TOPOLOGIA ALGEBRAICA II.
Guía No. 1

Agosto 23, 2019

Tarea: Ejercicios 1, 7, 9, 13 y 17.

$* * **$

Todos los espacios considerados son espacios de Hausdorff.

1. Sea $f_n : S^1 \to S^1$ el recubrimiento dado por $f_n(z) = z^n$. Probar que para una curva cerrada $\alpha : [0,1] \to S^1$ existe una curva cerrada $\beta : [0,1] \to S^1$ tal que $f_n \circ \beta = \alpha$ si y sólo si α es una potencia n-ésima en el grupo fundamental.

2. Un grafo se define como el espacio topológico que se obtiene al identificar algunos puntos extremos (vértices) en un coproducto de intervalos. Probar que todo espacio que recubre un grafo es un grafo.

3. Probar que si X es un espacio conexo y $p : \tilde{X} \to X$ es un recubrimiento, probar que todo par de puntos en X tiene el mismo número de preimágenes en $\tilde{X}$ (si este número es n se dice que el recubrimiento es de n hojas).

4. Sea C el cilindro $C = [0,1] \times [-1,1]/ \equiv$ con la identificación $(0,t) \equiv (1,t)$ y sea M la banda de Moebius definida por $M = [0,1] \times [-1,1]/ \equiv'$ con la identificación $(0,t) \equiv' (1,-t)$. Probar que la función $f : C \to M$ definida por

$$f[s,t] = \left\{ \begin{array}{rcl} [2s,t] & \text{si} & s \leq 1/2 \\ [2s-1,-t] & \text{si} & s \geq 1/2 \end{array} \right\}$$

   es un recubrimiento.

5. Probar que existe un recubrimiento del toro en la botella de Klein.

6. Sea $P : \tilde{X} \to X$ un recubrimiento. Probar que P induce un homomorfismo inyectivo
$$P_* : \pi_1(\tilde{X}; y) \to \pi_1(X, x)$$
para cada $y \in P^{-1}(x)$.

7. Probar que toda función continua $f : S^n \to S^1$ con $n > 1$ es homotópica a una función constante.

8. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento y sea $x = p(\tilde{x})$. Probar que $p_* : \pi_1(\widetilde{X}; \tilde{x}) \to \pi_1(X; x)$ es injectiva.

9. Probar que no existen recubrimientos del toro en la esfera.

10. Sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento. Sea $x \in X$. Para cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y cada camino α, de x a x, escribimos
$$[\alpha] \cdot \tilde{x} = \tilde{\alpha}(1),$$
si $\tilde{\alpha}$ es el levantamiento de α con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$. Probar que esto define una acción transitiva de $\pi_1(X; x)$ en $p^{-1}(x)$ y que el estabilizador de un punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ es $p_*[\pi_1(\widetilde{X}; \tilde{x})]$.

11. Sea $f : Y \to X$ una función continua que induce el homomorfismo trivial $f_* : \pi_1(Y; y) \to \pi_1\Big(X; f(y)\Big)$ y sea $p : \widetilde{X} \to X$ un recubrimiento. Probar que existe un levantamiento $\tilde{f}$ de f a $\widetilde{X}$.

12. Sea $f_n : S^1 \to S^1$ el recubrimiento definido por $f_n(z) = z^n$. Sea Y un espacio topológico que tiene un recubrimiento universal. Probar que dada una función continua $g : Y \to S^1$, existe una función $h : Y \to S^1$ tal que $g = f_n \circ h$ si y sólo si
$$g_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big) \subseteq n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} = \pi_1\Big(S^1; f(y)\Big).$$

13. Existen funciones continuas de S^1 al plano proyectivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que no se levanten a la esfera?

14. Describa el recubrimiento universal del toro.

15. Probar que no hay recubrimientos de la esfera en el toro.

16. Probar que si $p : \widetilde{X} \to X$ es un recubrimiento con $\widetilde{X}$ compacto, entonces cada punto de X tiene un número finito de pre-imágenes en $\widetilde{X}$.

17. Probar que un espacio compacto con grupo fundamental infinito no puede tener un recubrimiento universal compacto.

18. Describa el recubrimiento universal del espacio que se obtiene al pegar dos círculos por un punto.

19. Describa el recubrimiento universal del espacio $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 es la esfera unitaria y X_2 el segmento que une el polo norte con el polo sur.

20. Sea $p : Y \to X$ un recubrimiento. Probar que X tiene un recubrimiento universal si y sólo si Y tiene un recubrimiento universal.

