Universidad de Chile
Facultad de Ciencias

Álgebra y Geometría II

Ayudantías

Profesor de Cátedra: Robert Auffarth
Ayudantes: José Aburto, Joaquín Oyarzún
Segundo Semestre, 2019-2020

"Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura" (Bertrand Rusell).

Preliminar

El presente documento está desarrollado como material de apoyo para el curso: Álgebra y Geometría II (de la Licenciatura en Ciencias con mención Física y Licenciatura en Ciencias con mención Matemática), dictado por el Dr. Robert Auffarth. Se adjuntan los enunciados de las ayudantías realizadas, con la resolución de ejercicios interesantes y aquellos que no se alcanzaron a desarrollar por falta de tiempo. Cualquier error en el presente documento, dudas o consultas respecto a los ejercicios; siempre serán bienvenidas al correo: juaco728@gmail.com.

Joaquín Oyarzún

Parte I: Teoría

Se adjunta una serie de material complementario realizado; que permitirá una mejor comprensión de los ejercicios realizados en ayudantía.

1. Números Complejos

- Definición 1.1: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. a se denota Re (z) y b como Im (z). En ambos casos; $a, b \in \mathbb{R}$. $\mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos, que está dotado de las operaciones suma: $(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$ y producto: $(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$, donde $i = \sqrt{-1}$ corresponde a la unidad imaginaria. Adicionalmente, $i^2 = -1$. En caso de que $z = w$ con $z = a + bi$ y $w = c + di$, entonces $a = c$ y $b = d$.

- Definición 1.2: Sea $z = a + bi$. El módulo de z viene dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y el conjugado de z por $\bar{z} = a - bi$.

- Proposición 1.3: Sea $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$. El inverso multiplicativo de z corresponde a $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$. Se tendrá que $z = \bar{z}$ si y solo si $z \in \mathbb{R}$.

- Proposición 1.4: Sea $z, w \in \mathbb{C}$. Entonces

  * $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
  * $|z|^2 = z\bar{z}$ y $\bar{\bar{z}} = z$.
  * $z + \bar{z} = 2$ Re (z), $z - \bar{z} = 2$ Im (z) y Re $(z) \leq |z|$.
  * $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $|z| = |\overline{z}|$.
  * $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $|zw| = |z|\,|w|$ y $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.
  * $|z + w| \leq |z| + |w|$.

- Definición 1.5: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Se denomina argumento al ángulo θ que forma el semieje positivo (coordenadas reales en el plano de Argand) con la recta que une los pares $(0, 0)$ y (a, b). Por definición $0 \leq \theta < 2\pi$ y se denota Arg(z). Adicionalmente

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}, \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|}.$$

  Esto permite definir la forma polar (o trigonométrica) del número complejo z, la cual corresponde a $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

- Comentario 1.6: Se emplea la notación cis$(\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. El par (r, θ) corresponde a las coordenadas polares de un número complejo $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, con $r = |z|$ y Arg$(z) = \theta$.

- Teorema 1.7 (de Moivre): Sea $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, un número complejo. Para todo n natural, se sigue que

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

- Teorema 1.8 (de las Raíces): Sea $z \neq 0$, con $z \in \mathbb{C}$) y $n \in \mathbb{N}$. Existen exactamente n números complejos $z_0, z_1, ..., z_{n-1}$ (raíces $n-$ ésimas de z); tales que $z_k^n = z$, $\forall\ k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Adicionalmente

$$z_k = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right).$$

- Teorema Fundamental del Álgebra: Sea $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, tal que grad$f(x) \geq 1$. Entonces $f(x)$ tiene a lo menos una raíz en $\mathbb{C}$.

- Corolario 1.10: Un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ es irreducible sobre $\mathbb{C}[x]$ si y solo si grad $p(x) = 1$ en $\mathbb{C}[x]$.

- Corolario 1.11: Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, polinomio no constante tal que grad $p(x) = n$. Entonces $p(x) = c(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$; para $c, a_i \in \mathbb{C}$ con $i = 1, 2, ..., n$.

- Lema 1.12: Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $z = a + bi$, raíz de $p(x)$. Entonces $\bar{z} = a - bi$ también es raíz de $p(x)$.

- Comentario 1.13: Considere el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$. Entonces $p(x)$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ si $\triangle := b^2 - 4ac < 0$.

- Definición 2.1: Se define el conjunto de polinomios en dos variables (las cuales por convención serán x e y) sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, tales que

$$\mathbb{R}\left[x,y\right] := \left\{ \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x^i y^j : a_{i,j}\in\mathbb{R},\ \forall\, i=0,1,...,n \wedge \forall\, j=0,1,...,m \right\}.$$

- Definición 2.2: Sea $p(x,y)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}x^i y^j \in \mathbb{R}\left[x,y\right]$. Se define el grado asociado a $p(x,y)$ como grad $p(x,y):=m+n$. Por otro lado, si $q(x,y)\in\mathbb{R}\left[x,y\right]$ también se cumple que grad $(p(x,y)+q(x,y)) \leq$ max $\{p(x,y),q(x,y)\}$ y grad $(p(x,y)\cdot q(x,y))=$ grad $p(x,y)+$ grad $q(x,y)$.

- Definición 2.3: Sea $p(x,y)\in\mathbb{R}\left[x,y\right]$. Se define el conjunto $\mathbb{V}(p(x,y)) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p(x,y)=0\}$. A $\mathbb{V}(p(x,y))$ se le denomina conjunto de raíces (o de ceros) asociados a $p(x,y)$.

- Definición 2.4: Considere $S=\{p_1,p_2,...,p_n\}$, conjunto de polinomios en $\mathbb{R}\left[x,y\right]$. Se define

$$\mathbb{V}(S) := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p_i(x,y)=0,\ \forall\ p_i\in S\} = \bigcap_{i=1}^{n}\mathbb{V}(f_i).$$

  Un subconjunto $X\subseteq\mathbb{R}^2$ se dice algebraico si $X=\mathbb{V}(S)$, para cualquier $S\subseteq\mathbb{R}\left[x,y\right]$.

- Lema 2.5: Sean $p(x,y)$, $q(x,y)\in\mathbb{R}\left[x,y\right]$. Se tiene que $\mathbb{V}(p(x,y)\cdot q(x,y)) = \mathbb{V}(p(x,y))\cup\mathbb{V}(q(x,y))$. Adicionalmente, si $\alpha\in\mathbb{R}$ entonces $\mathbb{V}(\alpha\cdot p(x,y))=\mathbb{V}(p(x,y))$.

- Proposición 2.6: Sean $p(x,y)$, $q(x,y)\in\mathbb{R}\left[x,y\right]$ tales que $(p(x,y),q(x,y))=1$ en $R(y)\left[x\right]$ y $R(x)\left[y\right]$. Se tiene que $\mathbb{V}(p(x,y))\cap\mathbb{V}(q(x,y))$ es un conjunto finito o vacío. Recuerde que $R(y)\left[x\right]$ es el conjunto de polinomios en la variable y con coeficientes en $\mathbb{R}\left(x\right)$. $\mathbb{R}\left(x\right)$ corresponde al cuerpo de funciones racionales en x. Es decir

$$\mathbb{R}(x) := \left\{\frac{p(x)}{q(x)} : p(x),q(x)\in\mathbb{R}\wedge q(x)\neq 0\right\}.$$

- Definición 2.7: Un polinomio $f(x,y)\in\mathbb{C}\left[x,y\right]$ se dice homogéneo de grado d si para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ se tiene que $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^d f(x,y)$ y grad $f(x,y)=d$.

- Proposición 2.8: De la Proposición 2.6, $\mathbb{R}\left[x,y\right]\subseteq\mathbb{R}(x)\left[y\right]$ y $\mathbb{R}\left[x,y\right]\subseteq\mathbb{R}(y)\left[x\right]$.

3. Rectas en $\mathbb{R}^2$

- Proposición 3.1: Considere los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano cartesiano. La distancia entre A y B está dada por la expresión

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- Proposición 3.2: Considere los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ tales que $P(x, y)$ divide el segmento $\overline{AB}$ en una razón r. Entonces

$$x = \frac{x_1 + r \cdot x_2}{1 + r},$$
$$y = \frac{y_1 + r \cdot y_2}{1 + r}.$$

- Definición 3.3: Sea $p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ tal que grad $p(x, y) = 1$. Al conjunto $\mathbb{V}(p(x, y))$ se le denomina recta. Así, $p(x, y) = ax + by + c$ con a y b no nulos simultáneamente.

- Definición 3.4: Se denomina pendiente de la recta $\ell : ax + by + c = 0$ a $m = -\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$. Existe α con $0 \leq \alpha < \pi$ y $\tan(\alpha) = m$ que corresponde al ángulo de inclinación de la recta ℓ. El coeficiente de posición es $n = -\frac{c}{b}$ $(b \neq 0)$; lo que permite expresar $p(x, y)$ de la forma $y = mx + n$. Esta última se conoce como *ecuación principal de la recta*.

- Definición 3.5: Considere las rectas $\ell_1 : y = m_1x + n_1$ y $\ell_2 : y = m_2x + n_2$. Se dice que ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas (y se denota $\ell_1 \| \ell_2$) si y solo si $m_1 = m_2$ y $n_1 \neq n_2$.

- Definición 3.6: Considere las rectas $\ell_1 : y = m_1x + n_1$ y $\ell_2 : y = m_2x + n_2$. Se dice que ℓ_1 y ℓ_2 son coincidentes (y se denota $\ell_1 = \ell_2$) si y solo si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$.

- Definición 3.7: Considere las rectas $\ell_1 : y = m_1x + n_1$ y $\ell_2 : y = m_2x + n_2$. Se dice que ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares (y se denota $\ell_1 \perp \ell_2$) si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.

- Proposición 3.8: Considere la recta $\ell_1 : Ax + By + C = 0$ y el punto $A(x_1, y_1)$. La distancia entre el punto A y la recta ℓ está dada por

$$d(A, \ell) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

- Proposición 3.9: El ángulo de intersección θ entre las rectas $\ell_1 : y = m_1x + n_1$ y $\ell_2 : y = m_2x + n_2$ está dado por la expresión

$$\theta = \arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|.$$

- Definición 4.1: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Denotaremos por M_{ij}^{A} a la matriz obtenida de A quitando la fila i y la columna j con $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij}^{A})$. Si $A = (a_{ij})$ entonces

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}.$$

- Proposición 4.2: Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B).$$

- Proposición 4.3: Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz triangularizada superior o inferiormente. Entonces

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

- Observación 4.4: La Tabla I exhibe las operaciones elementales filas (del método de Gauss - Jordan) y el efecto que ocasiona en el determinante de una matriz (con coeficientes reales).

Operación Elemental	Efecto en el Determinante
Multiplicación por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$	$\det(A) \to \lambda\det(A)$
Intercambio de filas $F_i \leftrightarrow F_j$	$\det(A) \to -\det(A)$
Sumar a una fila un múltiplo no nulo de otra fila	El determinante se mantiene constante

Tabla I: Operaciones Elementales.

Parte II: Ejercicios

Enunciados (y algunas soluciones) de los ejercicios realizados en ayudantía.

Ayudantía 1: Números Complejos

Agosto 26, 2019

(1) Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Exprese z de manera binomial, determinando su conjugado y gráfica en el plano de Argand. Para w, encuentre su módulo correspondiente

$$z = \frac{(3+5i)(2-i)^3}{4i-1},\ w = \frac{i-r}{1+2ri} - \frac{3i}{4}\ (r \in \mathbb{R}).$$

(2) Considere $z \in \mathbb{C}$, tal que $z \neq 0$. Demuestre que si $z - \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$, entonces $z \in \mathbb{R}$. Pruebe o refute según corresponda: el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$ es ordenado.

(3) Sean $z_i \in \mathbb{C}$, con $i = 1, ..., n$. Pruebe que

$$|z_1 + ... + z_n| \leq |z_1| + ... + |z_n|.$$

(4) Considere $z, w \in \mathbb{C}$. Demuestre que $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$. ¿Cómo se interpreta geométricamente esta igualdad? Pruebe que $|z-w| \geq ||z| - |w||$.

(5) Exprese el número complejo $z = \sqrt{-7+24i}$ como par ordenado (a, b). Considere $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$; tales que $|z_i| = 1$, para $i = 1, 2, 3$. Se sabe que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Pruebe que $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$.

(6) Considere $z, w \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$. Demuestre que $\left|\frac{z+w}{\bar{z}w+1}\right| = 1$. ¿Existe un número complejo z que verifique $|z| = \frac{1}{|z|} = |z-1|$?

(7) Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$; los vértices de un triangulo equilatero. Pruebe que $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3$. Considere $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z+w| = |z-w|$. Demuestre que $\frac{w}{z}$ es un número imaginario puro.

(8) Considere los números complejos

$$z = |z|\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),\ w = |w|\,(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)).$$

Demuestre que

$$zw = |zw|\,(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)),\ \frac{z}{w} = \left|\frac{z}{w}\right|(\cos(\theta-\varphi) + i\sin(\theta-\varphi)).$$

¿Cuál es el valor de $\mathrm{Arg}(z^{-1})$?

(9) Considere $z, w \in \mathbb{C}$ tales que

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right),\ w = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Exprese zw y $\frac{z}{w}$ de la forma binomial. Encuentre la forma polar y argumento de los números complejos $h = \frac{1-i}{3+3i}$ y $g = (1-2i)^4$.

(10) Calcule

$$z = \left(\frac{1+\cos(x) + i\sin(x)}{1+\cos(x) - i\sin(x)}\right)^n.$$

Soluciones (Ejercicios Pendientes)

- (Ejercicio 4) (a) Por Proposición 1.4

$$\begin{aligned}
|z+w|^2+|z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)},\\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w}),\\
&= z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w},\\
&= 2z\overline{z}+2w\overline{w},\\
&= 2(|z|^2+2\,|w|^2).
\end{aligned}$$

Interpretación geométrica: la suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble de la suma del cuadrado de sus lados.
(b) Sea $z=z-w+w$. Entonces

$$|z|=|(z-w)+w|\leq|z-w|+|w|.$$

Esto implica que $|z|-|w|\leq|z-w|$. Por otro lado, considere $w=w-z+z$. Se consigue

$$|w|=|(w-z)+z|\leq|w-z|+|z|.$$

Entonces $|w|-|z|\leq|w-z|$. Esto implica que $-|w-z|\leq|z|-|w|$. Acoplando, se logra

$$-|w-z|\leq|z|-|w|\leq|z-w|.$$

Dado que $|w-z|=|z-w|$, entonces

$$-|z-w|\leq|z|-|w|\leq|z-w|.$$

Esto último equivale al hecho de que $||z|-|w||\leq|z-w|$.

- (Ejercicio 7) (a) Como z_1, z_2, z_3 son los vértices de un triángulo equilatero, se consigue la relación:

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{|z_3-z_1|\,\mathrm{cis}\,(\arg(z_3-z_1))}{|z_2-z_1|\,\mathrm{cis}\,(\arg(z_2-z_1))}=\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Análogamente

$$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=\frac{|z_1-z_2|\,\mathrm{cis}\,(\arg(z_1-z_2))}{|z_3-z_2|\,\mathrm{cis}\,(\arg(z_3-z_2))}=\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}&=\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2},\\
z_3^2-z_1z_3-z_2z_3+z_2z_1&=z_2z_1-z_2^2-z_1^2+z_1z_2,\\
z_1^2+z_2^2+z_3^2&=z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3.
\end{aligned}$$

(b) Por hipótesis, se sabe que $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$. Esto implica que $|z_1+z_2|^2=|z_1-z_2|^2$. Por Proposición 1.4, se obtiene

$$\begin{aligned}
(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}&=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)},\\
(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})&=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}),\\
|z_1|^2+\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}+|z_2|^2&=|z_1|^2-\overline{z_1}z_2-z_1\overline{z_2}+|z_2|^2,\\
2\left(\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}\right)&=0,\\
2\left(\overline{z_1}z_2+\overline{\overline{z_1}z_2}\right)&=0,\\
2\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)&=0,\\
\mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2)&=0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_1}} = \frac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \frac{\mathrm{Re}(z_2\overline{z_1}) + i\mathrm{Im}(z_2\overline{z_1})}{|z_1|^2} = \frac{i\mathrm{Im}(z_2\overline{z_1})}{|z_1|^2}.$$

Se concluye que $\dfrac{z_2}{z_1}$ es un imaginario puro.

- (Ejercicio 9) (a) Por Ejercicio 8

$$\begin{aligned} zw &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right)\right), \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{8\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{12}\right)\right), \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right), \\ &= -1 + \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Para (b), por Ejercicio 8

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= 8\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)\right), \\ &= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right), \\ &= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), \\ &= 4\sqrt{3} + 4i. \end{aligned}$$

En (c), note que $h = -\dfrac{i}{3}$. Por lo tanto

$$h = \frac{1}{3}\left(0 + (-i)\right) = \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right).$$

Finalmente, de (d) se sigue que $g = (1-2i)^4 = -7 + 24i$. Por consiguiente

$$g = 25\left(-\frac{7}{25} + \frac{24i}{25}\right) \approx 25\left(\cos(0{,}59\pi) + i\sin(0{,}59\pi)\right).$$

AYUDANTÍA 2: Potencias y Raíces

Agosto 28, 2019

(11) Pruebe que si z es un número complejo tal que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, entonces $z^n + z^{-n} = 2\cos(n\theta)$. Exprese de manera binomial, el número complejo $w = (\sqrt{3} + i)^{15}$.

(12) Determine el desarrollo de $\cos(6x)$ y $\sin(6x)$, en función de $\cos(x)$ y $\sin(x)$. Encuentre el desarrollo del número complejo $z = (1 + \cos(x) + i\sin(x))^n$, con $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

(13) Determine el valor de $\mu \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{\mu} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{\mu} = \sqrt{2}.$$

(14) Exprese como par ordenado (a, b), el número complejo z

$$z = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + ... + \frac{1}{(1+i)^{2019}}.$$

(15) Considere $z_1 = 1$, z_2, ..., z_n; raíces n - ésimas de la unidad. Pruebe que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(1 - z_{i+1}) = n$.

