Universidad de Chile
Facultad de Ciencias

Álgebra y Geometría II

Ayudantía 25: Base y Dimensión

Marzo 05, 2020

Profesor de Cátedra: Robert Auffarth
Ayudantes: José Aburto, Joaquín Oyarzún

Ejercicios

(1) Sea $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales. Se define

$$S := \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/ p(0) = 0\},$$
$$T := \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/ p(1) = 0\}.$$

Exhiba una base para S, T y $S \cap T$.

Solución:

(i) Base para S: Sea $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. En caso de que $q(x) \in S$, entonces $q(0) = a_0 = 0$. De esta forma, todo elemento de S está dado por

$$q(x) = a_1x + a_2x^2.$$

De esto último, se sigue que $\{x, x^2\}$ genera a S. Adicionalmente, este conjunto es $\mathbb{R}-$ linealmente independiente. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \alpha x + \beta x^2$$

Al evaluar $x = 1$ y $x = -1$, se obtiene $\alpha + \beta = 0$ y $-\alpha + \beta = 0$. Esto implica que $\alpha = \beta = 0$. Por consiguiente, $\{x, x^2\}$ es una base de S.

(ii) Base para T: En caso de que $q(x) \in T$, entonces $q(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0$. Reordenando, se consigue $a_0 = -a_1 - a_2$. De esta forma, todo elemento de T está dado por

$$q(x) = (-a_1 - a_2) + a_1x + a_2x^2 = a_1(x-1) + a_2(x^2-1).$$

De esto último, se sigue que $\{x-1, x^2-1\}$ genera a T. Adicionalmente, este conjunto es $\mathbb{R}-$ linealmente independiente. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$0 = \alpha(x-1) + \beta(x^2-1)$$

Al evaluar $x = 0$ y $x = 2$, se obtiene $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha + 3\beta = 0$. Esto implica que $\alpha = \beta = 0$. Por consiguiente, $\{x-1, x^2-1\}$ es una base de T.

(iii) Base para $S \cap T$: Si $q(x) \in S \cap T$, entonces $q(x) \in S$ y $q(x) \in T$. Por lo tanto, $q(x)$ verifica

$$\begin{aligned} q(0) &= a_0 = 0, \\ q(1) &= a_0 + a_1 + a_2 = 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $a_1 = -a_2$ y $a_0 = 0$. Por consiguiente, todo elemento de $S \cap T$ está dado por

$$q(x) = -a_2 x + a_2 x^2 = a_2(x^2 - x).$$

De esto último, se sigue que $\{x^2 - x\}$ genera a $S \cap T$. Adicionalmente; este conjunto es $\mathbb{R}-$ linealmente independiente, por lo que constituye una base de $S \cap T$.

(2) Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y $(a_1, a_2, ..., a_n)$, un vector fijo en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que el conjunto

$$W = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0\},$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Encuentre una base y calcule su dimensión.

Solución:

(i) W es un $\mathbb{R}$ - subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$: Claramente $W \neq \varnothing$, pues $(0, ..., 0) \in W$.

Sean $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in W$. Note que

$$\begin{aligned} a_1(x_1 + y_1) + ... + a_n(x_n + y_n) &= a_1x_1 + a_1y_1 + ... + a_nx_n + a_ny_n, \\ &= (a_1x_1 + ... + a_nx_n) + (a_1y_1 + ... + a_ny_n), \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma, $(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) \in W$. Por último, sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Vea que

$$\begin{aligned} a_1(\lambda x_1) + ... + a_n(\lambda x_n) &= \lambda(a_1x_1 + ... + a_nx_n), \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \in W$. Se concluye que W es un $\mathbb{R}$ - subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

(ii) Base y dimensión para W: Sea $(x_1, x_2, ..., x_n) \in W$. Entonces

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{a_i}{a_n}\right) x_i. \tag{1}$$

Esto nos permitirá determinar una base para W. En efecto, note que

$$(x_1, x_2..., x_n) = x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, ..., 0) + ...x_n(0, 0, ..., 1).$$

