_2) - \chi(X_1 \cap X_2),$$

cuando cada uno de los espacios involucrados es triangulable, como puede comprobarse fácilmente utilizando, por ejemplo, la sucesión de Mayer Vietoris. También pueden probarse los siguientes resultados, de manera análoga a los Corolarios 24.1.3 y 24.1.4:

Corolario 24.10.1. Si G es un grupo topológico compacto triangulable no trivial, entonces $\chi(G) = 0$. $\square$

Corolario 24.10.2. Si M es una variedad compacta triangulable que admite un campo vectorial $V : M \rightarrow TM$ que no se anula en ningún punto, entonces $\chi(M) = 0$. $\square$

En el segundo corolario no consideramos a un punto como una variedad.

Ejercicios: (Todos los complejos simpliciales considerados se asumen finitos).

1. Sea $\hat{\mathbb{C}}$ la esfera de Riemann. Sea $h = \frac{p}{q}$ una función racional. Recuerde que h define una función continua $\tilde{h} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que extiende la evaluación en h . Demuestre que el grado (topológico) de h es el máximo entre los grados (como polinomios) de p y q .
2. Probar que si $f : S^m \rightarrow S^n$ es impar, entonces $m \leq n$ (Sugerencia: Usar el Teorema de Borsuk-Ulam).
3. Extienda el Teorema del Sandwich de Jamón y Queso a dimensión n .
4. Para cada entero n , sea T_n la transformación lineal con matriz $\begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & n \end{pmatrix}$. Para que valor de n la función que T_n induce en el toro es homotópica a una transformación sin puntos fijos?
5. Utilice la sucesión de Mayer Vietoris para probar la aditividad de la característica de Euler.
6. Suponga que $X = X_1 \cup X_2$, y que existe una triangulación de X en la que X_1 y X_2 sean polihedros de subcomplejos. Dar una demostración directa de la aditividad de la característica de Euler.
7. Sea β_n el n -ésimo número de Betty de un espacio triangulable X , es decir $H_n^{\text{sing.}}(X, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\beta_n}$. Probar que la característica de Euler satisface $\chi(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k$. Utilice esta propiedad para calcular β_1 cuando X es la superficie orientable de género g .
8. Puede extenderse la propiedad anterior a los números de Betty módulo 2, los que satisfacen $H_n^{\text{sing.}}(X, \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2^{\beta_n}$?
9. Sea Σ un complejo simplicial y $s : \Sigma \rightarrow \Sigma$ una función simplicial. Probar que los puntos fijos de s forman un subcomplejo Υ de la subdivisión baricéntrica de Σ y que $\chi(|\Upsilon|) = \Lambda_s$. En particular, probar que si s sólo tiene puntos fijos aislados, entonces tiene exactamente Λ_s puntos fijos.

Chapter 25

Cohomología.

Un complejo de co-cadenas es esencialmente lo mismo que un complejo de cadenas, excepto que los morfismos, llamado en este caso operadores co-borde, van en la dirección contraria, del grupo de co-cadenas de menor dimensión al de mayor dimensión. Para ser precisos, un complejo de co-cadenas $\mathfrak{C}$ consiste en un grupo de co-cadenas C^n en cada dimensión, y un operador co-borde $\delta_n : C^n \rightarrow C^{n+1}$, el cual utilizamos para definir el grupo de n -cobordes $Z_n(\mathfrak{C}) = \ker(\delta_n)$ y el grupo de n -cociclos $B^n(\mathfrak{C}) = \delta_{n-1}(C^{n-1}) \subseteq C^n$. También en este caso imponemos la condición $\delta_n \circ \delta_{n-1} = 0$, lo que implica que $B^n(\mathfrak{C}) \subseteq Z^n(\mathfrak{C})$, por lo que podemos definir los grupos de cohomología mediante

$$H^n(\mathfrak{C}) = \frac{Z^n(\mathfrak{C})}{B^n(\mathfrak{C})},$$

como antes. Alternativamente, podemos interpretar un complejo de co-cadenas, como un complejo de cadenas que tiene grupos de cadenas no triviales sólo en dimensión no positiva. Por esta razón, muchas de las propiedades de los complejos de cadenas se trasladan, sin mayor esfuerzo a la nueva situación.