(16) Sea $w \in \mathbb{C}$, tal que ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad. Demuestre que $(1 + \omega^2)^4 = \omega$, $(1 - \omega + \omega^2)(1 + \omega - \omega^2) = 4$ y $(2 + 2\omega + 5\omega^2)^6 = 729$.

(17) Considere $n \geq 2$. Demuestre que la suma de las raíces n - ésimas de la unidad es cero. Sea $\omega \in \mathbb{C}$, raíz décima primitiva de la unidad. Pruebe que

$$\omega^4 - \omega^3 + \omega^2 - \omega + 1 = 0.$$

(18) Se sabe que ω es una raíz cúbica primitiva de la unidad. Pruebe que los puntos $z_1 = 1 - \omega$, $z_2 = \omega - \omega^2$ y $z_3 = \omega^2 - 1$, son los vértices de un triangulo equilatero.

(19) Exprese las soluciones de la ecuación $2(z+1)^4 + \sqrt{3}i = -1$ de manera cartesiana y grafiquelas en el plano de Argand. Determine las raíces del polinomio $p(x) = z^4 + 2 + 2\sqrt{3}i \in \mathbb{C}[x]$ en su forma polar y grafiquelas en el plano de Argand.

(20) Calcule $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ usando las raíces quintas de la unidad de manera adecuada. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $z = 1 + i$ sea una raíz de la ecuación $z^5 + az^3 + b = 0$. Calcule $\sqrt[3]{-8i}$.

Soluciones (Ejercicios Pendientes)

- (Ejercicio 15) Sea $z \in \mathbb{C}$. Como $z_1 = 1, z_2, ..., z_n$ son raíces n - ésimas de la unidad, entonces

  $$z^n - 1 = (z-1)(z-z_2)...(z-z_n).$$

  Por otro lado

  $$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1).$$

  Entonces $(z-1)(z-z_2)...(z-z_n) = z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1$. Tomando $z = 1$, se logra

  $$\prod_{i=1}^{n-1}(1 - z_{i+1}) = n.$$

- (Ejercicio 19) (a) La ecuación a resolver es $2(z+1)^4 + i\sqrt{3} = -1$. Mediante el cambio de variable, $w = z+1$; se consigue la expresión $2w^4 = -1 - i\sqrt{3}$. Por lo tanto

  $$w^4 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

  Desarrollando esta última expresión, se consigue

  $$w^4 = 1\left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

  Por el Teorema 1.8 (de las Raíces)

  $$w_k = \text{cis}\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right),$$

  con $k = 0, 1, 2, 3$. Por lo tanto

  $$w_0 = \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2},$$

  $$w_1 = \text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2},$$

  $$w_2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2},$$

  $$w_3 = \text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

  Como $w = z+1$ entonces $z = w-1$. Por lo tanto, las soluciones anteriores se pueden reescribir como

  $$z_0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2},$$

  $$z_1 = \frac{-\sqrt{3}-2}{2} + \frac{i}{2},$$

  $$z_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2},$$

  $$z_3 = \frac{\sqrt{3}-2}{2} - \frac{i}{2}.$$

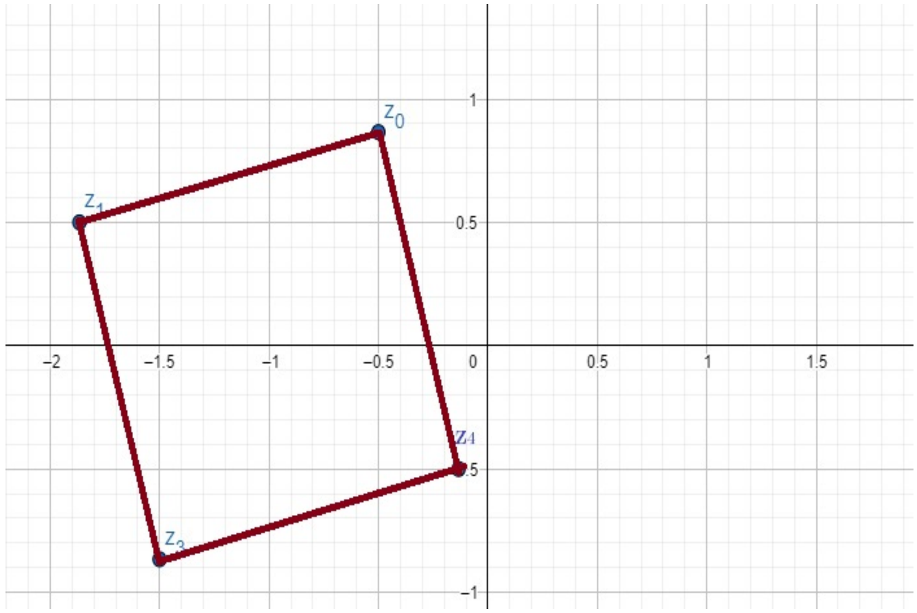

Figura 1: Gráfica de z_0, z_1, z_2 y z_3 en el plano de Argand.

La representación gráfica de las raíces de $2(z+1)^4 + i\sqrt{3} = -1$ vienen dadas por la Figura 1. z_0, z_1, z_2 y z_3 forman un cuadrado, en el cual existe una circunferencia circunscrita de radio 1.

(b) La ecuación a resolver es $z^4 = -2 - 2\sqrt{3}i$. Por lo tanto

$$z^4 = 4\left(\frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 4\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right).$$

Por el Teorema 1.8 (de las Raíces)

$$z_k = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right),$$

con $k = 0, 1, 2, 3$. Por lo tanto

$$z_0 = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}i}{2},$$

$$z_1 = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2},$$

$$z_2 = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}i}{2},$$

$$z_3 = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}.$$

La representación gráfica de las raíces de $z^4 = -2 - \sqrt{3}i$ vienen dadas por la Figura 2. z_0, z_1, z_2 y z_3 forman un cuadrado, en el cual existe una circunferencia circunscrita de radio $\sqrt{2}$.

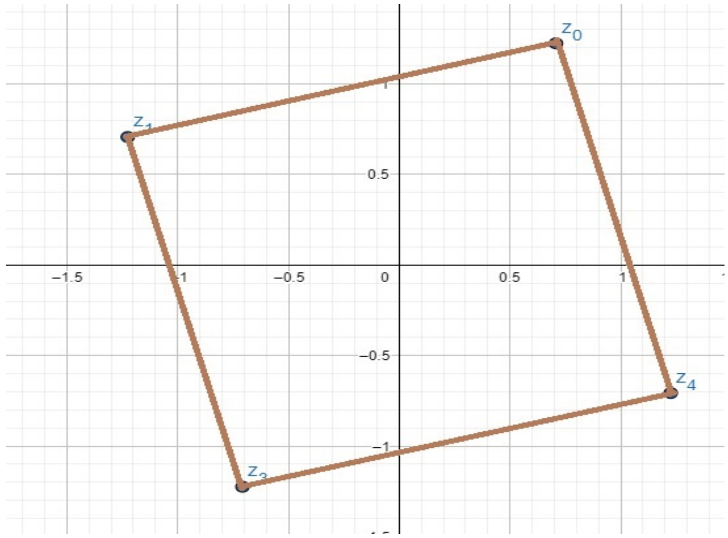

Figura 2: Gráfica de z_0, z_1, z_2 y z_3 en el plano de Argand.

- (Ejercicio 20) (a) Por Ejercicio 17 (a), se sabe que la suma de las raíces quintas de la unidad es nula. Por lo tanto
$$1 + \text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \text{cis}\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \text{cis}\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0.$$
Al considerar la parte real de la expresión anterior, se obtiene
$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 0.$$
Note ahora que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ y $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$. De esta manera, se logra
$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 0.$$
Como $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, se sigue que
$$4\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 0.$$
Recurriendo a la fórmula cuadrática
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$
Dado que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$, entonces
$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \approx 0,3.$$
(b) La forma polar de z está dada por
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Por Teorema 1.7 (de Moivre)

$$z^5 = 2^{5/2}\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4 - 4i,$$
$$z^3 = 2^{3/2}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -2 + 2i,$$

Por consiguiente

$$z^5 + az^3 + b = -4 - 2a + b + i(-4 + 2a) = 0.$$

Esto nos permite obtener el sistema de ecuaciones

$$-4 - 2a + b = 0,$$
$$-4 + 2a = 0,$$

cuyas soluciones son $a = 2$ y $b = 8$.

(c) Sea $z = -8i$. Por lo tanto, la forma polar de z corresponde a $z = 8(0 + (-i)) = 8\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$. Por el Teorema 1.8 (de las Raíces)

$$z_k = \sqrt[3]{8}\text{cis}\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right),$$

con $k = 0, 1, 2$. De esta forma, las soluciones correspondientes (en forma polar) son

$$z_0 = 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right),\ z_1 = 2\text{cis}\left(\frac{7\pi}{6}\right),\ z_2 = 2\text{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right).$$

Ayudantía 3: Polinomios en $\mathbb{C}[x]$

Agosto 30, 2019

(21) Determine el(los) valor(es) de $n \in \mathbb{N}$ tal(es) que $(\sqrt{3}-i)^n = 2^{n-1}(-1+\sqrt{3}i)$.

(22) Determine los vértices de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de centro $z_0 = 1+i$ y radio 2.

(23) Demuestre que el producto de las raíces n - ésimas de la unidad está dado por

$$\prod_{k=0}^{n-1} z_k = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

(24) Considere los polinomios $h(x) = x^2 - 3ix - 5(1+i)$, $p(x) = x - 1 + i$, $g(x) = ix^4 + \frac{x^2}{i+1} - 2x + 1$, $s(x) = x^2 - 1 \in \mathbb{C}[x]$. Encuentre el cociente y el resto al dividir $h(x)$ por $p(x)$. Repita el mismo procedimiento para $g(x)$ y $s(x)$.

(25) Demuestre el Lema 1.12: Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $z = a + bi$, raíz de $p(x)$. Entonces $\bar{z} = a - bi$ también es raíz de $p(x)$. ¿Qué se puede concluir de este resultado? ¿Por qué no existe un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ con grad $q(x) = 5$, cuyas raíces sean -1, 2, $1-i$, i, $-i$?

(26) Encuentre la factorización de los polinomios $p(x) = 2x^3 - (i+1)x^2 + (2i-2)x + 3i + 1$, $s(x) = x^4 + 7x^2 - 8$ en $\mathbb{C}[x]$. Asuma que i y $-2i\sqrt{2}$ son raíces de $p(x)$ y $s(x)$ respectivamente.

(27) Pruebe que $i - 2$ es raíz del polinomio $q(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 20x^2 + 15x + 50 \in \mathbb{C}[x]$. Determine las soluciones restantes.

(28) Encuentre las soluciones de la ecuación $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es compleja y de módulo $\sqrt{13}$. Determine los números complejos z, tales que $z^2 + 2\bar{z}^2 + z - \bar{z} + 9 = 0$.

(29) Considere $p(x) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 30x + 18 \in \mathbb{R}[x]$. Se sabe que $p(x)$ admite una raíz compleja de modulo $\sqrt{2}$, mientras que otra de ellas es de multiplicidad doble. Determine todas las soluciones de $p(x)$.

(30) Considere el polinomio $p(x) = x^3 + (3+i)x^2 - 3x - (\lambda + i) \in \mathbb{C}[x]$. Determine el(los) valor(es) de $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $p(x)$ admita a lo menos una raíz real. Sea $f(x) = x^3 + 5x^2 + (9-5i)x + 10 - 10i \in \mathbb{C}[x]$. Factorice $f(x)$ en $\mathbb{C}[x]$ sabiendo que $2i$ es una raíz.

Soluciones (Ejercicios Pendientes)

- (Ejercicio 22) El hexágono regular está compuesto de seis triángulos equiláteros. La altura de estos está dada por $h = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Esto nos permite obtener los vértices $V_1(2, 1 + \sqrt{3})$, $V_2(0, 1 + \sqrt{3})$. Por simetría, se obtienen $V_4(2, 1 - \sqrt{3})$ y $V_5(0, 1 - \sqrt{3})$. Recuerde que el centro del hexágono regular está dado por el número complejo $C = 1 + i = (1, 1)$. Falta determinar $V_3(a, 1)$ y $V_6(b, 1)$. Note que V_3, V_6 y C son colineales (esto permite concluir que la componente compleja u ordenada es 1). En particular

$$|V_3 - C| = |V_6 - C| = 2.$$

  En particular, $(a - 1)^2 = 4$. Se obtiene $a^2 - 2a - 3 = 0$, cuyas soluciones son -1 y 3. Por lo tanto, $V_3(-1, 1)$ y $V_6(3, 1)$.

- (Ejercicio 27) Como $q(i - 2) = 0$; entonces por el Teorema del Resto, se concluye que $i - 2$ es raíz de $q(x)$. Por Teorema del Factor, existe $h(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que

$$q(x) = h(x)(x^2 + 4x + 5).$$

  Determinaremos tal $h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Por Algoritmo de la División, se consigue que el resto es nulo y el cociente está dado por $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 10$. Particularmente, note que $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Por Criterio de las Raíces Racionales, se consigue las posibles soluciones

$$x = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}.$$

  Vea que $h(2) = 0$. Por consiguiente; $h(x) = (x - 2)t(x)$, con $t(x) \in \mathbb{R}[x]$. Empleando Ruffini entre $h(x)$ y $(x - 2)$ podemos determinar tal $t(x)$. Entonces $t(x) = x^2 - 5$. Las raíces de $t(x)$ son $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$. Por lo tanto, en $\mathbb{C}[x]$

$$q(x) = (x - i + 2)(x + i + 2)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - 2).$$

- (Ejercicio 29) Sea $\alpha = a + bi$. Entonces $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$. Esto implica que $a^2 + b^2 = 2$. Por Lema 1.12, $\beta = a - bi$ también es raíz. Por las relaciones de Cardano-Vieta, asumiendo que γ es de multiplicidad doble

$$\alpha + \beta + 2\gamma = 8,$$
$$\alpha\beta\gamma^2 = 18.$$

  De la primera ecuación, se obtiene que $\alpha + \gamma = 4$. De la segunda, se tiene que $(a^2 + b^2)\gamma^2 = 18$. Entonces $2\gamma^2 = 18$. Es decir, $\gamma = \pm 3$.

  En el caso de que $\gamma = 3$, entonces $a = 1$. Esto implica que $b = \pm 1$. Se consigue que $1 + i$, $1 - i$ y 3 (de multiplicidad doble) son las raíces buscadas.

  El caso $\gamma = -3$ se descarta. Pues si $\gamma = -3$, entonces $a = 7$. Esto implica que $b \notin \mathbb{R}$.

- (Ejercicio 30) (a) Suponga que u es raíz real de $p(x)$. Por lo tanto, $p(u) = 0$. Esto implica que $u^3 + 3u^2 + iu^2 - 3u - \lambda - i = 0$. Considerando la parte real e imaginaria de la expresión anterior, se desprende el sistema de ecuaciones

$$u^3 + 3u^2 - 3u - \lambda = 0,$$
$$u^2 - 1 = 0.$$

  Se consigue que $u = \pm 1$. Si $u = 1$, entonces $\lambda = 1$. En el caso de que $u = -1$, se obtiene $\lambda = 5$. Por consiguiente, $\lambda = \{1, 5\}$.

(b) Como $2i$ es raíz de $f(x)$, se puede utilizar la regla de Ruffini. Se efectuará la división de polinomios entre $f(x)$ y $(x-2i)$. Esto nos permite obtener un cociente $q(x) = x^2 + (5+2i)x + 5 + 5i$ y un resto nulo. Ahora, utilizaremos la formula cuadrática (también valida en números complejos) para determinar las dos raíces restantes. Se sigue que

$$x = \frac{-5 - 2i \pm \sqrt{(5+2i)^2 - 4(5+5i)}}{2} = \frac{-5-2i \pm 1}{2}.$$

Por lo tanto, $x_1 = -2 - i$ y $x_2 = -3 - i$. De esta forma, la factorización de $f(x)$ en $\mathbb{C}[x]$ es

$$f(x) = (x-2i)(x+2+i)(x+3+i).$$

Ayudantía 4: Conjuntos Algebraicos en $\mathbb{R}^2$

Septiembre 02, 2019

(31) Considere los polinomios $p(x,y) = 9y^9 + 6x^8y^6 - \frac{3}{4}x^4y^5 + \sqrt{7}x^3y^3 + 1$, $q(x,y) = 1 - x^5y^5 - 2y^3x + x^2y - \sqrt{2}x^7y^4 \in \mathbb{R}[x,y]$. Calcule el valor de $p(-3,-2)$ y $q(1,-1)$. Obtenga los valores de grad $p(x,y)$ y grad $q(x,y)$. Determine los valores de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio $s(x,y) = \frac{1}{2}x^5 - 3x^2y^2 - 8x^2y + \lambda x + \mu \in \mathbb{R}[x,y]$ verifique $s(2,-1) = -26$ y $s(1,-2) = 8$.

(32) Demuestre que $p(x,y) = (\sqrt{\pi}x^5y^4 - 3y^2)^6$ es un polinomio en $\mathbb{R}[x,y]$. Repita el mismo procedimiento para $q(x,y) = (2x^3y^4 + 1)^5$. Determine los valores de grad $(p(x,y) + q(x,y))$ y grad $(p(x,y) \cdot q(x,y))$.

(33) Considere los conjuntos de polinomios S y T en $\mathbb{R}[x,y]$. Se sabe que $S \subseteq T$. Pruebe que $\mathbb{V}(T) \subseteq \mathbb{V}(S)$. Demuestre que si $p(x,y)$, $q(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$, entonces $\mathbb{V}(p(x,y) \cdot q(x,y)) = \mathbb{V}(p(x,y)) \cup \mathbb{V}(q(x,y))$.

(34) Considere los polinomios $p_i(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ con $i = 1, ..., 6$. Para caso en particular, determine el conjunto $\mathbb{V}(p_i(x,y))$ de raíces (o ceros) asociado a $p_i(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.

(a) $p_1(x,y) = x^6y + 2x^4y + x^2y$.

(b) $p_2(x,y) = x^5y + 2x^3y^3 + xy^5$.

(c) $p_3(x,y) = x^4 - 2x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}xy^3 + \frac{1}{16}y^4$.

(d) $p_4(x,y) = x^6 - x^4y^2 - x^2y^4 + y^6$.