Note que $e_1 = (1, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)$ corresponden a los vectores que conforman la base canónica de $\mathbb{R}^n$. En virtud de (1), se sigue que

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + \sum_{i=1}^{n-1} \left(-\frac{a_i}{a_n}\right) x_ie_n.$$

Reordenando, se consigue

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \left(e_1 - \frac{a_1}{a_n}e_n\right) + x_2 \left(e_2 - \frac{a_2}{a_n}e_n\right) + ... + x_{n-1} \left(e_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}e_n\right).$$

El conjunto $\beta = \left\{e_1 - \frac{a_1}{a_n}e_n, e_2 - \frac{a_2}{a_n}e_n, ..., e_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}e_n\right\}$ genera W. Adicionalmente, es $\mathbb{R}$ - linealmente independiente. Sean $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(e_i - \frac{a_i}{a_n}e_n\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_ie_i - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\frac{a_i}{a_n}e_n.$$

Como $\{e_1, ..., e_n\}$ son $\mathbb{R}$ - linealmente independiente, entonces $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Se concluye que

$$\beta = \left\{e_1 - \frac{a_1}{a_n}e_n, e_2 - \frac{a_2}{a_n}e_n, ..., e_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}e_n\right\},$$

es una base de W. Adicionalmente, $\dim(W) = n - 1$.

(3) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F y U_i: subespacios vectoriales de V con $i = \{1, 2, ..., n\}$. Pruebe que

$$\dim(U_1 + U_2 + ... + U_n) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2) + ... + \dim(U_n).$$

Solución: Se demostrará por inducción. Considere la función proposicional

$$p(n) : \dim\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i),$$

y $n \geq 2$.

(i) Caso Base: Por demostrar que $p(2)$ es verdadero. Es decir, se cumple

$$\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

Por el *Teorema de la Dimensión*, se sabe que

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Como $\dim(U_1 \cap U_2) \geq 0$, entonces es claro que $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2)$. Por lo tanto, $p(2)$ es verdadera. Esto prueba el caso base.

(ii) Paso Inductivo: Considere la hipótesis de inducción

$$p(n) : \dim\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i).$$

Por demostrar, la tesis

$$p(n+1) : \dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \dim(U_i).$$

En efecto

$$\begin{aligned} \dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i\right) &= \dim\left(\sum_{i=1}^{n} U_i + U_{n+1}\right), \\ &= \dim\left(W + U_{n+1}\right), \end{aligned}$$

donde $W := \sum_{i=1}^{n} U_i$ es un F - subespacio vectorial de V (ver Ayudantía 23). Por el *Teorema de la Dimensión* y sus consecuencias (ver Caso Base), se sigue que

$$\begin{aligned} \dim\left(W + U_{n+1}\right) &\leq \dim\left(W\right) + \dim\left(U_{n+1}\right), \\ &= \dim\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right) + \dim\left(U_{n+1}\right), \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i) + \dim\left(U_{n+1}\right), \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \dim(U_i), \end{aligned}$$

por hipótesis de inducción.

Por lo tanto

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{n+1} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \dim(U_i).$$

De esta forma $p(n+1)$ es verdadero. Esto comprueba el paso inductivo. Por Principio de Inducción; $p(n)$ es verdadero, $\forall\ n \geq 2$.

(4) Sean U, W; subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ tales que

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0\},$$
$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0 \wedge x_3 = 2x_4\}.$$

Encuentre una base y dimensión para U, W, $U + W$ y $U \cap W$.

Solución:

(i) Base y dimensión para U: Note que las 4 - tuplas (x_1, x_2, x_3, x_4) que pertenecen a U, verifican la relación $x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Reordenando, se consigue (particularmente) $x_2 = -x_3 - x_4$. ¿Cómo interpretar esto último? x_2 se puede expresar en función de x_3 y x_4. De esta forma; para todo $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U$, se sigue que

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1, -x_3 - x_4, x_3, x_4),\\ &= x_1(1, 0, 0, 0) + x_3(0, -1, 1, 0) + x_4(0, -1, 0, 1).\end{aligned}$$

Entonces el conjunto $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ genera a U. Falta probar que es $\mathbb{R}$ - linealmente independiente, para concluir que corresponde a una base de U. En efecto, sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(0, 0, 0, 0) = \alpha_1(1, 0, 0, 0) + \alpha_2(0, -1, 1, 0) + \alpha_3(0, -1, 0, 1).$$

Se obtienen las ecuaciones $\alpha_1 = 0$, $-\alpha_2 - \alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$ y $\alpha_3 = 0$. Claramente $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. De esta forma, $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ es $\mathbb{R}$ - linealmente independiente.