El camino más común para definir un complejo de co-cadenas a partir de un complejo de cadenas es dualizar. Si $\mathfrak{C}$ es un complejo de cadenas, su complejo de co-cadenas dual $\mathfrak{C}^* = \text{Hom}(\mathfrak{C}, A)$ se define por los grupos de co-cadenas $C^n = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_n, A)$, para cierto grupo abeliano A fijo, que supondremos igual a $\mathbb{Z}$ si no se especifica lo contrario. El operador coborde δ es, en este caso, el dual $\delta = \partial'$ del operador borde usual ∂ , y definimos los grupos de cohomología de $\mathfrak{C}$ mediante $H^n(\mathfrak{C}) = H^n(\mathfrak{C}^*)$. Con esta convención, definimos los grupos de cohomología singular de un espacio topológico, o los

grupos de cohomología simplicial y Δ -cohomología de un complejo de celdas, en términos de los duales de los correspondientes complejos de cadenas. Por ejemplo, para un complejo simplicial Σ y un espacio topológico X definimos

$$H_{\text{simp.}}^n(\Sigma; A) = H^n(\mathfrak{C}^{\text{simp.}}(\Sigma)), \quad H_{\text{sing.}}^n(X; A) = H^n(\mathfrak{C}^{\text{sing.}}(X)).$$

Del mismo modo, cada morfismo $f : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$ entre complejos de cadenas define un dual $f' : \mathfrak{D}^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$, que es también un morfismo de cadenas, lo que nos permite definir funciones $f^* : H^n(\mathfrak{D}) \rightarrow H^n(\mathfrak{C})$ a nivel de cohomología. El concepto de homotopía de cadenas se extiende también al nuevo contexto, y podemos definir homotopías de co-cadenas simplemente dualizando homotopías de cadenas. La ecuación $K\partial + \partial K = f - g$ implica, dualizando, la ecuación

$$K'\delta + \delta K' = f' - g'$$

para el complejo dual. Esto demuestra, por ejemplo, la invarianza de los grupos de cohomología bajo equivalencia homotópica, es decir

Proposición 25.1. *Espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de cohomología isomorfos.*

Los detalles se dejan al lector.

Con lo dicho hasta aquí podrá parecer que los grupos de cohomología son una variación sencilla de los grupos de homología, con lo que el lector se preguntará si entregan realmente información nueva. De hecho es posible, como veremos a continuación, calcular los grupos de cohomología directamente a partir de los grupos de homología. Sin embargo, es posible dotar, a la suma directa de los grupos de homología, una estructura de anillo gradado, la que no es fácil de definir, en la mayoría de los casos, para su contraparte homológica. Los grupos de cohomología de variedades diferenciables tienen también una versión analítica, en términos de formas diferenciales, como veremos en un capítulo posterior (aún no escrito en esta versión de los apuntes).

A fin de calcular los grupos de cohomología a partir de la homología necesitamos ciertas herramientas del álgebra homológica. Específicamente, precisamos la definición del functor Ext . Para estos efectos, definimos una resolución libre, de un grupo abeliano A , como una sucesión exacta corta de grupos abelianos

$$\{0\} \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow \{0\}$$

donde K y F son grupos libres. Tal sucesión siempre existe, dado que podemos tomar un conjunto de generadores de A , interpretarlo como las imágenes

de los generadores de un grupo libre F , y definir K como el núcleo de homomorfismo así obtenido. Nótese de que aquí usamos el hecho de que todo subgrupo de un grupo abeliano libre es libre.

Nótese que podemos definir un complejo de cadenas $\mathfrak{A}$, donde $C_0(\mathfrak{A}) = F$, $C_1(\mathfrak{A}) = K$ y $C_n(\mathfrak{A}) = \{0\}$ para $n \geq 2$, utilizando, como único operador borde no trivial, la inclusión de K en F . Este complejo satisface $H_0(\mathfrak{A}) \cong A$ y $H_n(\mathfrak{A}) \cong \{0\}$ para $n \geq 1$, como el lector comprobará fácilmente. Nos referiremos a este complejo como un complejo resolución del grupo abeliano A .

Lema 25.2. *Dos complejos resolución arbitrarios de un grupo abeliano fijo A son homotópicamente equivalentes. Cada homomorfismo de grupos abelianos $f : A \rightarrow A'$ induce una función de cadenas $f_\Delta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ entre los correspondientes complejos resolución, la que es única módulo homotopía.*

Proof. Basta probar la última afirmación para una resolución arbitraria, pues si $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ son dos complejos resolución del mismo módulo, lo anterior implica la existencia de morfismo de cadenas $h : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$ y $n : \mathfrak{A}_2 \rightarrow \mathfrak{A}_1$ inducidas por la identidad, mientras las composiciones $h \circ n$ y $n \circ h$ son homotópicas a las identidades respectivas por la condición de unicidad incluida en la última afirmación.