(e) $p_5(x,y) = x^2y + 4y^3 - 16y - x^4 - 4x^2y^2 + 16x^2$.

(f) $p_6(x,y) = x^3y^3 - y^5x - y^3x - y^2x^5 + y^4x^3 + y^2x^3$.

(35) Pruebe que cualquier polinomio homogéneo de grado d en $\mathbb{C}[x,y]$ puede escribirse como el producto de $n \leq d$ polinomios homogéneos de grado uno.

(36) Se definen los conjuntos A_i con $i = 1, .., 4$. En cada caso, verifique que A_i es un conjunto algebraico.

(a) $A_1 := \{(\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.

(b) $A_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - xy - x^2y + x^3 = 0\}$.

(c) $A_3 := \{(\sin(2t), 2\sin^2(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.

(d) $A_4 := \{(t^5, t^7) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.

(37) Sean $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(x)\}$ y $T := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pruebe que S y T no son conjuntos algebraicos.

(38) Se define $E := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;\ a, b > 0\right\}$. En $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(E)$ corresponde a una elipse con centro en el origen y focos $(\pm c, 0)$ donde $a^2 = b^2 + c^2$. Pruebe que E admite una parametrización trigonométrica de la forma

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = a\cos(\theta), y = b\sin(\theta);\ \theta \in [-\pi, \pi)\},$$

y una parametrización racional, tal que

$$E \setminus \{(-a,0)\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, y = \frac{2bt}{1+t^2};\ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Soluciones (Ejercicios Pendientes)

- (Ejercicio 35) Es sabido que $\mathbb{C}[x,y] \subset \mathbb{C}(y)[x]$. Recuerde que polinomio homogéneo es aquel que verifica $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^d f(x,y)$ con grad $f(x,y) = d$. Adicionalmente, $f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$. Consideraremos $f(x,y) \in \mathbb{C}(y)[x]$. Por lo tanto

  $$f(x,y) = y^d f(\tfrac{x}{y}, 1).$$

  Realizaremos el cambio de variable $z = \frac{x}{y}$. Esto nos permitirá obtener el polinomio $f(z,1)$. Dado que $f(z,1) \in \mathbb{C}[z]$ y $\mathbb{C}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado (Teorema Fundamental del Álgebra); este polinomio se puede factorizar como

  $$f(z,1) = a(z-b_1)(z-b_2)...(z-b_n),$$

  con $n \leq d$. Se consideran n factores pues existen casos en que no necesariamente se consigue un polinomio de grado d. Por ejemplo, sea $p(x,y) = ix^3y + \sqrt{\pi}x^2y^2 \in \mathbb{C}[x,y]$ con grad $p(x,y) = 4$ y al considerar $p(x,y) \in \mathbb{C}(y)[x]$ con $z = \frac{x}{y}$ se obtiene grad $p(z,1) = 3$. Esto con $a, b_i \in \mathbb{C}$, $\forall$ $i = 1, ..., n$. Dado nuestro cambio de variable, lo anterior puede escribirse como

  $$f(\tfrac{x}{y}, 1) = a(\tfrac{x}{y} - b_1)(\tfrac{x}{y} - b_2)...(\tfrac{x}{y} - b_n),$$
  $$y^d f(\tfrac{x}{y}, 1) = a(x - b_1y)(x - b_2y)...(x - b_ny).$$

  Por consiguiente

  $$f(x,y) = a(x - b_1y)(x - b_2y)...(x - b_ny).$$

(39) Considere la recta $\ell_1 : (2-a)x + (3a-1)y + a + 1 = 0$. En cada caso; determine el valor de $a \in \mathbb{R}$, tal que

(a) El punto $(-2, 1)$ pertenezca a ℓ_1.

(b) El ángulo de inclinación de la recta ℓ_1 sea $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$.

(c) ℓ_1 sea perpendicular a $\ell_2 : ax - 2y + 10 = 0$.

(d) ℓ_1 forme un triángulo de área $\frac{3}{2}$ respecto a los ejes coordenados.

(40) Dos rectas variables ℓ_1 y ℓ_2 que pasan respectivamente por dos puntos fijos A y B se cortan perpendicularmente en el punto P. Determinar el lugar geométrico de P. Encuentre el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la recta $\ell_1 : kx + (k-1)y - 18 = 0$ sea paralela a $\ell_2 : 4x + 3y + 7 = 0$.

(41) Determine las ecuaciones de las bisectrices para los ángulos formados por las rectas $\ell_1 : 3x+4y+8 = 0$ y $\ell_2 : 5x + 12y - 15 = 0$. Calcule la distancia entre las rectas $\ell_3 : 3x + 2y = 7$ y $\ell_4 : 3x - 2y = -7$. Encuentre los puntos de la recta $\ell_5 : 3x - 2y + 4 = 0$ que estén a distancia 7 de $(1, 1)$.

(42) Determine las coordenadas de los vértices de un paralelogramo. Se sabe que dos de sus lados están contenidos en las rectas $\ell_1 : 3x - 7y + 18 = 0$ y $\ell_2 : x + 2y - 7 = 0$. Adicionalmente, una de sus diagonales esta contenida en $\ell_3 : 5x - 3y - 22 = 0$.

(43) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por la intersección de $\ell_1 : x - y + 5 = 0$, $\ell_2 : x + y + 1 = 0$ y que dista del origen a una longitud de 3 unidades. Dos rectas ℓ_3 y ℓ_4; forman entre sí un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$. Se sabe que ℓ_4 posee ángulo de inclinación $\alpha = \arctan(-3)$. Calcule la pendiente de la recta ℓ_3.

(44) Considere un triángulo ABC isósceles, rectángulo en C. ABC varía de tal manera que su vértice A permanece fijo en el origen del sistema de coordenadas, mientras que B se mueve sobre la recta de ecuación $x = a$. Determine la ecuación del lugar geométrico que recorre el punto C.

(45) Demuestre que el área del triángulo formado por las rectas $\ell_1 : y = m_1x + n_1$, $\ell_2 : y = m_2x + n_2$ y el eje X con $m_1 \neq m_2$ viene dado por

$$A_\triangle = \frac{(n_1m_2 - n_2m_1)^2}{2\,|m_2m_1|\,|m_2 - m_1|}.$$

(46) Considere los puntos (a, b) y (c, d) perteneciente a las rectas ℓ_1 y ℓ_2 (respectivamente). Se sabe que el ángulo de inclinación para ℓ_1 y ℓ_2 es α. Pruebe que la distancia entre las rectas corresponde a $d = |(a-c)\sin(\alpha) - (b-d)\cos(\alpha)|$.

Soluciones

- (Ejercicio 40) (a) Considere la Figura 3 que bosqueja el enunciado del problema.

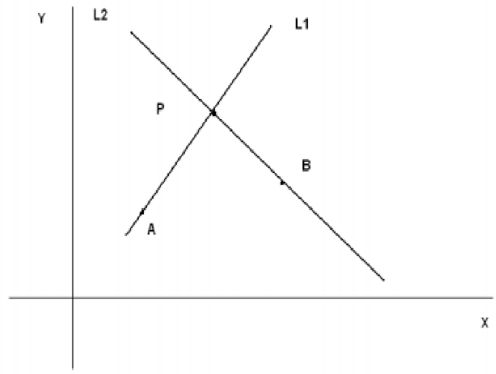

Figura 3: Rectas ℓ_1 y ℓ_2.

Digamos $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$. Así

$$\begin{aligned} \ell_1 &: y - b = m_1(x - a), \\ \ell_2 &: y - d = m_2(x - c). \end{aligned}$$

Consideraremos los casos en que $x \neq a$ o $x \neq c$. De esta forma; tendremos

$$\begin{aligned} m_{\ell_1} &= \frac{y-b}{x-a}, \\ m_{\ell_{12}} &= \frac{y-d}{x-c}. \end{aligned}$$

Dado que ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares

$$\begin{aligned} m_{\ell_1} \cdot m_{\ell_2} &= -1, \\ \left(\frac{y-b}{x-a}\right) \cdot \left(\frac{y-d}{x-c}\right) &= -1, \\ y^2 - dy - by + bd &= cx + ax - x^2 - ac. \end{aligned}$$

Completando cuadrados

$$\left(y - \left(\frac{b+d}{2}\right)\right)^2 + \left(x - \left(\frac{a+c}{2}\right)\right)^2 = \frac{(b-d)^2 + (a-c)^2}{4}.$$

Por lo tanto, el lugar geométrico corresponde a una circunferencia de centro

$$C = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right),$$

cuyo radio es

$$r = \sqrt{\frac{(b-d)^2 + (a-c)^2}{4}}.$$

Note que C corresponde al punto medio entre A y B.
(b) Para que ℓ_1 sea paralela a ℓ_2 debe verificarse que $m_{\ell_1} = m_{\ell_2}$. Podemos reescribir las rectas ℓ_1 y ℓ_2 mediante su ecuación principal. Es decir

$$\ell_1 : y = -\frac{kx}{k-1} + \frac{18}{k-1},$$

$$\ell_2 : y = -\frac{4x}{3} - \frac{7}{3}.$$

Así $m_{\ell_1} = -\dfrac{k}{k-1}$ y $m_{\ell_2} = -\dfrac{4}{3}$. Dada la hipótesis

$$-\frac{k}{k-1} = -\frac{4}{3},$$
$$k = 4.$$

- (Ejercicio 41) (a) Considere la Figura 4. Esta recrea la situación geométrica que describen las bisectrices, tras la intersección de dos rectas.

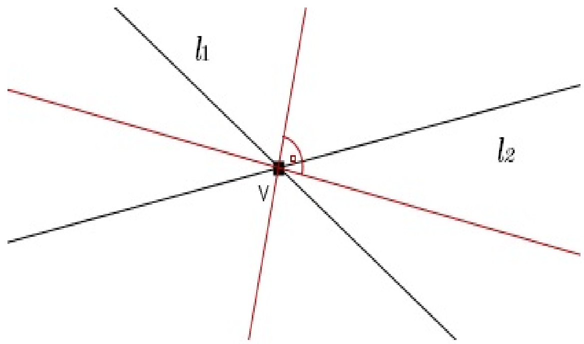

Figura 4: Rectas y Bisectrices.

Note que las bisectrices forman el conjunto de los puntos equidistantes respecto a ℓ_1 y ℓ_2. Es decir los pares ordenados (x, y) que satisfacen

$$\frac{|3x + 4y + 8|}{5} = \frac{|5x + 12y - 15|}{13}.$$

Esto puede reescribirse como

$$\frac{3x + 4y + 8}{5} = \pm\frac{5x + 12y - 15}{3}.$$

Por lo tanto, se obtienen las ecuaciones (dados los signos)

$$14x - 8y + 179 = 0,$$
$$64x + 112y + 29 = 0.$$

(b) Note ℓ_3 no es paralela a ℓ_4; pues $m_{\ell_3} \neq m_{\ell_4}$. De esta forma, la distancia entre estas dos rectas es cero.

(c) Debemos encontrar los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que satisfagan el sistema

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 49,$$
$$3x - 2y = -4.$$

Note que $3x - 2y = -4 \Rightarrow y = \dfrac{3x}{2} + 2$. Reemplazando, se tiene

$$(x-1)^2 + \left(\frac{3x}{2} + 1\right)^2 - 49 = 0,$$
$$13x^2 + 4x - 188 = 0.$$

Por lo tanto

$$x = \frac{-2 \pm 12\sqrt{17}}{13}.$$

Así, $x_1 = \dfrac{-2+12\sqrt{17}}{13}$ y $x_2 = \dfrac{-2-12\sqrt{17}}{13}$. Esto implica obtener

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{20+36\sqrt{17}}{13},\\
y_2 &= \frac{20-36\sqrt{17}}{13}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, los puntos buscados son

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{-2+12\sqrt{17}}{13}, \frac{20+36\sqrt{17}}{13}\right),\\
&\left(\frac{-2-12\sqrt{17}}{13}, \frac{20-36\sqrt{17}}{13}\right).
\end{aligned}
$$

- (Ejercicio 42) ℓ_1 y ℓ_2 son rectas que contienen dos lados del paralelogramo. Por otro lado

$$
\begin{aligned}
m_{\ell_1} &= \frac{3}{7} \text{ pues } \ell_1 : y = \frac{3x}{7} + \frac{18}{7},\\
m_{\ell_2} &= -\frac{1}{2} \text{ pues } \ell_2 : y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

Como $m_{\ell_1} \neq m_{\ell_2}$, entonces las rectas no son paralelas y su intersección es uno de los vértices del cuadrilátero. Así, debemos encontrar el par (x, y) tal que satisfaga el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
3x - 7y &= -18,\\
x + 2y &= 7.
\end{aligned}
$$

Se obtiene como solución, $x = 1$ e $y = 3$. Así obtenemos el punto $A(1, 3)$. Además, una de sus diagonales esta contenida en $\ell_3 : 5x - 3y - 22 = 0$. Evidentemente $A \notin \ell_3$; por lo que ℓ_3 contiene a la diagonal que no pasa por A y determina dos vértices. Así, $C \in \ell_1 \cap \ell_3$ y $B \in \ell_2 \cap \ell_3$. Por ende; se tendrán los sistemas respectivos (para C)

$$
\begin{aligned}
3x - 7y &= -18,\\
5x - 3y &= 22,
\end{aligned}
$$

de donde se consigue $x = 8$ e $y = 6$. Así $C(8, 6)$. Ahora, el sistema a considerar para B es

$$
\begin{aligned}
x + 2y &= 7,\\
5x - 3y &= 22,
\end{aligned}
$$

de donde se consigue $x = 5$ e $y = 1$. Así $B(5, 1)$. Finalmente nos falta hallar D (cuarto vértice). Este estará dado por la intersección de las rectas paralelas a ℓ_1 y ℓ_2 que pasan por los puntos B y C respectivamente. Para ℓ_1^* que pasa por B diremos que tiene ecuación

$$y = m_1 x + n_1.$$

Dado que $\ell_1^* // \ell_1$ entonces $m_1 = \dfrac{3}{7}$. Además, $(5, 1) \in \ell_1^*$ por lo que

$$n = -\frac{8}{7}.$$

Así $\ell_1^* : y = \dfrac{3x}{7} - \dfrac{8}{7} \Leftrightarrow \ell_1^* : 3x - 7y = 8$. Para ℓ_2^* (que pasa por C) diremos que tiene ecuación

$$y = m_2 x + n_2.$$

Dado que $\ell_2^* // \ell_2$ entonces $m_2 = -\dfrac{1}{2}$. Además, $(8, 6) \in \ell_2^*$ por lo que

$$n = 10.$$

Así $\ell_2^*: y = -\dfrac{x}{2} + 10 \Leftrightarrow \ell_2^*: x + 2y = 20$. Dado que D pertenece a $\ell_1^* \cap \ell_2^*$, D corresponderá a la solución del sistema

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= 8, \\ x + 2y &= 20. \end{aligned}$$

Se consigue $x = 12$ e $y = 4$. Por lo tanto $D(12, 4)$. Así, los vértices buscados son $A(1, 3)$, $B(5, 1)$, $C(8, 6)$ y $D(12, 4)$.

- (Ejercicio 43) (a) Consideremos la familia de rectas que pasa por la intersección de ℓ_1 con ℓ_2. Este conjunto viene dado por la expresión

$$\ell_f : x - y + 5 + \lambda(x + y + 1) = 0,$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Note que lo anterior puede verse como $\ell_f : x(1+\lambda)+y(\lambda-1)+5+\lambda = 0$. Empleando la distancia de un punto a una recta (desde $(0, 1)$ a ℓ_f)

$$d = \frac{|(1+\lambda) + \cdot 0 + (-1+\lambda)\cdot 0 + 5 + \lambda|}{\sqrt{(1+\lambda)^2 + (\lambda-1)^2}}$$

$$3 = \frac{|5+\lambda|}{\sqrt{2\lambda^2+2}}.$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} 9 &= \frac{25 + 10\lambda + \lambda^2}{2\lambda^2 + 2}, \\ 17\lambda^2 - 10\lambda - 7 &= 0. \end{aligned}$$

Se obtiene $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\dfrac{7}{17}$. Reemplazando estos valores en λ_f se consiguen las rectas

$$\begin{aligned} x + 3 &= 0, \\ 5x - 12y + 39 &= 0. \end{aligned}$$

(b) Dado que ℓ_2 posee ángulo de inclinación $\alpha = \arctan(-3)$, esto implica que $m_{\ell_2} = -3$. Ahora, dado que ℓ_1 y ℓ_2 forman un ángulo de $\dfrac{3\pi}{4}$; se tiene

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= \left|\frac{-3 - m_{\ell_1}}{1 - 3m_{\ell_2}}\right|, \\ -1 &= \pm\left(\frac{-3 - m_{\ell_1}}{1 - 3m_{\ell_2}}\right). \end{aligned}$$

Esto nos arroja dos valores posibles para m_{ℓ_1}. Por lo tanto

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{-3 - m_{\ell_1}}{1 - 3m_{\ell_1}} \Rightarrow m_{\ell_1} = -\frac{1}{2}, \\ -1 &= -\left(\frac{-3 - m_{\ell_1}}{1 - 3m_{\ell_1}}\right) \Rightarrow m_{\ell_1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (Ejercicio 44) Consideremos la Figura 5 que bosqueja el enunciado del problema.

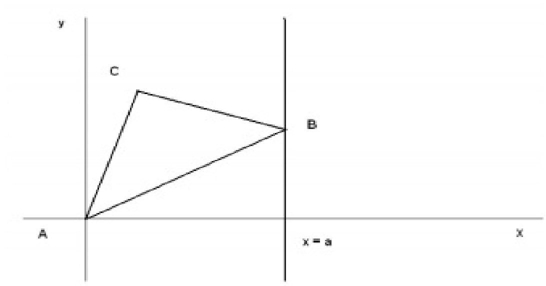

Figura 5: Triángulo ABC.