Se concluye que $\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}$ es una base de U. Adicionalmente, $\dim(U) = 3$.

(ii) Base y dimensión para W: Vea que las 4 - tuplas (x_1, x_2, x_3, x_4) que pertenecen a W, verifican simultáneamente las relaciones $x_1 + x_2 = 0$ y $x_3 = 2x_4$ Reordenando, se consigue (particularmente) $x_1 = -x_2$. ¿Cómo interpretar esto último? x_1 y x_3 se pueden expresar en función de x_2 y x_4 (respectivamente). De esta forma; para todo $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in W$, se sigue que

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-x_2, x_2, 2x_4, x_4),\\ &= x_2(-1, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 2, 1).\end{aligned}$$

Entonces el conjunto $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ genera a W. Claramente es $\mathbb{R}$ - linealmente independiente, pues $(-1, 1, 0, 0)$ y $(0, 0, 2, 1)$ no son múltiplos entre sí.

Se concluye que $\{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}$ es una base de W. Adicionalmente, $\dim(W) = 2$.

(iii) Base para $U \cap W$: Las 4 - tuplas (x_1, x_2, x_3, x_4) que pertenecen a $U \cap W$, verifican simultáneamente las relaciones

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 &= -x_1, \\ x_3 &= 2x_4. \end{aligned}$$

Entonces $x_2 + x_3 + x_4 = -x_1 + 2x_4 + x_4 = 0$. Reordenando y simplificando, se logra $3x_4 = x_1$. Esto implica que $x_2 = -3x_4$ (pues $x_2 = -x_1$). Para todo $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \cap W$, se sigue que

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4) &= (3x_4, -3x_4, 2x_4, x_4), \\ &= x_4(3, -3, 2, 1). \end{aligned}$$

Entonces el conjunto $\{(3, -3, 2, 1)\}$ genera a $U \cap W$. Claramente es $\mathbb{R}$ - linealmente independiente (pues es solo un vector que genera el subespacio).

Se concluye que $\{(3, -3, 2, 1)\}$ es una base de $U \cap W$. Adicionalmente, $\dim(U \cap W) = 1$.

(iv) Base para $U + W$: Por el *Teorema de la Dimensión*, es sabido que

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

En virtud de (i), (ii) y (iii), se obtiene que $\dim(U + W) = 4$. Por definición del subespacio $U + W$ (ver Ayudantía 23), se sigue que un conjunto generador para $U + W$ está dado por

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}.$$

Este conjunto claramente no puede ser $\mathbb{R}$ - linealmente independiente, dado que la cantidad de elementos es 5. Para encontrar una base de $U + W$ a partir de este último conjunto, se debe eliminar un vector (o elemento) que resulte ser una combinación lineal no trivial de los demás. En particular, podemos considerar

$$\beta = \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, 0)\}.$$

β resulta ser $\mathbb{R}$ - linealmente independiente, pues el rango de la matriz asociada coincide con la dimensión del subespacio.

$$\text{ran} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 4,$$

Por lo tanto, β es una base para $U + W$.

Observación: Las bases para un subespacio (espacio) vectorial no necesariamente son únicas. Note que los conjuntos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \{(0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}, \\ \beta_2 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}, \\ \beta_2 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)\}, \\ \beta_2 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 2, 1)\}, \end{aligned}$$

también son bases para $U + W$. Es por esta razón que se habla de "UNA base" y no de "LA base".

(5) Considere los F - subespacios vectoriales de V: U, W; los cuales poseen dimensión finita. Demuestre que si $\dim(U) + \dim(W) > \dim(V)$, entonces $U \cap W \neq \{0\}$.