21. Sea X un espacio cuyo recubrimiento universal es contractible y sea Y un espacio simplemente conexo. Probar que toda función continua $f : Y \to X$ es homotópica a una constante.

22. Sea X un espacio con recubrimiento universal $\widetilde{X}$. Sean $\phi_1 : Y_1 \to X$ y $\phi_2 : Y_2 \to X$ dos recubrimientos conexos que satisfacen
$$\phi_{1*}\Big(\pi_1(Y_1; y_1)\Big) = \phi_{2*}\Big(\pi_1(Y_2; y_2)\Big),$$
donde los puntos $y_1 \in Y_1$ e $y_2 \in Y_2$ satisfacen $\phi_1(y_1) = \phi_2(y_2)$. Probar que existe un homeomorfismo $\psi : Y_1 \to Y_2$ tal que $\phi_1 = \phi_2 \circ \psi$.

23. Sea X un espacio topológico con un recubrimiento universal $\widetilde{X}$ y sea $G = \pi_1(X; x)$. Probar que existe una acción propiamente discontinua $G \times \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ tal que para toda curva γ en $\widetilde{X}$ tal que $\gamma(0) = x$ y todo $[\alpha] \in G$ se tiene $[\alpha].\gamma(1) = (\tilde{\alpha} * \gamma_1)(1)$ donde $\tilde{\alpha}$ es un levantamiento de α con $\tilde{\alpha}(0) = x$ y γ_1 es un levantamiento (apropiado) de la imagen de γ en X.

24. En las notaciones del problema precedente, probar que para cada subgrupo H de G existe un recubrimiento $\phi : Y \to X$ tal que $\phi_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big) = H$.

25. Sea X un espacio con recubrimiento universal $\widetilde{X}$ y sea $\phi : Y \to X$ un recubrimiento. Sean y e y_1 dos pre-imágenes de un punto $x \in X$. Probar que para una (toda) curva $\alpha = \phi \circ \beta$, donde β une y con y_1, se tiene
$$[\alpha]\phi_*\Big(\pi_1(Y; y_1)\Big)[\alpha]^{-1} = \phi_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big).$$

26. En las notaciones del problema precedente, probar que existe un homeomorphismo $\psi : Y \to Y$ que satisface $\phi = \phi \circ \psi$ y $\psi(y) = y_1$ si y sólo si $\phi_*\Big(\pi_1(Y; y_1)\Big) = \phi_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big)$. Concluir que el grupo de automorphismos $\rho : Y \to Y$ que satisfacen $\phi = \phi \circ \rho$ actúan transitivamente en la preimagen $\phi^{-1}(x)$ de un punto $x \in X$ si y sólo si $\phi_*\Big(\pi_1(Y; y)\Big)$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X; x)$.

27. Sea $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 es la esfera unitaria y X_2 el segmento que une el polo norte y el polo sur. Describa todos los recubrimientos conexos de X.

28. Sea F el grupo libre con generadores a y b y sea G el subgrupo normal generado por a^2 y b. Encuentre un conjunto de generadores de G (sugerencia: escriba F como el grupo fundamental de un espacio apropiado. Observe que el subgrupo G corresponde a un recubrimiento de dos hojas, y encuentre generadores del espacio recubridor correspondiente).

29. Probar que el grupo libre F_∞ con una cantidad numerable de generadores es isomorfo a un subgrupo del grupo libre F_2 (sugerencia: buscar un recubrimiento de un espacio apropiado).

30. Sea G un grupo finitamente presentado (es decir que G está definido por una cantidad finita de generadores y una cantidad finita de relaciones). Probar que existe un espacio topológico cuyo grupo fundamental es isomorfo a G.

31. Probar que todo espacio que recubre un toro es homeomorfo al plano, un cilindro, u otro toro.

32. Sea X_n el espacio que se obtiene al identificar (en el mismo sentido) todos los lados de un polígono de n lados. Para que valores de n existe un recubrimiento de dos hojas $\phi : Y \to X_n$ con Y conexo?

33. Sea X el espacio que se obtiene al unir todos los círculos en $\mathbb{R}^2$ de radio $1/n$ con n natural, que pasan por el origen y tienen centro en el semieje $\{(x, 0) | x > 0\}$ (este espacio se conoce como el Pendiente Hawaiano). Probar que existen espacios topológicos Y, Z y recubrimientos $\phi : Y \to X$, $\psi : Z \to Y$ tales que $\phi \circ \psi$ no es un recubrimiento.