Sean los puntos $A = (0,0), B = (a, y_b)$ y $C = (x_c, y_c)$. Como el triángulo es isósceles se tiene que $AC = BC$. Así

$$(x_c - 0)^2 + (y_c - 0)^2 = (x_c - a)^2 + (y_c - y_b)^2. \tag{1}$$

Por otro lado, $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{BC}$. Entonces $m_{\overline{AC}}$ y $m_{\overline{BC}}$ corresponden a las pendientes de las rectas que pasan por $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Estas verifican

$$m_{\overline{AC}} \cdot m_{\overline{BC}} = -1.$$

Dado que $m_{\overline{AC}} = \dfrac{y_c - 0}{x_c - 0} = \dfrac{y_c}{x_c}$ y $m_{\overline{BC}} = \dfrac{y_c - y_b}{x_c - a}$; la expresión anterior resulta

$$\frac{y_c(y_c - y_b)}{x_c(x_c - a)} = -1.$$

Elevando al cuadrado, se consigue

$$y_c^2(y_c - y_b)^2 = x_c^2(x_c - a)^2,$$

$$(y_c - y_b)^2 = \frac{x_c^2}{y_c^2}((x_c - a)^2). \tag{2}$$

Por (2) en (1), se logra

$$\begin{aligned} x_c^2 + y_c^2 &= (x_c - a)^2 + \frac{x_c^2}{y_c^2}(x_c - a)^2, \\ y_c^2 &= (x_c - a)^2, \\ y_c &= \pm(x_c - a). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtienen las rectas $y_{c_1} = x_c - a$ e $y_{c_2} = -x_c + a$; que corresponde a las ecuaciones del lugar geométrico que recorre el punto C.

- (Ejercicio 46) Recuerde que la pendiente de una recta $\ell_p : y = m_p x + n_p$ viene dada por $m_p = \tan(\alpha_p)$ donde α_p corresponde al ángulo de inclinación de ℓ_p.

  Dado que α es el ángulo de inclinación de ℓ_1 y ℓ_2; se verifica que $m_{\ell_1} = m_{\ell_2} = \tan(\alpha)$. Por ende, las ecuaciones de la recta asociadas a ℓ_1 y ℓ_2 respectivamente, son

  $$\begin{gathered}\ell_1 : y - b = \tan(\alpha)(x - a), \\ \ell_2 : y - d = \tan(\alpha)(x - c) \Rightarrow \ell_2 : \tan(\alpha)x - y + d - c\tan(\alpha) = 0,\end{gathered}$$

  ya que $(a, b) \in \ell_1$ y $(c, d) \in \ell_2$. Evidentemente ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas; por lo que para calcular la distancia entre estas dos rectas basta tomar un punto perteneciente a ℓ_1 (a, b) y emplear la *formula* (distancia de un punto a una recta) con la recta ℓ_2 . Así

  $$d = \frac{|a\tan(\alpha) - b + d - c\tan(\alpha)|}{\sqrt{\tan^2(\alpha) + 1}}$$

  $$\begin{aligned} d &= \frac{|(a - c)\tan(\alpha) + d - b|}{\sqrt{\sec^2(\alpha)}}, \\ d &= \frac{|(a - c)\tan(\alpha) + d - b|}{|\sec(\alpha)|}, \\ d &= \left|\frac{(a - c)\tan(\alpha) - (b - d)}{\sec(\alpha)}\right|, \\ d &= |(a - c)\sin(\alpha) - (b - d)\cos(\alpha)|. \end{aligned}$$

(47) Considere el conjunto $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Demuestre que para todo $w_1, w_2 \in D$, se verifica la desigualdad

$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_1} w_2}\right| < 1.$$

(48) Calcule

$$S = 1 + \binom{n}{1}\cos(x) + \binom{n}{2}\cos(2x) + ... + \binom{n}{n}\cos(nx),$$
$$H = 1 + \binom{n}{1}\sin(x) + \binom{n}{2}\sin(2x) + ... + \binom{n}{n}\sin(nx).$$

(49) Sea ω, una raíz n - ésima primitiva de la unidad. Para todo $k \in \mathbb{N}$, pruebe que $\omega^k = 1$ si y solo si $\mathrm{ord}(\omega)|k$. Si ω es raíz cubica primitiva de la unidad, pruebe que $(1+\omega)^3 + (1+\omega^2)^9 + (1+\omega^3)^6 = 62$.

(50) Considere $S := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right\}$. Pruebe que S no es un conjunto algebraico.

(51) Encuentre todas las rectas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el punto $(0, 2)$ y tales que su distancia a $(0, 0)$ es igual a la unidad.

(52) Considere P_1 y P_2, dos puntos fijos. Sea ℓ una recta variable y d_1, d_2; distancias entre P_1 a ℓ y P_2 a ℓ (respectivamente). Pruebe que si $d_1 = 2d_2$, entonces la recta ℓ pasa por un punto fijo.

(53) Demuestre que el ángulo de intersección θ entre las rectas $\ell_1 : y = m_1 x + n_1$ y $\ell_2 : y = m_2 x + n_2$ está dado por la expresión

$$\theta = \arctan\left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$

(54) Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -4)$, cuyas coordenadas en el origen suman 3. Considere un triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(5, 4)$, $C(2, -3)$. Calcule la longitud de la altura correspondiente al vértice A y el área del triángulo.

Soluciones

- (Ejercicio 47) Se sabe que $w_1, w_2 \in D$. Como $|w_2| > 1$, entonces $|w_2|^2 > 1$. Esto implica que $1 - |w_2|^2 < 0$. Por otro lado, como $|w_1|^2 > 1$

$$|w_1|^2 (1 - |w_2|^2) < 1 - |w_2|^2,$$
$$|w_1|^2 - |w_1|^2 |w_2|^2 < 1 - |w_2|^2,$$
$$|w_1|^2 + |w_2|^2 < 1 + |w_1|^2 |w_2|^2$$

Añadiendo $-\overline{w_1}w_2 - w_1\overline{w_2}$ a la expresión anterior, se consigue

$$|w_1|^2 - \overline{w_1}w_2 - w_1\overline{w_2} + |w_2|^2 < 1 - \overline{w_1}w_2 - w_1\overline{w_2} + |w_1|^2 |w_2|^2,$$
$$(w_1 - w_2)(\overline{w_1} - \overline{w_2}) < (1 - \overline{w_1}w_2)(1 - w_1\overline{w_2}),$$
$$(w_1 - w_2)\overline{(w_1 - w_2)} < (1 - \overline{w_1}w_2)\overline{(1 - \overline{w_1}w_2)},$$
$$|w_1 - w_2|^2 < |1 - \overline{w_1}w_2|^2,$$

pues $|w|^2 = w\overline{w}$. Dado que $|w_1 - w_2| > 0$ y $|1 - \overline{w_1}w_2| > 0$, se sigue que

$$|w_1 - w_2| < |1 - \overline{w_1}w_2|,$$
$$\left|\frac{w_1 - w_2}{1 - \overline{w_1}w_2}\right| < 1,$$

con $|1 - \overline{w_1}w_2| \neq 0$.

- (Ejercicio 50) Definamos $f(x,y) := f_n(x)y^n + f_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + f_1(x)y + f_0(x)$, con $f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\forall\ i = 0, 1, ..., n$. Supondremos que $S \subseteq \mathbb{R}^2$ es un conjunto algebraico. Por lo tanto, existe un polinomio $f(x,y)$ no nulo en $\mathbb{R}[x,y]$ tal que $S = \mathbb{V}(f(x,y))$. Así

$$f\left(x, \sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Por consiguiente

$$f_n(x)\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)^n + f_{n-1}(x)\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)^{n-1} + ... + f_1(x)\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right) + f_0(x) = 0,$$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$. Dividiendo por $\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)^n \neq 0$; se logra

$$f_n(x) + \frac{f_{n-1}(x)}{\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)} + ... + \frac{f_1(x)}{\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)^{n-1}} + \frac{f_0(x)}{\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)^n} = 0.$$

Tomando el límite de la expresión anterior cuando $x \to \infty$, se consigue

$$\lim_{x\to\infty}\left(f_n(x) + \frac{f_{n-1}(x)}{\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)} + ... + \frac{f_1(x)}{\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)^{n-1}} + \frac{f_0(x)}{\left(\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^{\sqrt{\pi}^x}}\right)^n}\right) = \lim_{x\to\infty} f_n(x).$$

Sin embargo

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } f_n(x) \text{ es un polinomio no constante} \\ c & \text{si } f_n(x) \text{ es un polinomio constante no nulo} \end{cases}$$

En cualquier caso, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) \neq 0$; lo cual nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, S no es un conjunto algebraico.

- (Ejercicio 51) Es sabido que la distancia de un punto $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ a una recta $\ell \in \mathbb{R}^2$ de ecuación $Ax + By + C = 0$ está dada por la expresión

$$d(p, \ell) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dado que ℓ pasa por el punto $(0, 2)$; podemos escribir $\ell : y - 2 = mx$. Por lo tanto, considerando $p = (0, 0)$ y $\ell : mx - y + 2 = 0$; se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{|2|}{\sqrt{m^2 + 1}}, \\ \sqrt{m^2 + 1} &= |2|, \\ m^2 + 1 &= 4, \\ m &= \pm\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existen dos rectas $\ell_1 : \sqrt{3}x - y + 2 = 0$ y $\ell_2 : -\sqrt{3}x - y + 2 = 0$ tales que pasan por $(0, 2)$ y su distancia al origen es la unidad.

- (Ejercicio 54) (a) La ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2, -4)$ es de la forma $\ell_1 : y + 4 = m(x + 2)$, con m; pendiente. Buscaremos los puntos de intersección de ℓ_1 con los ejes coordenados. Para el corte con el eje de las abscisas, se tiene $y = 0$. Por lo tanto

$$x = \frac{4 - 2m}{m}.$$

Así, el punto buscado corresponde a $A\left(\frac{4 - 2m}{m}, 0\right)$. Para el corte con el eje de las ordenadas, se tiene $x = 0$. Así

$$y = 2m - 4.$$

El punto que buscamos es $B\,(0, 2m - 4)$. Por lo tanto, dada nuestra hipótesis

$$\begin{aligned} \frac{4 - 2m}{m} + 2m - 4 &= 3, \\ 2m^2 - 9m + 4 &= 0, \\ (2m - 1)(m - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Por ende obtenemos $m_1 = \frac{1}{2}$ y $m_2 = 4$. Así, se obtienen las ecuaciones $x - 2y - 6 = 0$ (dado m_1) y $4x - y + 4 = 0$ (dado m_2).

(b) Considere el triángulo dado por la Figura 6

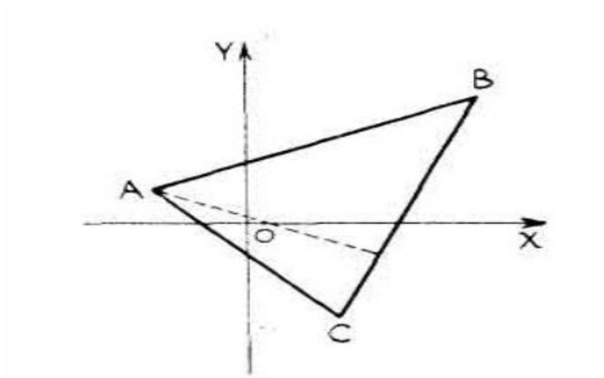

Figura 6: Triángulo.

Encontraremos la recta ℓ_2 que pasa por los puntos B y C. Para eso, veamos que su pendiente viene dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3-4}{2-5} = \frac{7}{3}.$$

Ya que B pertenece a la recta; se puede reescribir como $y - 4 = \frac{7}{3}(x-5)$. Reordenando, se obtiene la expresión general (de la recta); $\ell_2 : 7x - 3y - 23 = 0$. Calcularemos la distancia entre el punto A y la recta ℓ_2. Esto nos permitirá obtener la altura del triángulo formado. Así

$$h = \frac{|7(-2) - 3(1) - 23|}{\sqrt{49+9}} = \frac{40}{\sqrt{58}}.$$

Por último, el área basal del triángulo ABC viene dado por el segmento $\overline{BC}$. Es decir

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-2)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{58}.$$

Por lo tanto, el área del triángulo corresponde a

$$A_{\triangle} = \frac{40\sqrt{58}}{2\sqrt{58}} = 20.$$

Ayudantía 7: Ecuación de la Parábola

Septiembre 23, 2019

(55) (a) Determine las coordenadas del vértice, foco, ecuación de la directriz, ecuación del eje y gráfica correspondiente para la parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$.

(b) Encuentre una expresión general y ordinaria para la parábola que pasa por los puntos $P(0,0)$, $Q(8,-4)$, $R(3,1)$ y cuya directriz es paralela al eje de las ordenadas. Determine sus elementos característicos y gráfica correspondiente.

(56) (a) Demuestre que las rectas tangente y normal a la parábola de ecuación $y^2 = 4px$ en el punto (x_0, y_0) están dadas por $\ell_t : y - y_0 = \frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$ y $\ell_n : y - y_0 = -\frac{y_0}{2p}(x - x_0)$. Conjeture (y demuestre) la ecuación para la recta tangente a la parábola $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ con centro (h,k) en el punto (x_0, y_0).

(b) Determine las rectas tangente y normal a la parábola $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$ en el punto $(-6,3)$.

(57) (a) Demuestre que las rectas tangente y normal a la parábola de ecuación $x^2 = 4py$ en el punto (x_0, y_0) están dadas por $\ell_t : y - y_0 = \frac{x_0}{2p}(x - x_0)$ y $\ell_n : y - y_0 = -\frac{2p}{x_0}(x - x_0)$. Conjeture (y demuestre) la ecuación para las recta tangente a la parábola $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ con centro (h,k) en el punto (x_0, y_0).

(b) Determine la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 4x + 12y - 8 = 0$ que sea paralela a la recta $3x + 9y - 11 = 0$.

(58) Encuentre la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos donde se pueden trazar rectas tangentes a la parábola de ecuación $y^2 = 2px$, que forman entre sí un ángulo constante.

(59) Las rectas tangentes en los puntos P y Q (respectivamente) de la parábola $y^2 = 4px$ se intersectan en el punto $(2p, 3p)$. Determine las coordenadas de P y Q.

(60) Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$, se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q a la parábola ($P \neq Q$). El segmento $\overline{PQ}$ intercepta al eje de simetría en R. Pruebe que el foco divide al trazo $\overline{OR}$ en la razón $1:3$.

Soluciones

- Ejercicio 55 (a) Dada que la ecuación de la parábola está dada por $y = 2x^2 - 3x + 1$, su gráfica será de forma vertical. Completando cuadrados, se sigue que $0 = (x - \frac{3}{4})^2 - \frac{y}{2} - \frac{1}{16}$. Por lo tanto, $\frac{1}{2}(y + \frac{1}{8}) = (x - \frac{3}{4})^2$; de donde obtenemos que el vértice de la parábola corresponde a $V(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$. Además, $\frac{1}{2} = 4p$, por lo que $p = \frac{1}{8}$ (en distintos textos, p se puede encontrar como a). Esto, ya que la forma ordinaria vertical para una parábola es $(x - h)^2 = 4p(y - k)$. De esta forma, las coordenadas del foco son

$$F(h, k + p) = (\tfrac{3}{4}, 0).$$

La ecuación de la directriz, viene dada por

$$\ell_d : y = k - p,$$
$$\ell_d : y = -\tfrac{1}{4}.$$

Para la ecuación del eje, se sigue que

$$\ell_e : x = h,$$
$$\ell_e : x = \tfrac{3}{4}.$$

Finalmente, la gráfica buscada está dada por la Figura 7.

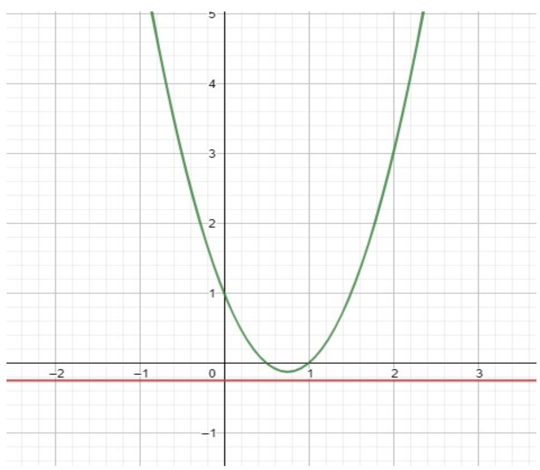

Figura 7: Parábola de ecuación $y = 2x^2 - 3x + 1$.

- Ejercicio 55 (b) Dado que el eje de la parábola es paralelo al eje X, el gráfico de esta última será de forma horizontal. Consideremos $x = ay^2 + by + c$. con $a, b, c \in \mathbb{R}$ (por determinar). Evaluando los puntos A, B, C en esta expresión, se tiene el sistema

$$0 = c,$$
$$8 = 16a - 4b,$$
$$3 = a + b.$$

De donde se obtiene $a = 1$, $b = 2$ y $c = 0$. Por lo tanto $x = y^2 + 2y$. Completando cuadrados, se logra la expresión $x+1 = (y+1)^2$; de donde el vértice de esta parábola corresponde a $V(-1, -1)$. Además, $1 = 4p$; por lo que $p = \frac{1}{4}$. Esto, ya que la forma ordinaria horizontal de una parábola viene dada por $(y - k)^2 = 4p(x - h)$. De esta forma, las coordenadas del foco son

$$F(h + p, k) = (-\tfrac{3}{4}, -1).$$

La ecuación de la directriz está dada por

$$\ell_d : x = h - k,$$
$$\ell_d : x = -\tfrac{5}{4}.$$

Para la ecuación del eje, se sigue que

$$\ell_e : y = k,$$
$$\ell_e : y = -1.$$

Finalmente, la gráfica buscada está dada por la Figura 8.

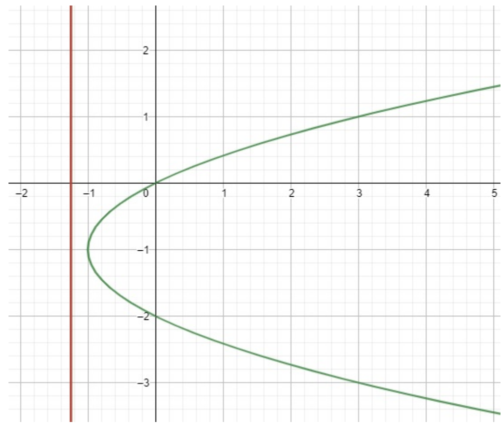

Figura 8: Parábola de ecuación $x = y^2 + 2y$.