Solución: Se demostrará por contradicción. Supondremos que $U \cap W = \{0_V\}$. Considere las bases $\beta_U = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ y $\beta_W = \{v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\}$ de los F - subespacios U y W (respectivamente). Considere $a_i \in F$ $(i = 1, ..., n)$ y $\{v_1, v_2, ..., v_k, ..., v_n\}$ tales que

$$\vec{0} = a_1 v_1 + ... + a_n v_n.$$

Reordenando esta última expresión, se consigue

$$a_1 v_1 + ... + a_k v_k = -(a_{k+1} v_{k+1} + ... + a_n v_n).$$

Note que $a_1 v_1 + ... + a_k v_k \in U$ y $a_{k+1} v_{k+1} + ... + a_n v_n \in W$. Como $U \cap W = \{0_V\}$ (suposición inicial) y β_U, β_W son bases (de U y W), entonces $a_1 = a_2 = ... = a_k = a_{k+1} = ... = a_n = 0$. Esto permite concluir que $\{v_1, v_2, ..., v_k, ..., v_n\}$ es un conjunto F - linealmente independiente (¿Por qué no necesariamente debe ser una base para V?).

Como la cardinalidad de este conjunto F - linealmente independiente es n, se sigue que

$$\dim(U) + \dim(W) = n \leq \dim(V),$$

lo cual es una contradicción, pues $\dim(U) + \dim(W) > \dim(V)$. Esto prueba que $U \cap W \neq \{0_V\}$.

(6) Sea el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Considere los $\mathbb{R}$ - subespacios vectoriales de $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$S = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\},$$
$$T = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = S \oplus T$.

Observación: Sean U, W; F - subespacios vectoriales de V. En el caso de que $V = U + W$ y $U \cap W = \{0_V\}$; se dirá que V es la suma directa de U y W, denotándose por $U \oplus W = V$.

Solución: En virtud de la Observación, basta limitarnos a verificar que $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = S + T$ y $S \cap T = \{0_V\}$.

(i) Demostración de $S \cap T = \{0_V\}$: En efecto, sea $f(x) \in S \cap T$. Entonces $f(x) \in S \wedge f(x) \in T$. Como $f(x) \in S$, se sigue que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = ax + b$. Por otro lado, $f(x) \in T$. Esto implica que $f(0) = f(1) = 0$. Por lo tanto

$$f(0) = b = 0,$$
$$f(1) = a + b = 0.$$

La solución de este sistema es trivial. Es decir, $a = b = 0$. Por lo tanto $f(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto prueba que $S \cap T = \{0_V\}$.

(ii) Demostración de $S + T = \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$: Recuerde que en la Ayudantía 23, se definió el conjunto

$$S + T := \{v \in V : v = s + t; \text{ para algún } s \in S, t \in T\},$$

con $V = \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Sea $h(x) \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Note que

$$h(x) = (h(x) - ax - b) + (ax + b).$$

Considere $g(x) := h(x) - ax - b \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (pues $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es un espacio vectorial y es cerrado bajo adición). Determinaremos las condiciones que debe cumplir $a, b \in \mathbb{R}$ para que $g(x) \in S$. En efecto

$$g(0) = h(0) - f(0) = h(0) - b = 0 \Rightarrow h(0) = b.$$

Adicionalmente

$$g(1) = h(1) - f(1) = h(1) - a - b = 0 \Rightarrow a = h(1) - h(0).$$

Entonces $g(x) = h(x) - (h(1) - h(0))x - h(0) \in S$. Por otro lado, $(h(1) - h(0))x + h(0) \in T$ (ver definición del conjunto T). De esta forma

$$h(x) = \underbrace{[h(x) - (h(1) - h(0))x - h(0)]}_{\in S} + \underbrace{[(h(1) - h(0))x + h(0)]}_{\in T}.$$

Esto prueba que $S + T = \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Por (i) y (ii) se concluye que $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = S \oplus T$.

Para finalizar, en palabras de Sófocles

"Proponte siempre, aprender algo útil".