Para probar la existencia de la función de cadenas necesitamos completar el homomorfismo f a un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{d} & F & \xrightarrow{e} & A \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ K' & \xrightarrow{d'} & F' & \longrightarrow & A' \end{array} .$$

Para definir f_0 se escoge una base de F , y a cada uno de sus miembros v se le asocia una pre-imagen del elemento correspondiente $f \circ e(v) \in B$. Lo mismo se hace para definir f_1 . Para tener una homotopía entre dos de tales funciones de cadenas f_Δ y $\tilde{f}_\Delta$, descritas respectivamente por morfismos con y sin tilde, basta encontrar un homomorfismo $k : F \rightarrow K'$ que cumpla las identidades

$$d' \circ k = f_0 - \tilde{f}_0, \quad k \circ d = f_1 - \tilde{f}_1.$$

Esto se realiza como sigue: Para que k satisfaga la primera condición se utiliza una base de F y se escoge, para cada miembro v una pre-imagen, bajo d' , de $f_0(v) - \tilde{f}_0(v)$, la que existe dado que $f_0(v)$ y $\tilde{f}_0(v)$ tienen la misma

imagen en B . Para probar que también se cumple la segunda, escogemos un elemento $r \in K$ y calculamos

$$d' \circ k \circ d(r) = f_0(d(r)) - \tilde{f}_0(d(r)) = d'(f_1(r) - \tilde{f}_1(r)),$$

donde utilizamos el hecho de que f_Δ y f'_Δ son morfismos de cadenas. Concluimos recordando que d' es inyectiva. $\square$

Para todo grupo abeliano B , el grupo $\text{Ext}(A, B)$ se define como el conúcleo del homomorfismo $\text{Hom}(F, B) \rightarrow \text{Hom}(K, B)$, donde $\text{Hom}(X, B)$ denota el grupo de homomorfismos de X a B como grupos abelianos. Este functor puede calcularse a partir de los complejos resolución. De hecho, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración es directa y se deja al lector:

Lema 25.3. *El dual $\mathfrak{A}^* = \text{Hom}(\mathfrak{A}, B)$ de un complejo resolución $\mathfrak{A}$ de un grupo abeliano A satisface $H^0(\mathfrak{A}^*) \cong \text{Hom}(A, B)$ y $H^1(\mathfrak{A}^*) \cong \text{Ext}(A, B)$.*

ejemplo 25.4. Si A es un grupo libre podemos escoger $K = \{0\}$, por lo que se tiene $\text{Ext}(A, B) = 0$.

Lema 25.5. *Sea $\{0\} \rightarrow A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A'' \rightarrow \{0\}$ una sucesión exacta corta de grupos abelianos. Entonces existe una sucesión exacta larga*

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \longrightarrow & \text{Hom}(A, B) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}(A', B) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}(A'', B) \\ & & & & \delta^* & & \\ & & & & \text{Ext}(A, B) & \xrightarrow{g^*} & \text{Ext}(A', B) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}(A'', B) \longrightarrow \{0\} \end{array}$$

de grupos abelianos, donde f^* y g^* son co-inducidas de f y g .

Proof. Para esto construimos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K'' & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \scriptstyle \psi & & \downarrow & & \\
 \{0\} & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & \{0\} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & &
 \end{array}$$

donde cada columna es una resolución libre del grupo correspondiente, y cada fila es exacta. Para garantizar la exactitud de las filas superiores es suficiente tomar $F' = F \oplus F''$, escogiendo pre-imagenes arbitrarias de los generadores de A'' como imágenes de los correspondientes elementos de la base de F'' . Esta función depende ciertamente de la elección de las pre-imagenes. Sin embargo, para cada elemento $r \in K'' \subseteq F''$, la correspondiente imagen $\psi(r) \in A'$ cae en A , pues su imagen en A'' es la identidad por definición de K'' . Esto significa que podemos escoger un elemento $\eta(r) \in F$ que tiene a $\psi(r)$ como imagen en A , y por lo tanto tenemos

$$K' = \left\{ \left(u + \eta(r), r \right) \mid u \in K, r \in K'' \right\},$$

de donde concluimos la exactitud de la fila que contiene a K .