- (Ejercicio 56 a) Derivando implícitamente la expresión $y^2 - 4px = 0$ (la derivada de $y(x)$ con respecto a x), entonces

$$2yy' - 4p = 0 \Rightarrow y' = \tfrac{2p}{y}\|_{(x_0,y_0)} \Rightarrow y' = m = \tfrac{2p}{y_0}.$$

Note que también $m = \frac{y_0}{2x_0}$, pues $y_0^2 = 4px_0$. Así

$$\ell_t : y - y_0 = \tfrac{y_0}{2x_0}(x - x_0).$$

Como la recta normal es perpendicular a la recta tangente y pasa por (x_0, y_0), su ecuación estará dada por

$$\ell_n : y - y_0 = -\tfrac{y_0}{2p}(x - x_0).$$

- (Ejercicio 56 b) Derivando implícitamente la expresión $y^2 + 4x + 2y + 9 = 0$ (la derivada de $y(x)$ con respecto a x), entonces

$$2yy' + 4 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\tfrac{2}{y+1}\|_{(6,3)} \Rightarrow y' = m = -\tfrac{1}{2}.$$

Finalmente

$$\ell_t : y - 3 = -\tfrac{1}{2}(x + 6),$$
$$\ell_n : y - 3 = 2(x + 6).$$

- (Ejercicio 57 a) Derivando implícitamente la expresión $x^2 - 4py = 0$ (la derivada de $y(x)$ con respecto a x), entonces

$$2x - 4py' = 0 \Rightarrow y' = \tfrac{x}{2p}\|_{(x_0,y_0)} \Rightarrow y' = m = \tfrac{x_0}{2p}.$$

Por lo tanto

$$\ell_t : y - y_0 = \tfrac{x_0}{2p}(x - x_0).$$

Como la recta normal es perpendicular a la recta tangente y pasa por (x_0, y_0), su ecuación estará dada por

$$\ell_n : y - y_0 = -\tfrac{2p}{x_0}(x - x_0).$$

- (Ejercicio 57 b) La pendiente de la recta $3x+9y-11=0$ es $-\frac{1}{3}$. Por lo tanto, la recta tangente a la parábola de ecuación $x^2+4x+12y-8=0$ es $\ell_t : y = -\frac{x}{3}+n$. Falta determinar el valor de n. Reemplazando ℓ_t en la ecuación de la parábola, se logra

$$x^2+4x+12(-\tfrac{x}{3}+n)-8=0.$$

Reordenando, se tiene $x^2+12n-8=0$. Por condición de tangencia, el discriminante de esta última expresión debe ser cero (así, la recta tangente ℓ_t interceptará en un solo punto a la parábola). De esta manera

$$\triangle = 0 \Rightarrow n = \tfrac{2}{3}.$$

Por lo tanto

$$\ell_t : y = -\tfrac{x}{3}+\tfrac{2}{3}.$$

- (Ejercicio 59) Considere la Figura 9.

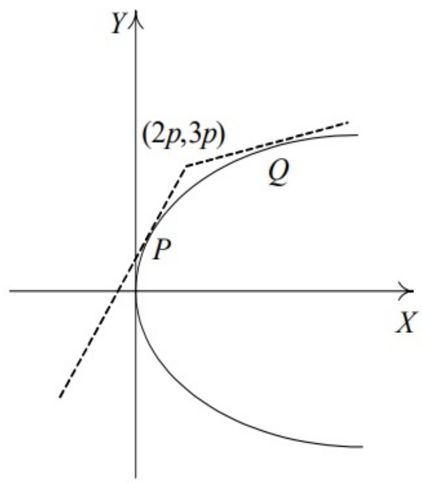

Figura 9: Parábola y puntos P, Q.

Digamos $P(x_0, y_0)$. La recta tangente ℓ_t que pasa por P está dada por $\ell_t : y - y_0 = \frac{2p}{y_0}(x-x_0)$. Por lo tanto, $m_{\ell t} = \frac{2p}{y_0}$. Adicionalmente

$$m_{\ell t} = \frac{3p-y_0}{2p-x_0}.$$

Se consigue

$$\frac{3p-y_0}{2p-x_0} = \tfrac{2p}{y_0}.$$

Desarrollando

$$3py_0 - y_0^2 = 4p^2 - 2px_0.$$

Como $y_0^2 = 4px_0$ (pues P pertenece a la parábola), entonces se puede expresar todo en función de y_0. Así

$$y_0^2 - 6py_0 + 8p^2 = 0,$$
$$(y_0-4p)(y_0-2p) = 0.$$

En caso de que $y_0 = 4p \Rightarrow x_0 = 4p$ y $y_0 = 2p \Rightarrow x_0 = p$. Por lo tanto, los puntos P y Q corresponden a $(p, 2p)$ y $(4p, 4p)$ respectivamente.

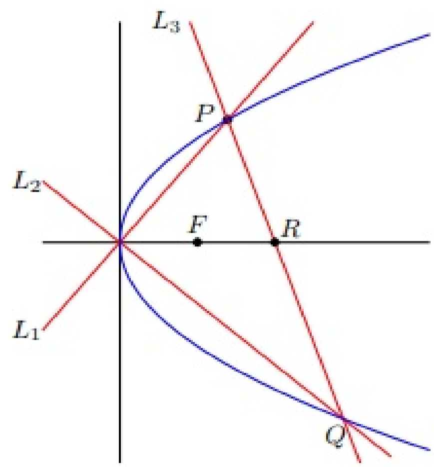

Figura 10: Rectas y Parábola.

- (Ejercicio 60) Considere la Figura 10.

  Digamos $\ell_1 : y = mx$. Ya que ℓ_1 y ℓ_2 son perpendiculares, se verifica que $\ell_2 : y = -\frac{x}{m}$. Interceptando ℓ_1 y ℓ_2 con la parábola de ecuación $y^2 = 4x$, cuyo foco es $F(1, 0)$; se obtienen los puntos $P(\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m})$ y $Q(4m^2, -4m)$. Llamaremos ℓ_3 a la recta que pasa por los puntos P, Q y particularmente R. Por consiguiente

  $$\ell_3 : y = -\tfrac{m}{m^2-1}(x - 4m^2) - 4m.$$

  Para encontrar las coordenadas de R, se tomará $y = 0$ en la última expresión (¿Por qué?). Se consigue $x = 4$. De esta forma, $R = (4, 0)$. Finalmente

  $$\begin{aligned} \overline{OR} &= \overline{OF} + \overline{FR}, \\ 4 &= 1 + \overline{FR}, \\ 3 &= \overline{FR}. \end{aligned}$$

  Por consiguiente

  $$\frac{\overline{OF}}{\overline{FR}} = \frac{1}{3}.$$

Ayudantía 8: Ecuación de la Circunferencia
Septiembre 25, 2019

(61) (a) Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,3)$, $B(0,-1)$ y $C(-2,1)$. Esboce la gráfica del lugar geométrico correspondiente, señalando su radio y centro respectivo.

(b) Determine los puntos de intersección entre las circunferencias $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ y $x^2+y^2+x+y-8=0$.

(62) Considere la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=5$. Determine los valores de $m \in \mathbb{R}$ para que la recta $x-2y+m=0$

(a) Intercepte a la circunferencia en dos puntos distintos.

(b) Sea tangente a la circunferencia.

(c) No intercepte a la circunferencia.

(63) (a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(11,4)$ y es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-8x-6y=0$.

(b) Considere la ecuación $x^2+y^2-4x+5y+\frac{25}{4}=0$. Determine la ecuación de la circunferencia concéntrica tangente a la recta $\ell : 5x-12y-1=0$.

(64) Considere un punto interior P de un triángulo isósceles, el cual se mueve de manera que el cuadrado de su distancia a la base (triángulo) es igual al producto de sus longitudes respecto a los otros dos lados. Pruebe que el lugar geométrico descrito por P es una circunferencia.

(65) Determine la(s) ecuación(es) de la circunferencia, cuyo centro esta sobre la recta $\ell_1 : 4x+3y-2=0$ y es tangente a $\ell_2 : x+y+4=0$ y $\ell_3 : 7x-y+4=0$. Señale su centro, radio y exhiba su gráfica correspondiente.

(66) (a) Encuentre las ecuaciones de la circunferencia inscrita y circunscrita para el triángulo de vértices $A(0,0)$, $B(1,2)$ y $C(-1,2)$.

(b) Demuestre (de tres maneras distintas) que cualquier ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

(67) Pruebe que cada recta tangente a una circunferencia es ortogonal al radio en el punto de contacto.

(68) Pruebe que la recta $\ell : m(x-a)-y+a\sqrt{1+m^2}$ es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2ax=0$, para cualquier valor real de m.

Soluciones

- (Ejercicio 61 a) Sea $x^2+y^2+mx+ny+p=0$, la ecuación general de la circunferencia buscada. Evaluando los puntos A, B y C en esta expresión; se consigue el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2m+3n+p&=-13,\\ -n+p&=-1,\\ -2m+n+p&=-5. \end{aligned}$$

Se obtiene como solución a $m=-\frac{2}{3}$, $n=-\frac{8}{3}$ y $p=-\frac{11}{3}$. Así, la ecuación de la circunferencia que pasa por A, B y C es $x^2+y^2-\frac{2x}{3}-\frac{8y}{3}-\frac{11}{3}=0$. Para encontrar el centro y el radio de esta última, completaremos cuadrados. Así

$$\begin{aligned} (x^2-\tfrac{2x}{3}+\tfrac{1}{9})-\tfrac{1}{9}+(y^2-\tfrac{8y}{3}+\tfrac{16}{9})-\tfrac{16}{9}-\tfrac{11}{3}&=0,\\ (x-\tfrac{1}{3})^2+(y-\tfrac{4}{3})^2&=\tfrac{50}{9}. \end{aligned}$$

De esto, se desprende que el centro de la circunferencia es $C(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ y el radio r viene dado por $r=\frac{\sqrt{50}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$. La gráfica buscada es

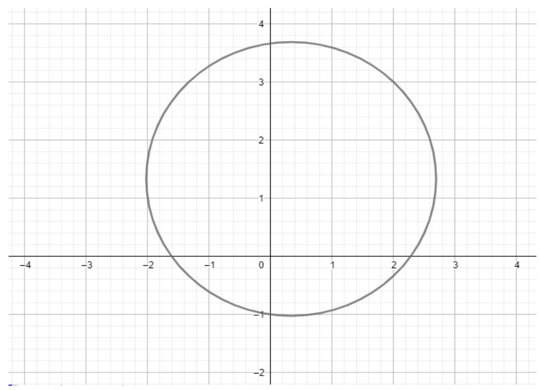

Figura 11: Circunferencia $x^2+y^2-\frac{2x}{3}-\frac{8y}{3}-\frac{11}{3}=0$.

- (Ejercicio 61 b) Se debe resolver el sistema

$$\begin{aligned} c_1 : x^2+y^2-2x+4y-11&=0,\\ c_2 : x^2+y^2+x+y-8&=0. \end{aligned}$$

Entonces $x^2+y^2-2x+4y-11=x^2+y^2+x+y-8$. Simplificando; se logra $-3x+3y-3=0$, que implica $x-y+1=0$. En particular, $x=y-1$. Reemplazando este valor en c_1 (también puede ser c_2)

$$\begin{aligned} (y-1)^2+y^2-2(y-1)+4y-11&=0,\\ 2y^2-8&=0,\\ y^2-4&=0,\\ (y-2)(y+2)&=0. \end{aligned}$$

Finalmente $y_1=2 \Rightarrow x_1=1$, $y_2=-2 \Rightarrow x_2=-3$ (esto al reemplazar en $x=y-1$). Se obtienen los puntos $(1,2)$ y $(-3,-2)$.

- (Ejercicio 63 b) La ecuación concéntrica tangente es $(x-2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=9$. ¿Por qué? Completando cuadrados para la circunferencia de ecuación $x^2+y^2-8x-6y=0$ se obtiene su centro. Es decir

$$(x^2-4x+4)-4+(y^2+5y+\tfrac{25}{4})-\tfrac{25}{4}+\tfrac{25}{4}=0,$$
$$(x-2)^2+(y-\tfrac{5}{2})^2=4.$$

Así $C(2,\frac{-5}{2})$. Dado que buscamos la ecuación de la circunferencia concéntrica tangente; esta tendrá centro $C(2,\frac{-5}{2})$. Para hallar el radio, simplemente basta calcular la distancia entre $(2,\frac{-5}{2})$ y ℓ (condición de tangencia). Así

$$r=d=\frac{\left|5(2)-12(\frac{-5}{2})-1\right|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\frac{39}{13}=3.$$

La ecuación buscada es $(x-2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=9$.

- (Ejercicio 65) Debemos encontrar un punto (x,y) perteneciente a ℓ_1 que este a la misma distancia de ℓ_2 y ℓ_3 para que sea el centro de la circunferencia. Para esto, se intersecta ℓ_1 con las bisectrices de ℓ_2 y ℓ_3. Recordar que las bisectrices son el conjunto de puntos equidistantes respecto a las rectas ℓ_2 y ℓ_3. Es decir, los pares ordenados que verifican

$$\frac{|x+y+4|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x-y+4|}{\sqrt{50}},$$
$$\frac{x+y+4}{\sqrt{2}}=\pm\left(\frac{7x-y+4}{\sqrt{50}}\right).$$

Dados los signos, se obtienen dos ecuaciones para las bisectrices; las cuales son $b_1: 12x-4y+24=0$ y $b_2: 2x-6y-16=0$. Realizando la intersección correspondiente entre ℓ_1 y b_1 se consigue el punto $(-4,6)$. Para ℓ_1 y b_2, se consigue $(2,-2)$. Dado que la distancia entre $(-4,6)$ a ℓ_2 (también puede ser ℓ_3) es $\sqrt{18}$ y entre $(2,-2)$ a ℓ_3 (también puede ser ℓ_2) es $\sqrt{8}$; se consiguen las ecuaciones de la circunferencias

$$c_1: (x-2)^2+(y+2)^2=8 \Rightarrow C(2,-2) \text{ y } r=\sqrt{8},$$
$$c_2: (x+4)^2+(y-6)^2=18 \Rightarrow C(-4,6) \text{ y } r=\sqrt{18}.$$

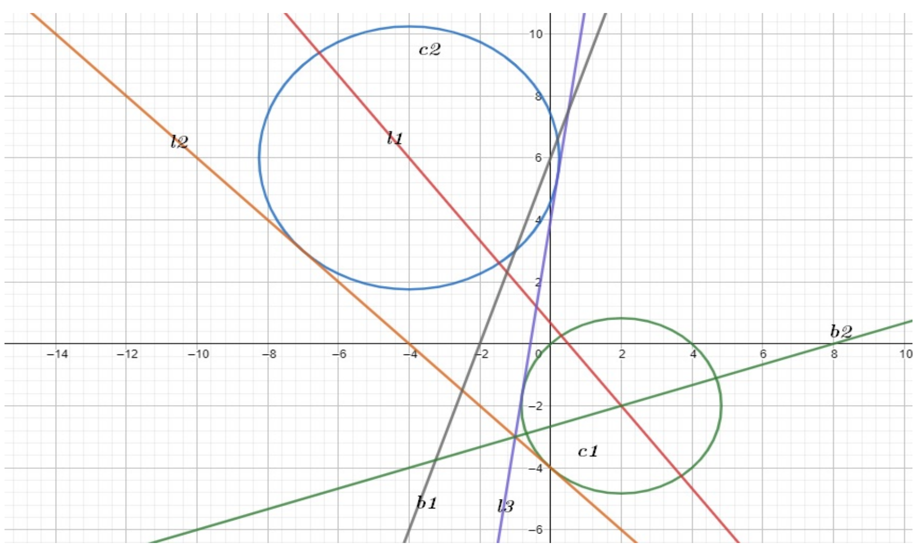

Figura 12: Tangencia, Circunferencia y Bisectrices.

(69) Determine los elementos característicos (vértices, focos, longitud del eje mayor, longitud del eje menor, longitud del lado recto, excentricidad) y gráfica correspondiente para la elipse de ecuación general:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0.$$

Repita el mismo procedimiento para la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 + 24x - 6y + 29 = 0$.

(70) (a) Demuestre que las rectas tangente y normal a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) están dadas por $\ell_t : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ y $\ell_n : y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$. Conjeture (y demuestre) la ecuación para la recta tangente a la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ con centro (h, k) en el punto (x_0, y_0).

(b) Encuentre las ecuaciones de la tangente a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ que pasan por el punto $(0, 4)$.

(71) Pruebe que las rectas tangentes a una elipse en dos puntos diametralmente opuestos son paralelas.

(72) Demuestre que el producto de las distancias entre los focos de la elipse a una recta tangente cualquiera es siempre constante.

(73) Pruebe que la recta normal a una elipse en cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.

Soluciones

- (Ejercicio 69) Completaremos cuadrados para conseguir la forma ordinaria de una elipse. Es decir

$$\begin{gathered}x^2+4y^2+2x-12y+6=0,\\ (x^2+2x+1)-1+4(y^2-3y+\tfrac{9}{4})-9=-6,\\ (x+1)^2+4(y-\tfrac{3}{2})^2=4,\\ \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1}=1.\end{gathered}$$

Estamos en presencia de una elipse horizontal; con $a=2$, $b=1$ y centro $C(-1,\frac{3}{2})$. Dado que en la elipse se tiene la relación $c^2=\left|a^2-b^2\right|$ (pues $c>0$), se logra $c=\sqrt{3}$. Además $F_1(-1-\sqrt{3},\frac{3}{2})$, $F_2(-1+\sqrt{3},\frac{3}{2})$, $V_1(-3,\frac{3}{2})$ y $V_2(1,\frac{3}{2})$. La longitud del eje mayor viene dada por $2a=4$, para el eje menor $2b=2$ y el lado recto $\frac{2b^2}{a}=1$. Por último, la excentricidad (dado que $a>b$, pues fijamos a con x y b con y) es $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Note que esto tiene sentido ya que la excentricidad de una elipse verifica $0<e<1$. Finalmente, la gráfica buscada es

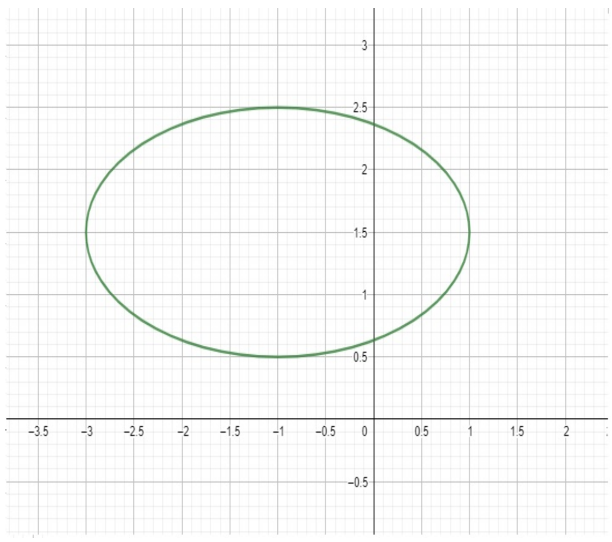

Figura 13: Elipse de ecuación $x^2+4y^2+2x-12y+6=0$.

- (Ejercicio 72) Sin perdida de generalidad, consideraremos una elipse horizontal centrada en el origen. La ecuación de la recta tangente en el punto $P(u,v)$ de la elipse $(x^2b^2+y^2a^2=a^2b^2)$ esta dada por

$$\begin{gathered}\ell_t:\tfrac{xu}{a^2}+\tfrac{yv}{b^2}=1,\\ \ell_t:xub^2+yva^2=a^2b^2.\end{gathered}$$

Por otro lado, las coordenadas de los focos son $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ con $c^2=\left|a^2-b^2\right|$. Calculando la distancia entre los focos a la recta ℓ_t se consigue

$$\begin{aligned}d_1(F_1,\ell_t)&=\frac{\left|-cub^2-a^2b^2\right|}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}},\\ d_2(F_2,\ell_t)&=\frac{\left|cub^2-a^2b^2\right|}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}.\end{aligned}$$

Por consiguiente $d_1d_2>0$. Así

$$d_1d_2=\frac{\left|c^2u^2b^4-a^4b^4\right|}{u^2b^4+v^2a^4}.$$

Usando el hecho de que $c^2 = \left|a^2 - b^2\right|$ y como (u, v) pertenece a la elipse verifica $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, se consigue (después de simplificar)

$$d_1 d_2 = b^2.$$

Esto prueba que el producto de la distancias entre los focos de la elipse a una tangente cualquiera es siempre constante.

- (Ejercicio 73) Considere la Figura 14. Esta describe la situación que propone el problema.

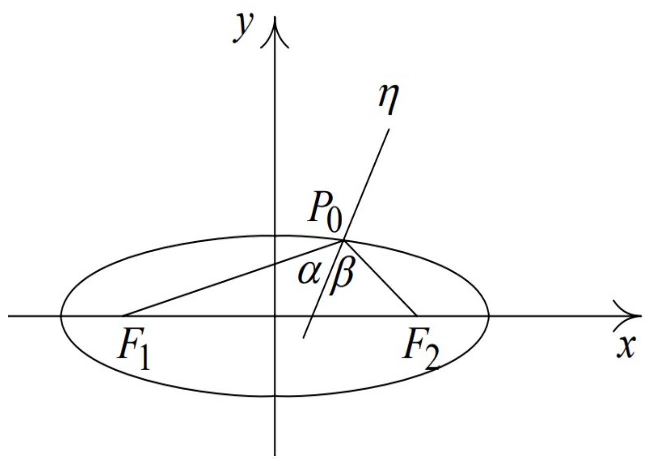

Figura 14: Recta Normal.

Sin perdida de generalidad, consideraremos una elipse horizontal centrada en el origen; cuya ecuación está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por Ejercicio 70 a), se sabe que la recta tangente a la elipse en el punto $P_0(x_0, y_0)$ (de tangencia) está dada por

$$m_{\ell_t} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Esto implica que la pendiente de la recta normal es

$$m_{\ell_n} = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}.$$

Por otro lado, las pendientes entre los puntos $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ con respecto al punto P_0 están dadas por

$$m_{F_1P_0} = \frac{y_0}{x_0 + c},$$
$$m_{F_2P_0} = \frac{y_0}{x_0 - c}.$$

Las rectas $m_{F_1P_0}$ y m_{ℓ_n} se interceptan formando un ángulo α. Este está dado por (ver Figura 14)

$$\tan(\alpha) = \frac{m_{F_1P_0} - m_{\ell_n}}{1 + m_{F_1P_0} m_{\ell_n}} = \frac{b^2 x_0 y_0 - a^2 x_0 y_0 + a^2 c y_0}{b^2 x_0^2 - b^2 c x_0 + a^2 y_0^2}.$$

Dado que $c^2 = \left|a^2 - b^2\right|$ (suposición inicial, $a > b$), la condición

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

pues P_0 es un punto de la elipse y simplificando, se logra

$$\tan(\alpha) = \frac{c y_0}{b^2}.$$

Es decir, $\alpha = \arctan(\frac{cy_0}{b^2})$. De forma análoga (se propone como ejercicio), se demuestra que $\beta = \arctan(\frac{cy_0}{b^2})$.

Esto implica que $\alpha = \beta$, por lo que la recta normal a una elipse en cualquiera de sus puntos es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.

Ayudantía 10: Ecuación de la Hipérbola

Septiembre 30, 2019

(74) Determine los elementos característicos (vértices, focos, ecuaciones de las asíntotas, longitud del eje transversal, longitud del lado conjugado, longitud de lado recto, excentricidad) y gráfica correspondiente para la hipérbola de ecuación general:

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0.$$

(75) (a) Demuestre que las rectas tangente y normal a la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) están dadas por $\ell_t : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ y $\ell_n : y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$. Conjeture (y demuestre) la ecuación para la recta tangente a la hipérbola $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ con centro (h, k) en el punto (x_0, y_0).

(b) Encuentre las ecuaciones de la tangente a la hipérbola de ecuación $4x^2 - 9y^2 = 36$, perpendiculares a la recta $\ell : 2x - y - 7 = 0$.

(76) Los extremos de la base de un triángulo son los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 0)$. Determine la ecuación del lugar geométrico para el vértice (x, y), sabiendo que se mueve de modo que el ángulo de la base CBA es igual al doble del ángulo CAB.

(77) Considere $a \in \mathbb{R}^+$ y la hipérbola equilátera de ecuación $x^2 - y^2 = a^2$.

(a) Determine el ángulo de intersección entre la hipérbola y la circunferencia $x^2 + y^2 = 9a^2$.

(b) Pruebe que el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a sus asíntotas es constante.

(78) Demuestre que el triángulo formado por una recta tangente cualquiera de una hipérbola y sus asíntotas tiene área constante.

Soluciones

- (Ejercicio 74) Completaremos cuadrados para conseguir la forma ordinaria de una hipérbola. Por lo tanto

$$\begin{gathered}9x^2-4y^2-54x+8y+113=0,\\ 9(x^2-6x+9)-81-4(y^2-2y+1)+4=-113,\\ -9(x-3)^2+4(y-1)^2=36,\\ \tfrac{(y-1)^2}{9}-\tfrac{(x-3)^2}{4}=1.\end{gathered}$$

Estamos en presencia de una hipérbola vertical; con $b=3$, $a=2$ y centro $C(3,1)$. Dado que en la hipérbola se tiene la relación $c^2=a^2+b^2$, se logra $c=\sqrt{13}$. Además $F_1(3,1+\sqrt{13})$, $F_2(3,1-\sqrt{13})$, $V_1(3,4)$ y $V_2(3,-2)$. La longitud del eje transverso viene dada por $2b=6$, para el eje conjugado $2a=4$ y el lado recto $\frac{2a^2}{b}=\frac{8}{3}$. Por último, la excentricidad (dado que $b>a$, pues fijamos a con x y b con y) es $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{13}}{3}$. Note que esto tiene sentido ya que la excentricidad de una elipse verifica $e>1$. Por último; para las ecuaciones de las asíntotas, se tendrá el gran truco

$$\begin{gathered}\tfrac{(y-1)^2}{9}-\tfrac{(x-3)^2}{4}=0,\\ (\tfrac{(y-1)}{9}+\tfrac{(x-3)}{4})(\tfrac{(y-1)}{9}-\tfrac{(x-3)}{4})=0.\end{gathered}$$

Por consiguiente

$$\begin{gathered}\ell_1:\tfrac{(y-1)}{9}+\tfrac{(x-3)}{4}=0\Rightarrow \ell_1:3x+2y-11=0,\\ \ell_2:\tfrac{(y-1)}{9}-\tfrac{(x-3)}{4}=0\Rightarrow \ell_2:3x-2y-7=0.\end{gathered}$$

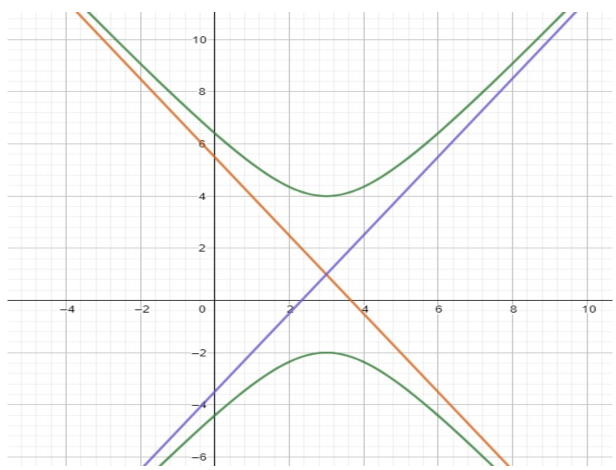

Figura 15: Hipérbola de ecuación $9x^2-4y^2-54x+8y+113=0$.

<u>Observación</u>: En una gran variedad de libros, usted podrá encontrar una expresión analítica para el lado recto como $\frac{2b^2}{a}$. Mismo caso para la excentricidad $e=\frac{c}{a}$ ¿Por qué en este documento se utilizó $\frac{2a^2}{b}$ o $e=\frac{b}{a}$ en el presente ejercicio? Como se menciono en las ayudantías; se fijó a con x y b con y. Esto ocurre en los casos en que la cónica es vertical y libros como *Geometría Analítica* de Charles Lehmann consideran (sea vertical u horizontal el lugar geométrico) que el parámetro a siempre debe ser mayor que b y se le asocia a x (cuando la cónica es horizontal) e y (cuando la cónica es vertical). *En ese sentido, sea cauteloso cuando trabaje con un lugar geométrico cuyo gráfico sea de forma vertical*. Hay expresiones que pueden variar, ya que se fijaron variables. Por ejemplo, si usted toma la expresión para calcular el lado recto de la hipérbola en el presente ejercicio dado por $l_r=\frac{2b^2}{a}$, obtendrá $l_r=9$. Pero no tiene sentido que el lado recto sea mayor que el la longitud del eje transverso. El lado recto es el segmento de recta cuyos extremos son puntos de la cónica perpendicular al eje transverso y que pasa por uno de los focos.

- (Ejercicio 75, a) Derivando implícitamente la expresión $x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$ (la derivada de $y(x)$ con respecto a x), entonces

$$2xb^2 - 2yy'a^2 = 0 \Rightarrow y' = \tfrac{xb^2}{ya^2}\|_{(x_0,y_0)} \Rightarrow y' = m = \tfrac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

  Así

$$\ell_t : y - y_0 = \tfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

  Esta expresión se puede reescribir y expresarse como

$$\ell_t : \tfrac{xx_0}{a^2} - \tfrac{yy_0}{b^2} = 1.$$

  Por último, la recta normal es perpendicular a la recta tangente y pasa por (x_0, y_0). Su ecuación estará dada por

$$\ell_n : y - y_0 = -\tfrac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0).$$

- (Ejercicio 75, b) Buscamos una recta ℓ_t perpendicular a $\ell : 2x - y - 7 = 0$. Por consiguiente, la pendiente de ℓ_t debe ser $-\frac{1}{2}$. Por lo tanto; podemos escribir $\ell_t : x + 2y = b$, con $b \in \mathbb{R}$ a determinar. De lo anterior, $x = b - 2y$. Reemplazando en la ecuación de la elipse, se obtiene $4(b - 2y)^2 + 9y^2 = 36$. Simplificando se llega a $25y^2 - 16by + 4b^2 - 36 = 0$. El discriminante de esta expresión es $\triangle = 3600 - 144b^2$. Dado que buscamos la condición de tangencia, $\triangle = 0$. Así, $b = \pm 5$. Se consiguen dos rectas: $\ell_{t_1} : x + 2y - 5 = 0$ y $\ell_{t_2} : x + 2y + 5 = 0$.
- (Ejercicio 76) Considere la Figura 16, que recrea la situación que propone el problema

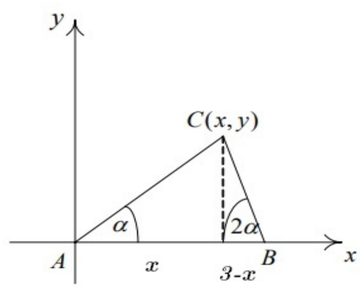

Figura 16: Triángulo y Lugar Geométrico.

  De la Figura 16, se tiene que

$$\tan(\alpha) = \tfrac{y}{x},$$
$$\tan(2\alpha) = \tfrac{y}{3-x}.$$

  Por otro lado, del curso Álgebra y Geometría I es sabido que

$$\tan(2\alpha) = \tfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}.$$

  Reemplazando los valores en función de x e y en la expresión anterior y simplificando, se obtiene

$$\tfrac{y}{3-x} = \tfrac{\frac{2x}{y}}{1-\frac{y^2}{x^2}},$$
$$(x-1)^2 - \tfrac{y^2}{3} = 1.$$

  El lugar geométrico buscado es una hipérbola de ecuación ordinaria $(x-1)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$, cuyo vértice es $(1, 0)$.

- (Ejercicio 77, b) Las ecuaciones de las asíntotas para la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = a^2$ están dadas por $\ell_{A_1} : x + y = 0$ y $\ell_{A_2} : x - y = 0$. Considere un punto arbitrario $P(x_0, y_0)$ de la hipérbola. Este verificará $x_0^2 - y_0^2 = a^2$. Por lo tanto

  $$d_1 = d_1(P, \ell_{A_1}) = \tfrac{|x_0+y_0|}{\sqrt{2}}$$

  $$d_2 = d_2(P, \ell_{A_2}) = \tfrac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}}$$

  Efectuando el producto entre d_1 y d_2, se logra

  $$d_1 d_2 = \tfrac{|x_0+y_0}{\sqrt{2}} \tfrac{|x_0-y_0|}{\sqrt{2}} = \tfrac{\left|x_0^2-y_0^2\right|}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

  Es decir, el producto de las distancias de cualquier punto de la hipérbola a sus asíntotas es constante.

Ayudantía 11: Introducción a las Matrices
Octubre 02, 2019

(79) Considere la matriz

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

y la función de variable real, $f(x) := 3x^3 - 4x^2 + 13$. Determine $f(A)$. Encuentre el par ordenado $U = (x, y)$, tal que satisfaga $AU = U$. Repita el mismo procedimiento para $AU = -2U$.

(80) Sea $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que

$$B := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Se define $\operatorname{tr}(B) := a + d$, que corresponde a la traza de la matriz B. Sabiendo que $\operatorname{tr}(B) = 8$ y $\det(B) = 12$, encuentre los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\det(\lambda I - B) = 0$.

(81) Determine el(los) valor(es) de $\mu \in \mathbb{R}$, tal que la matriz

$$C := \begin{bmatrix} \dfrac{d}{d\mu}\left(\dfrac{2\mu^3 - 3\mu^2}{6}\right) & \displaystyle\int_0^{\mu} (2x - 3)\, dx \\ \ln(e^{\mu+1}) & \displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{-x + \mu + \mu x^3 + \mu^2 x^2 + 2x^3}{\sqrt{\pi} + 2x - 3\mu^8 x^2 + x^3} \end{bmatrix},$$

no es invertible.

(82) Considere

$$D := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $p_D(\lambda) = \det(D - \lambda I)$.

(b) Encuentre el(los) valor(es) de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal(es) que $\det(D - \lambda I) = 0$.

(c) Determine el conjunto $\ker(D - \lambda I)$ usando el(los) valor(es) de λ obtenido(s) en (b).

(d) Encuentre un polinomio $m_D(\lambda)$ mónico, no nulo, que verifique $m_D(\lambda) \mid p_D(\lambda)$ y $m_D(D) = 0$.

(e) Encuentre D^{-1} usando el polinomio $m_D(\lambda)$ obtenido en (d). Pruebe que $D^{-1} \cdot D = I$.

(83) En (a), determine explícitamente las matrices $X, Y \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para (b), use la teoría de matrices para determinar el par ordenado (x, y) que satisface el sistema de ecuaciones correspondiente.

(a) $\left\{ \begin{array}{l} 5X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{bmatrix} \\ 3X + 2Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} \end{array} \right.$ (b) $\left\{ \begin{array}{l} 2x - 5y = 8 \\ -x + 4y = 3 \end{array} \right.$

(84) Sea θ el ángulo formado por el vector $\vec{v} = (x, y)$. La matriz de rotación de $\vec{v}$ es

$$\mathcal{R}_{\vec{v},\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Determine $\mathcal{R}_{(1,3),\frac{\pi}{4}}$ y $\mathcal{R}_{(2,5),\frac{2\pi}{3}}$.

(85) Demuestre que la distancia entre dos puntos del plano cartesiano es invariante mediante transformación de coordenadas.