Lo anterior define una sucesión exacta corta de los correspondientes complejos resolución

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{f} \mathfrak{A}' \xrightarrow{g} \mathfrak{A}'' \rightarrow \{0\}.$$

Si se dualiza esta sucesión y se toma la correspondiente sucesión exacta larga a nivel de homología, se obtiene el resultado pedido. $\square$

Proposición 25.6. *Sea $\mathfrak{C}$ un complejo de cadenas, con grupos de cadenas $C_n(\mathfrak{C})$ libres, y sea $\mathfrak{C}^* = \text{Hom}(\mathfrak{C}, B)$ su complejo dual. Entonces existe una sucesión exacta*

$$\{0\} \rightarrow \text{Ext}\left(H_{n-1}(\mathfrak{C}), B\right) \rightarrow H^n(\mathfrak{C}^*) \rightarrow \text{Ext}\left(H_n(\mathfrak{C}), B\right) \rightarrow \{0\}.$$

Proof. Utilizamos la sucesión exacta

$$\{0\} \rightarrow Z_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{i} C_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{\partial} B_{n-1}(\mathfrak{C}) \rightarrow \{0\},$$

la que podemos dualizar para obtener la sucesión

$$\{0\} \rightarrow B_{n-1}(\mathfrak{C})^* \xrightarrow{\partial^*} C_n(\mathfrak{C})^* \xrightarrow{i^*} Z_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow \{0\},$$

dado que todos los grupos involucrados son libres. Convertimos esta última en una sucesión exacta corta de complejos de co-cadenas

$$\{0\} \rightarrow \mathfrak{B}_-^* \rightarrow \mathfrak{C}^* \rightarrow \mathfrak{Z}^* \rightarrow \{0\},$$

en el que ambos extremos tienen homomorfismos borde triviales. El subíndice de la derecha implica que el grupo de n -cadenas de $\mathfrak{B}_-^*$ es $B_{n-1}(\mathfrak{C})^*$. La correspondiente sucesión exacta larga de grupos de cohomología nos dá

$$\dots \rightarrow Z_{n-1}^* \rightarrow B_{n-1}^* \rightarrow H^n(\mathfrak{C}^*) \rightarrow Z_n^* \rightarrow B_n^* \rightarrow \dots,$$

en la que el lector puede comprobar fácilmente que el morfismo borde $Z_n^* \rightarrow B_n^*$ es la restricción. En particular, se tiene una sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow \text{coker}\left(Z_{n-1}^* \rightarrow B_{n-1}^*\right) \rightarrow H^n(\mathfrak{C}^*) \rightarrow \ker\left(Z_n^* \rightarrow B_n^*\right) \rightarrow \{0\}.$$

Basta ahora identificar el núcleo y el conúcleo en la sucesión precedente. Para ello tomamos la sucesión exacta corta

$$\{0\} \rightarrow B_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{i} Z_n(\mathfrak{C}) \xrightarrow{p} H_n(\mathfrak{C}) \rightarrow \{0\},$$

para obtener, aplicando el lema precedente, la sucesión

$$\{0\} \rightarrow H_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow Z_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow B_n(\mathfrak{C})^* \rightarrow \text{Ext}\left(H_n(\mathfrak{C}), B\right) \rightarrow \{0\},$$

de donde se concluye lo pedido. $\square$

Observación 25.7. Puede probarse que esta sucesión exacta se descompone, es decir, se tiene

$$H^n(\mathfrak{C}^*) \cong \text{Ext}\left(H_{n-1}(\mathfrak{C}), B\right) \oplus \text{Ext}\left(H_n(\mathfrak{C}), B\right),$$

pero este último homomorfismo no tiene buenas propiedades functoriales. No es natural, en el sentido de teoría de categorías.

ejemplo 25.8. Si X es el Toro, todos los grupos de homología singular son libres, por lo que se tiene $H_{\text{sing.}}^n(X; \mathbb{Z}) \cong H_n^{\text{sing.}}(X)$ para cada n .

ejemplo 25.9. Si X es el plano proyectivo, se tiene $H_0^{\text{sing.}}(X) \cong \mathbb{Z}$, $H_1^{\text{sing.}}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y $H_2^{\text{sing.}}(X) \cong \{0\}$. Concluimos que $H_{\text{sing.}}^0(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, $H_{\text{sing.}}^1(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$, mientras que $H_{\text{sing.}}^2(X; \mathbb{Z}) \cong \text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$. Para calcular este último grupo utilizamos la resolución

$$\{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \{0\},$$

donde f es la multiplicación por 2. Esto nos dice que $\text{Ext}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ es el conúcleo de la función dual f' , la que es esencialmente f , por lo que el conúcleo es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Esto nos dice que la 2-cohomología del plano proyectivo, a diferencia de su homología, no es trivial.