Soluciones

- (Ejercicio 79) Se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(A) &= 3A^3 - 4A^2 + 13I,\\
f(A) &= 3\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}^3 - 4\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}^2 + 13\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\\
f(A) &= 3\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix} + 13\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\\
f(A) &= \begin{bmatrix}-6 & 9\\ 18 & 15\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & -4\\ -8 & 12\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}13 & 0\\ 0 & 13\end{bmatrix},\\
f(A) &= \begin{bmatrix}-1 & 13\\ 26 & 16\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Debemos encontrar $U = (x, y) = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, tal que $AU = U \Rightarrow (A-I)U = 0$. Equivalente, $\ker(A-I)$. Por consiguiente

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
-x + y &= 0,\\
2x - 2y &= 0,
\end{aligned}
$$

cuyas soluciones verifican $x = y$. Se concluye

$$
U = \begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.
$$

Alternativamente, $U = \{\lambda(1, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Por último; diremos $U = (x, y) = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, tal que $AU = -2U \Rightarrow (A + 2I)U = 0$. Equivalente, $\ker(A + 2I)$. Por consiguiente

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
2x + y &= 0,\\
2x + y &= 0,
\end{aligned}
$$

cuyas soluciones verifican $y = -2x$. Se concluye

$$
U = \begin{pmatrix}x\\ -2x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}.
$$

Alternativamente, $U = \{\lambda(1, -2) : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

- (Ejercicio 80) Calcularemos $\det(\lambda I - B) = 0$. Por consiguiente

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{bmatrix} = 0,$$
$$(\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0,$$
$$\lambda^2 - \lambda(d + a) + ad - bc = 0.$$

Recordando que $\det(B) = ad - bc$ y $\operatorname{tr}(B) = a + d$, se obtiene

$$\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0,$$
$$(\lambda - 6)(\lambda - 2) = 0.$$

Finalmente, se obtiene $\lambda = \{2, 6\}$. Este conjunto corresponde a los *valores propios* asociados a la matriz B.

- (Ejercicio 81) Dado que

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{2\mu^3 - 3\mu^2}{6}\right) = \mu^2 - \mu,$$
$$\ln(e^{\mu+1}) = \mu + 1,$$
$$\int_0^{\mu} (2x - 3) = \mu^2 - 3\mu,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{-x + \mu + \mu x^3 + \mu^2 x^2 + 2x^3}{\sqrt{\pi} + 2x - 3\mu^8 x^2 + x^3} = \mu + 2,$$

podemos reescribir C como

$$C = \begin{bmatrix} \mu^2 - \mu & \mu^2 - 3\mu \\ \mu + 1 & \mu + 2 \end{bmatrix}.$$

Debemos encontrar $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $\det(C) = 0$. Así

$$\det\begin{bmatrix} \mu^2 - \mu & \mu^2 - 3\mu \\ \mu + 1 & \mu + 2 \end{bmatrix} = 0,$$
$$\mu(\mu + 1) = 0.$$

Se obtiene $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = -1$; valores buscados para que la matriz C sea no invertible.

Ayudantía 12: Rotación y Traslación de Cónicas

Octubre 07, 2019

(86) Considere la ecuación del lugar geométrico $x^2 + y^2 + \mu xy = 1$. Dado el valor de $\mu \in \mathbb{R}$, ¿a qué cónica corresponde?

(87) Determine la ecuación de la elipse $2x^2 - 8x + 3y^2 + 6y - 7 = 0$ cuando su centro se traslada al origen. Exhiba sus gráficas y compare. ¿Que sucede con las longitudes del los lados mayor, menor y recto al efectuar la traslación?

(88) Por medio de una traslación de ejes apropiada (que debe determinar), reescriba la ecuación $3x^2 + 6x - 4y^2 + 24y - 135 = 0$ para que su centro este en el origen. ¿A qué cónica corresponderá? Bosqueje sus gráficas y compare.

(89) Considere la elipse e hipérbola dadas por las ecuaciones $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$ y $x^2 - 2y^2 - 4 = 0$. Determine las nuevas ecuaciones de la cónicas tras haber sido rotadas en un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$ respectivamente.

(90) Considere la parábola $y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$. Realice una traslación apropiada para expresarla de la forma $y'^2 = kx'$ con $k \in \mathbb{R}$. Determine sus elementos característicos (centro, vértice, ecuaciones de la directriz y del eje) y su gráfica correspondiente en el plano $x'y'$.

(91) Considere la ecuación del lugar geométrico $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$. ¿A qué cónica corresponde según su discriminante? Determine el ángulo θ para eliminar el término xy de la expresión anterior.

(92) Mediante una traslación y rotación apropiada, reduzca la ecuación del lugar geométrico $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$. Determine sus elementos característicos en el sistema original (centro, vértices, focos, excentricidad) y su gráfica correspondiente en el plano xy.

(93) Considere la ecuación del lugar geométrico $x^2 + \sqrt{3}xy = 1$. ¿A qué cónica corresponde según su discriminante? Determine sus elementos característicos en el sistema original (centro, vértices, focos, excentricidad, ecuaciones de las asíntotas) y su gráfica correspondiente en el plano xy.

Soluciones

- (Ejercicio 86) Recuerde que la ecuación general de segundo grado está dada por la expresión
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
cuyo discriminante es $\triangle := B^2-4AC$. Reordenando la expresión del enunciado, se tiene $x^2+\mu xy+y^2-1=0$. Por consiguiente; $A=1$, $B=\mu$, $C=1$, $D=E=0$ y $F=-1$. Así
$$\triangle = B^2-4AC=\mu^2-4.$$
En caso de que $\triangle=0$, la ecuación de la cónica es una parábola. De esta forma $\triangle=0 \Rightarrow \mu^2-4=0 \Rightarrow (\mu-2)(\mu+2)=0$. Se consigue como solución al conjunto $\{-2,2\}$.

  Si $\triangle>0$ entonces la ecuación de la cónica es una hipérbola. Por lo tanto, tenemos la inecuación $\mu^2-4>0$. De Cálculo I, sabemos que el intervalo solución para μ vendrá dado por $]-\infty,-2[\,\cup\,]2,\infty[$.

  Si $\triangle<0$, entonces la ecuación de la cónica es una elipse. Por consiguiente, se tiene la desigualdad $\mu^2-4<0$; cuya solución está dada por $]-2,2[$. En caso de que $\mu=0$, se consigue la circunferencia unitaria.

- (Ejercicio 87) Completando cuadrados, se obtiene
$$\begin{gathered}2x^2-8x+3y^2+6y-7=0.\\ 2(x^2-4x+4)-8+3(y^2+2y+1)-3=7,\\ 2(x-2)^2+3(y+1)^2=18,\\ \tfrac{(x-2)^2}{9}+\tfrac{(y+1)^2}{6}=1.\end{gathered}$$
Por lo tanto, el centro de la elipse corresponde a $C(2,-1)$. Además; $a=3$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}$. De esta manera (en relación a longitudes); lado mayor $2a=6$, lado menor $2b=2\sqrt{6}$ y lado recto $\frac{2b^2}{a}=4$. Dado que queremos trasladar el centro al origen, se debe considerar las ecuaciones de traslación
$$\begin{gathered}x=x'+2\Rightarrow x'=x-2,\\ y=y'-1\Rightarrow y'=y+1.\end{gathered}$$
Por consiguiente, se logra la ecuación de la elipse $2x'^2+3y'^2=18$. Así $C'(0,0)$. Dado que las distancias son invariantes bajo transformación de coordenadas, las longitudes del lado mayor, menor y recto son las mismas para las ecuaciones $2x^2-8x+3y^2+6y-7=0$ y $2x'^2+3y'^2=18$. Es decir, $a'=3$, $b'=\sqrt{6}$, $c'=\sqrt{3}$. Por lo tanto (en relación a longitudes); lado mayor $2a'=6$, lado menor $2b'=2\sqrt{6}$ y lado recto $\frac{2b'^2}{a'}=4$. La gráfica correspondiente al problema está dada por la Figura 17.

- (Ejercicio 88) Digamos
$$\begin{gathered}x=x'+h,\\ y=y'+k.\end{gathered}$$
Con $h,k\in\mathbb{R}$ (por determinar). Reemplazando en la ecuación del lugar geométrico, se consigue
$$\begin{gathered}3(x'+h)^2+6(x'+h)-4(y'+k)^2+24(y+k')=135,\\ 3x\text{'}^2-4y'^2+(6h+6)x'-(8k-24)y+3h^2-4k^2+6h+24k=135.\end{gathered}$$
Digamos $6h+6=0\Rightarrow h=-1$. Además, $8k-24=0\Rightarrow k=3$. Por lo tanto, la expresión anterior se puede reescribir como
$$3x'^2-4y'^2=102.$$
Evidentemente, corresponde a una hipérbola. La gráfica correspondiente al problema está dada por la Figura 18.

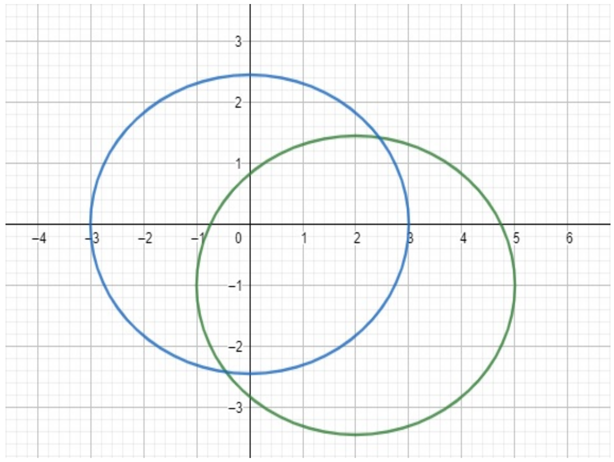

Figura 17: Elipses.

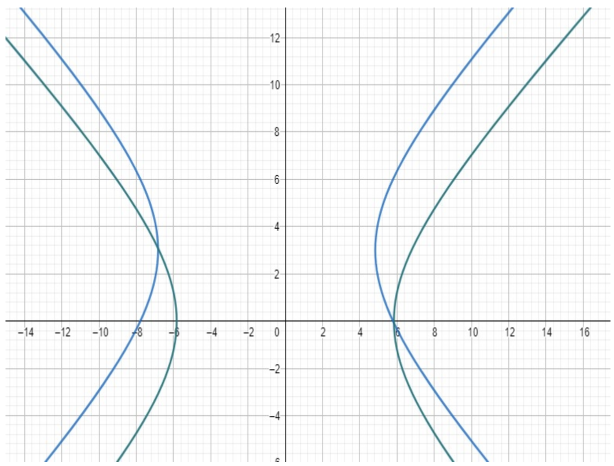

Figura 18: Hipérbolas.

- (Ejercicio 89) Considere la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Evaluando en $\theta = \frac{\pi}{3}$, se consigue en la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{3}) & -\sin(\frac{\pi}{3}) \\ \sin(\frac{\pi}{3}) & \cos(\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
$$x = \tfrac{x'}{2} - \tfrac{\sqrt{3}y'}{2},$$
$$y = \tfrac{\sqrt{3}x'}{2} + \tfrac{y'}{2}.$$

Reemplazando en la ecuación de la elipse y simplificando, se consigue

$$\tfrac{5x'^2}{4} + \tfrac{\sqrt{3}x'y'}{2} + \tfrac{9y'^2}{4} = 4,$$
$$5x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 9y'^2 - 16 = 0.$$

Evaluando en $\theta = \frac{\pi}{4}$, se consigue en la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$
$$x = \tfrac{x'-y'}{\sqrt{2}},$$
$$y = \tfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Reemplazando en la ecuación de la hipérbola y simplificando, se consigue

$$x'^2 + 6x'y' + y'^2 - 8 = 0.$$

Por último, los gráficos correspondientes para la elipse e hipérbola están dados por las Figuras 19 y 20.

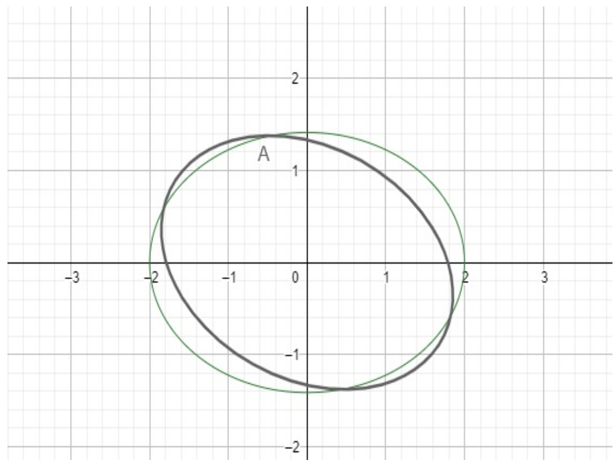

Figura 19: Rotación de Elipses.

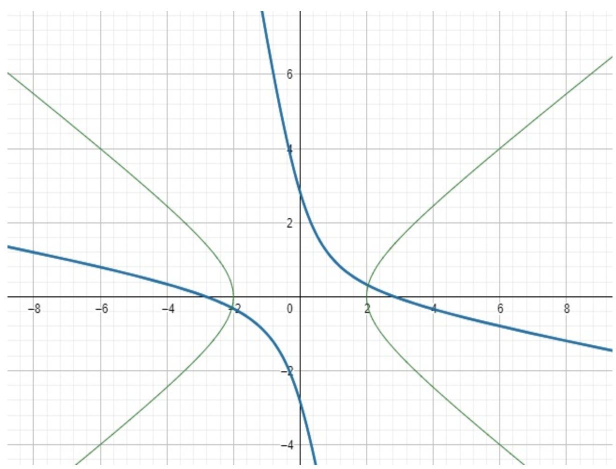

Figura 20: Rotación de Hipérbolas.

- (Ejercicio 91) Dada la ecuación general de segundo grado exhibida en la solución del Ejercicio 86; se tiene que $A = 7$, $B = 6\sqrt{3}$, $C = 13$, $E = D = 0$ y $F = -16$. Por lo tanto (dado el discriminante), se logra $\triangle = (6\sqrt{3})^2 - 4(7)(13) = 108 - 364 = -256$. Por consiguiente, la cónica es una elipse. Se sabe que el ángulo de rotación (para eliminar el termino xy) está dado por

$$\tan(2\theta) = \tfrac{B}{A-C},$$

en el caso de que $A \neq C$. Si $A = C$, entonces $\theta = \frac{\pi}{4}$. Por consiguiente, dado nuestro problema

$$\theta = \frac{\arctan\left(\frac{-6\sqrt{3}}{7-13}\right)}{2} = \frac{\arctan(\sqrt{3})}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

Por lo tanto, el ángulo buscado corresponde a $\theta = \frac{\pi}{6}$.

- (Ejercicio 93) Calcularemos el ángulo θ de rotación para eliminar el termino xy. De la ecuación del lugar geométrico, se tiene que $A = 1$, $B = \sqrt{3}$, $C = D = E = 0$ y $F = -1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \tan(2\theta) &= \tfrac{B}{A-C}, \\ \theta &= \tfrac{\arctan(\sqrt{3})}{2}, \\ \theta &= \tfrac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Esto nos permite obtener la matriz de rotación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & -\sin(\frac{\pi}{6}) \\ \sin(\frac{\pi}{6}) & \cos(\frac{\pi}{6}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

$$x = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}, \tag{3}$$

$$y = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}. \tag{4}$$

Reemplazando en la ecuación de la cónica y simplificando, se logra $6x'^2 - 2y'^2 = 4$. Dividiendo por 4

$$\frac{x'^2}{\frac{2}{3}} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Se consigue $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{\frac{8}{3}}$. Además, el centro viene dado por $C'(0, 0)$. Los vértices son $V_1'(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$ y $V_2'(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)$. Los focos corresponden a $F_1'(-\sqrt{\frac{8}{3}}, 0)$ y $F_2'(\sqrt{\frac{8}{3}}, 0)$. La excentricidad (que es invariante bajo transformación de coordenadas) viene dada por $e = \frac{c}{a} = 2$. Finalmente, las ecuaciones de las asíntotas corresponden a $\ell_1' : \sqrt{6}x' - \sqrt{2}y' = 0$ y $\ell_1' : \sqrt{6}x' + \sqrt{2}y' = 0$.

Para obtener los elementos característicos de una hipérbola en el sistema xy (original), se debe considerar la matriz de rotación. Es decir, reemplazar el/los vectores (vértices, focos, centro) en (3) y (4). De esta manera, se consigue el centro $C(0, 0)$. Los vértices corresponden a $V_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}})$ y $V_2(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}})$. Los focos corresponden a $F_1(-\frac{\sqrt{8}}{2}, -\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{3}})$ y $F_2(\frac{\sqrt{8}}{2}, \frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{3}})$.

Por último, las ecuaciones de las asíntotas son $\ell_1 : x = 0$ y $\ell_2 : x = -\sqrt{3}y$. Estas se obtienen a partir de (3) y (4). La gráfica buscada está dada por la Figura 21.

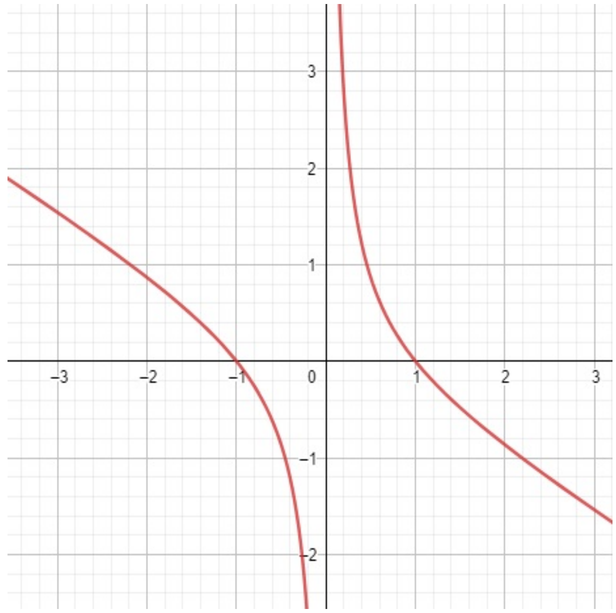

Figura 21: Hipérbola

Preliminar: Sean $u, v \in \mathbb{R}^2$ tales que $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Se define el producto interno euclidiano entre u y v (denotándose $u \cdot v$) como $\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1v_1 + u_2v_2$. En virtud del producto interno euclidiano, podemos definir la norma del vector $\vec{u}$ (que corresponde a la distancia de u al origen). Se denota $\|\vec{u}\|$ y se define como $\|\vec{u}\| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$.

Sea θ, el ángulo formado por las rectas que unen el origen con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ (respectivamente). Entonces

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

(94) Verdadero o Falso: Sean $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En caso de que una proposición sea verdadera, demuestrela. En caso contrario, señale por que es falsa (pues hay expresiones que carecen de sentido).

(I) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = u \cdot (\vec{v} \cdot w)$.

(II) $\alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\alpha w)$.

(III) $(u + v) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$.