El resultado precedente apoya la idea de que el concepto de grupo de cohomología no aporta información adicional al estudio de grupos topológicos. En lo que sigue probaremos que esto no es así. Definiremos a continuación el concepto de anillo de cohomología. Una estructura que sólo puede definirse ocasionalmente a nivel de homología, pero que nos aporta una herramienta adicional para distinguir espacios topológicos cuyos grupos de homología coinciden. Este *cup-producto*, se define a nivel de co-cadenas singulares mediante la fórmula

$$(\phi \cup \psi)(\sigma) = \phi(\sigma \circ |[e_0, \dots, e_k]|) \psi(\sigma \circ |[e_k, \dots, e_{k+m}]|),$$

para cada $(k+m)$ -símplice singular σ , cada k -cocadena ϕ y cada m -cocadena ψ . A fin de probar que esta definición entrega la estructura correcta, necesitamos el siguiente resultado:

Proposición 25.10. *Para cada k -cocadena ϕ y cada m -cocadena ψ , se tiene la relación*

$$\delta(\phi \cup \psi) = (\delta\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\delta\psi).$$

Proof. Este es un cálculo sencillo utilizando las fórmulas que se utilizan para calcular el borde de un símplice afín. Para cada $(k+m)$ -símplice singular σ , se tiene

$$\begin{aligned} \delta(\phi \cup \psi)(\sigma) &= (\phi \cup \psi)(\partial\sigma) \\ &= \sum_{r=0}^{k+m+1} (-1)^r (\phi \cup \psi) \left(\sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^k (-1)^r \phi \left(\sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+1}]| \right) \psi \left(\sigma \circ |[e_{k+1}, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\
&\quad + \sum_{r=k+1}^{k+m+1} (-1)^r \phi \left(\sigma \circ |[e_0, \dots, e_k]| \right) \psi \left(\sigma \circ |[e_k, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\
&= \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^r \phi \left(\sigma \circ |[e_0, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+1}]| \right) \psi \left(\sigma \circ |[e_{k+1}, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\
&\quad + \sum_{r=k}^{k+m+1} (-1)^r \phi \left(\sigma \circ |[e_0, \dots, e_k]| \right) \psi \left(\sigma \circ |[e_k, \dots, \hat{e}_r, \dots, e_{k+m+1}]| \right) \\
&= \left[(\delta\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\delta\psi) \right] (\sigma),
\end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso, es fácil ver que los dos nuevos términos agregados a las sumas difieren sólo en el signo. $\square$

Proposición 25.11. *El cup-producto de dos co-ciclos es un co-ciclo. Si ϕ es un cociclo y ψ es un coborde, entonces $\phi \cup \psi$ es un coborde.*

Proof. La primera afirmación se prueba con un cálculo directo. De hecho, si ϕ y ψ son cociclos, se tiene

$$\delta(\phi \cup \psi) = (\delta\phi) \cup \psi + (-1)^k \phi \cup (\delta\psi) = 0 \cup \psi + (-1)^k \phi \cup 0 = 0.$$

Para la segunda afirmación, notamos que si $\psi = \delta\eta$, entonces

$$\delta(\phi \cup \eta) = (\delta\phi) \cup \eta + (-1)^k \phi \cup (\delta\eta) = (-1)^k \phi \cup \psi.$$

$\square$

Se concluye de lo anterior que el cup-producto está bien definido a nivel de clases cohomología singular. Nótese que estas fórmulas no funcionan para la cohomología simplicial, dado que las fórmulas que hemos dado aquí no son invariantes al permutar los vértices de un símlice, por lo que el cup-producto no está bien definido, ni siquiera a nivel de cocadenas simpliciales.

Ejercicios:

1. Defina el grupo abeliano $\text{Tor}(A, B)$ como el núcleo de $K \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}} B$ para una resolución proyectiva $K \hookrightarrow F \twoheadrightarrow A$ de A . Demuestre los análogos de los lemas 25.3 y 25.5 para el functor $A \mapsto \text{Tor}(A, B)$.
2. Demuestre el Teorema de los coeficientes universales para homología.
3. Demuestre que si B es un grupo libre entonces $\text{Tor}(A, B) = \{0\}$ para todo grupo abeliano A . Pruebe con un ejemplo que $\text{Ext}(A, \mathbb{Z})$ puede ser no trivial.
4. Calcule $\text{Ext}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ y $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ para enteros n y m cualesquiera.
5. Utilice el anillo de cohomología para probar que el toro no es homotópicamente equivalente al espacio que se obtiene al pegar, por un punto, una esfera y una figura 8.