(IV) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

(V) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v}$.

(VI) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$.

(VII) $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u}} = \vec{v}$.

(VIII) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} = 0$ o $\vec{v} = 0$.

(IX) $\alpha\vec{v} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ o $\vec{v} = 0$.

(X) $\alpha(u \cdot v) = (\alpha u) \cdot (\alpha v)$.

(95) (a) Sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$. La interpretación geométrica del producto interno euclidiano corresponde a la proyección de un vector sobre otro. Se define la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ como el vector $\vec{z}$, tal que

$$\vec{z} := \text{Proy}_{\vec{w}}\vec{v} = \tfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\vec{w}.$$

Calcule $\text{Proy}_{(3,1)}(1, 2)$ y $\text{Proy}_{(-1,2)}(3, 1)$.

(b) Determine el ángulo de intersección θ entre los pares de vectores $(2, 2)$, $(0, 3)$ y $(3, 1)$, $(-1, -2)$ respectivamente.

(96) Sean $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Demuestre que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{u}\|.$$

Esta expresión corresponde a la desigualdad triangular (también conocida como desigualdad de Minkowski).

(97) Considere las matrices A, B y C (con coeficientes reales), tales que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 + \sqrt{2} \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine (cuando tengan sentido)

(a) $(AB)^2 - C^2$

(b) $3A + \sqrt{\pi}B^t$

(c) $A^2 + B^2$

(d) $ABC + C^2$

(e) $(A + 8I_{2\times 3})^t$

(f) $A^5 B^{-2}$

Comentario: Note que B^t y B^{-1} corresponden a la matriz traspuesta e inversa de B (respectivamente).

(98) Considere la función $f : \mathbb{C} \to S \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$f(z) := \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

con $z = a + bi$. Pruebe que para todo $z, w \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica $f(z+w) = f(z) + f(w)$, $f(\lambda z) = \lambda f(z)$ y $f(zw) = f(z)f(w)$. ¿Es f una aplicación inyectiva? ¿Es f epiyectiva? Justifique

(99) Considere

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $p_D(\lambda) = \det(\lambda I - D)$.

(b) Encuentre el(los) valor(es) de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal(es) que $\det(\lambda I - D) = 0$.

(c) Determine el conjunto $\ker(D - \lambda I)$ usando el(los) valor(es) de λ obtenido(s) en (b).

(d) Encuentre un polinomio $m_D(\lambda)$ mónico, no nulo, que verifique $m_D(\lambda) \mid p_D(\lambda)$ y $m_D(D) = 0$.

(e) Encuentre D^{-1} usando el polinomio $m_D(\lambda)$ obtenido en (d). Pruebe que $D \cdot D^{-1} = D^{-1} \cdot D = I$.

(100) Determine explícitamente las matrices X e Y (con coeficientes reales), tales que

(a) $$\begin{cases} -3X + 2Y = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \\ 5X + 7Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2X - 5Y = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ -X + 4Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

(101) Sea $E \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, tal que

$$E := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

¿Bajo que condiciones existe la matriz inversa E^{-1}? En caso de que E^{-1} exista, pruebe que

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

¿Tal E es única? Use este resultado para determinar la matriz inversa de $F = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$.

(102) Considere la matriz $G \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$. Determine el conjunto $\det(G - \lambda I) = 0$ y $\ker(G - \lambda I)$.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Soluciones

- (Ejercicio 99) Se tiene

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - D) &= \det\begin{bmatrix}\lambda & -1\\ -2 & \lambda+1\end{bmatrix},\\ &= \lambda(\lambda+1)-2,\\ &= \lambda^2+\lambda-2,\\ &= (\lambda-1)(\lambda+2).\end{aligned}$$

$p_D(\lambda)$ es denominado *polinomio característico* de la matriz D. De (a) sabemos que $p_D(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2)$. Por consiguiente, si $p_D(\lambda)=0$ entonces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$. El(los) valor(es) de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal(es) que $\det(D-\lambda I) = 0$ es(son) denominado(s) *valor(es) propio(s)* o *espectro* (por temas de notación, se utilizará sp) de la matriz D. De esta forma $\mathrm{sp}(D) = \{-2, 1\}$. Para $\lambda_1 = 1$, se tiene el conjunto $\ker(A-I)$. Entonces

$$\ker(A-I) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\right\}$$

Se obtiene

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}-x+y&=0\\ 2x-2y&=0.\end{aligned}$$

En ambos casos, $x=y$. Por lo tanto

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\ker(A-I) = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} : \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Para $\lambda_2 = -2$, se consigue el conjunto $\ker(A+2I)$. Entonces

$$\ker(A+2I) = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0\right\}$$

Obteniéndose

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}2x+y&=0\\ 2x+y&=0.\end{aligned}$$

En ambos casos, $y=-2x$. De esta manera

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-2x\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

Así

$$\ker(A+2I) = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} : \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Los pares $(1,1)$ y $(1,-2)$ obtenidos anteriormente se denominan *vectores propios* asociados a los valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ respectivamente. Buscamos un polinomio $m_D(\lambda)$ que divida a $p_D(\lambda)$ obtenido en (a). Para esto, estudiaremos los posibles divisores de $p_D(\lambda)$ y analizaremos cual de ellos cumple la condición de que $m_D(D) = 0$. Tenemos $1, (\lambda-1), (\lambda+2)$ y $(\lambda-1)(\lambda+2)$ como posibles candidatos. Sin embargo

$$\begin{gathered} I \neq 0_{2\times 2}, \\ A - I \neq 0_{2\times 2}, \\ A + 2I \neq 0_{2\times 2}, \end{gathered}$$

donde

$$0_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, $(A-I)(A+2I) = 0_2$. Lo cual es cierto, pues

$$(A-I)(A+2I) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De esta forma, $m_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+2) = \lambda^2+\lambda-2$. $m_A(\lambda)$ se conoce como *polinomio minimal* de la matriz D y cobrará vital importancia cuando curse Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales e intente estudiar matrices que no son diagonalizables. De (d) concluimos que $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2$ verifica $m_A(\lambda) \mid p_A(\lambda)$ y $m_A(A) = 0$. La última condición será muy importante, pues al evaluar la matriz en el polinomio m_A, se consigue

$$(A-I)(A+2I) = 0_2.$$

Note que A es una matriz invertible pues $\det(A) = -2 \neq 0$. Así

$$\begin{gathered} A^2 + A - 2I = 0_2, \\ A^2 + A = 2I, \\ A\frac{(A+I)}{2} = I. \end{gathered}$$

Por lo tanto $A^{-1} = \dfrac{(A+I)}{2}$. Realizando los cálculos explícitamente, se consigue

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Adicionalmente

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{gathered}$$

Por consiguiente, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Inconscientemente, en esta pregunta recurrió a uno de los teoremas más importantes del Álgebra Lineal: *Cayley-Hamilton*.

Ayudantía 14: Preparación Control 3

Octubre 14, 2019

(103) Determine los elementos característicos (vértices, focos, ecuaciones de las asíntotas, longitud del eje transversal, longitud del lado conjugado, longitud de lado recto, excentricidad) y gráfica correspondiente para la hipérbola de ecuación general:

$$9x^2 - 16y^2 - 108x + 128y + 212 = 0.$$

(104) Demuestre que la elipse $2x^2 + y^2 = 10$ y la hipérbola $4y^2 - x^2 = 4$ son perpendiculares en los puntos de contacto.

(105) Por un punto P ubicado sobre la hipérbola de ecuación $x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2$, se traza una recta horizontal que corta a las asíntotas de la hipérbola en los puntos A y B. Demuestre que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = a^2$.

(106) Determine toda la información de la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - x - y = 0$, exhibiendo su gráfica correspondiente.

(107) Considere la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$\vec{v} \longmapsto A\vec{v} + \vec{w},$$

donde $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. A es una matriz invertible de 2×2 y $\vec{w}$ es un vector fijo.

Demuestre que f envía una elipse en una elipse, una hipérbola en una hipérbola y una parábola en una parábola.

(108) Determine todas las matrices $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $XM = MX$. Considere

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(109) Verdadero o Falso. En caso de que una proposición sea verdadera, demuestrela. En caso contrario, proporcione un contrajemplo. Un *grupo abeliano* es una estructura algebraica $(G, +)$; donde G es un conjunto no vacío y $+$ es una operación binaria que verifica las propiedades de cerradura, asociatividad, existencia y unicidad de elemento neutro e inverso y conmutatividad.

(a) $(\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}), +)$ es un grupo abeliano.

(b) $(\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \cdot)$ es un grupo abeliano.

(c) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

(110) Una empresa se dedica a la preparación masiva de cócteles. En esta oportunidad; se les solicitó preparar *margaritas*, para un evento a realizarse la tarde de este viernes. La empresa dispone de tres bidones: B_1, B_2 y B_3. El primer bidón contiene 20 litros de tequila, 30 litros de licor de naranja y 50 litros de jugo de limón. Por otro lado; B_2 trae consigo 30 litros de tequila, 20 litros de licor de naranja y 60 litros de jugo de limón. Finalmente, el tercer bidón dispone de 25 litros de limonada y 30 litros de tequila y licor de naranja. Los precios de medio litro de tequila, licor de naranja y limonada corresponden a 6, 3 y 2 (miles de peso) respectivamente. Determine los precios por litro de cada bidón

(111) Tres familias: A, B y C; deciden irse de vacaciones. Sin embargo, han olvidado reservar su hospedaje; por lo que solo cuentan con tres hoteles: H_1, H_2 y H_3 para alojarse. En A se requiere de dos habitaciones dobles y una simple. Por otro lado, en B se necesitan tres habitaciones dobles y una simple. Finalmente, en C se precisa de una habitación doble y dos simple. En el hotel H_1, los precios de las habitaciones doble y simple (por día) es de 84 *usd* y 45 *usd* respectivamente. En H_2, se tiene 86 *usd* (habitación doble) y 43 *usd* (habitación simple) al día. Por último; en H_3, se tiene 85 *usd* (habitación doble) y 44 *usd* (habitación simple) al día.

(a) Exprese de manera matricial, el número de habitaciones dobles y simples que necesitan las familias. Repita el mismo procedimiento para el precio por el tipo de habitación en cada uno de los tres hoteles.

(b) Obtenga una matriz que refleje el gasto diario que tendrán las familias en cada uno de los hoteles. ¿En cual les conviene hospedarse?

(112) Considere la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{1000\times 1000}(\mathbb{R})$. Determine A y calcule $\mathrm{tr}(A)$. Se sabe que

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

(113) Considere las matrices $B, C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Demuestre que $(2B^{65} - C)^7 = I_3$.

(b) Calcule $20B^{1117} - 5B^{1532}$.

(114) Considere $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine una formula para D^n y demuéstrala recurriendo al principio de inducción. Calcule $15D^{19}$.

(115) Se dice que una matriz $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es *nilpotente*, si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $E^k = 0_n$. Por otro lado, se define el orden de nilpotencia como el menor número natural m que verifica $E^m = 0_n$ y $E^{m-1} \neq 0_n$. Determine el orden de nilpotencia de la matriz

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

Determine todos los elementos del conjunto $X = \left\{ M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M^2 = 0_2 \right\}$.

(116) Una matriz $F \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es *simétrica* si $F^t = F$, donde F^t corresponde a la matriz transpuesta de F. En caso de que $F^t = -F$, se dice que A es *antisimétrica*. La matriz transpuesta goza de las propiedades: $(FG)^t = G^t F^t$, $(F^t)^t = F$ y $(F+G)^t = F^t + G^t$ (con $G \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$)

(a) Pruebe que si F es una matriz simétrica, entonces F^2 también resulta ser una matriz simetrica.

(b) Demuestre que toda matriz $G \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ se puede descomponer como la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

(117) Determine la forma escalonada de la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(118) Considere las matrices A y B (con coeficientes reales), tales que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ -3 & 6 & 10 & 8 \\ -2 & 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

Determine $\operatorname{ran}(A)$ y $\operatorname{ran}(B)$.

(119) Determine el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible determinado. En caso de que exista tal α, encuentre la solución correspondiente.

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 7 \\ -x + y + z = 3 \\ 2x + \alpha y - 4z = \alpha \end{cases}$$

(120) Encuentre el valor de $\beta \in \mathbb{R}$ para que el siguiente sistema de ecuaciones posea

(a) Solución única.

(b) Infinitas soluciones.

(c) Ninguna solución.

$$\begin{cases} x + \beta y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \beta z = 3 \end{cases}$$

(121) (Popurrí de Matrices, Parte 1) Verdadero o Falso: En caso de que una proposición sea verdadera, demuestrela. En caso contrario, proporcione un contraejemplo.

(a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces $(\operatorname{ran}(A))^2 = \operatorname{ran}(A^2)$.

(b) Considere $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $AB = AC$ tal que $\operatorname{ran}(A) = n$. Entonces $B = C$.

(c) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces $\operatorname{ran}(A + B) = \operatorname{ran}(A) + \operatorname{ran}(B)$.

(d) Considere $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\operatorname{ran}(A) = \operatorname{ran}(B) = n$. Entonces $\operatorname{ran}(A - B) < n$.

(122) Utilizando el método de *Gauss - Jordan*, encuentre la solución respectiva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3t = -1 \\ -x - 2y - 3z - 4t = 0 \\ 2x + 3y + 5z + 7t = 1 \\ 2x + 2y + 4z + 6t = 2 \end{cases}$$

(123) Utilizando el método de *Gauss - Jordan*, encuentre la solución respectiva al sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ x - 3y - 5z = -6 \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases}$$

(124) Determine todos los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$; tales que

$$\begin{cases} \tan(x) - \sin(y) + \cos(z) = 2 \\ \tan(x) - 2\sin(y) = 2 \\ \sin(y) - \cos(z) = -1 \end{cases}$$

(125) Javier, Juan y Ricardo deciden jugar tres partidas de dados, de manera que cuando uno de ellos pierda; debe entregar a los otros dos jugadores una cantidad de dinero igual a la que posean en ese momento. Si cada uno de ellos perdió una partida y al final del juego todos obtuvieron 24 *usd*. ¿Cuánto tenía cada jugador antes de comenzar a jugar?

(126) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine la solución del sistema de ecuaciones

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{pmatrix}$$

(127) Determine la matriz inversa de $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, usando el método de *Gauss - Jordan*. Se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(128) ¿Es invertible la matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$? En caso afirmativo, determine B^{-1} usando el método de *Gauss - Jordan*.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

¿Nota algún patrón en B? La matriz B tiene un nombre en particular...

(129) Pruebe que si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son matrices invertibles, entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demuestre que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

(130) Sean $A, B, I \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, donde $I + AB$ es invertible. Pruebe que si $I + BA$ es invertible, entonces

$$(I + BA)^{-1} = I - B(I + AB)^{-1}A.$$

Observación: I corresponde a la matriz identidad de orden $n \times n$.

(131) (Popurrí de Matrices, Parte 2) Cada ejercicio dentro del popurrí es individual entre sí, a menos de que se especifique lo contrario. I corresponde a la matriz identidad de orden $n \times n$.

(a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, matriz invertible que satisface la relación: $A^3 + 3A^2 + A = 0$. Pruebe que $A^{-1} = -A - 3I$.

(b) Considere $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$; tales que $A^2 = A$ y $B = I - A$. Demuestre que $B^3 = B$.

(c) Considere $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se sabe que A, B y $A + B$ son matrices invertibles. Demuestre que $A^{-1} + B^{-1}$ es invertible.

Ayudantía 19: Introducción a la Teoría de Determinantes

2020

(132) Sean $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$. Calcule $\det(A)$ y $\det(B)$, empleando el método de *Gauss - Jordan.*

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

(133) (Popurrí de Matrices, Parte 3) Verdadero o Falso: En caso de que una proposición sea verdadera, demuestrela. En caso contrario, proporcione un contraejemplo.

(a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A es una matriz invertible, entonces $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

(b) Sea $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se dice que A es ortogonal, si verifica $AA^t = I$. Si A es ortogonal, entonces $\det(A) = \{\pm 1\}$.

(c) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si A es una matriz antisimetrica y n es impar, entonces $\det(A) = 0$.

(134) Considere $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Se sabe que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3.$$

Calcule

$$\begin{vmatrix} a+b & 5(b+c) & c \\ d+e & 5(e+f) & f \\ g+h & 5(h+i) & i \end{vmatrix}.$$

(135) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se sabe que n es impar y $AB = -BA$. Pruebe que A o B es una matriz no invertible.

(136) (Popurrí de Matrices, Parte 4) Verdadero o Falso: En caso de que una proposición sea verdadera, demuestrela. En caso contrario, proporcione un contraejemplo.

(a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tales que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Si $C = A^{-1}B^tA^2$, entonces $\det(C) = -12$.

(b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

(c) Considere $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

(137) Considere $A \in \mathcal{M}_{n+1\times n+1}(\mathbb{R})$ y $n \geq 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots 1 & -\alpha_n \end{bmatrix}$$

Pruebe que

$$\det(\lambda I - A) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + ... + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_n\lambda^n + \lambda^{n+1}.$$

Esta última expresión corresponde al polinomio característico de la matriz compañera.

(138) Sea $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dada por

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Conjeture una expresión para $\det(B)$.

(139) Sean $A, B, C, 0 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define

$$D := \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{R}).$$

Pruebe que

$$\det(D) = \det(A)\ \det(C).$$

(140) (Popurrí de Matrices, Parte 5) Cada ejercicio dentro del popurrí es individual entre sí, a menos de que se especifique lo contrario.

(a) Se dice que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son semejantes; si existen matrices invertibles $P, P^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tales que $A = PBP^{-1}$. Pruebe que dos matrices semejantes poseen el mismo determinante.

(b) Se dice que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ son congruentes; si existen matrices $P, P^t \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tales que $A = PBP^t$. Pruebe que $\det(A)\ \det(B) \geq 0$.

(c) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se define el polinomio característico asociado a la matriz A mediante la expresión

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A).$$

Pruebe que si A y B son semejantes, entonces tienen el mismo polinomio característico.

(141) (Cifrado de Hill) Suponga que usted esta en plena guerra y quiere cifrar a sus compas, la palabra *algebraii*. Para esto, creará una clave dada por una matriz invertible A, que verifica $(\det(A), 26)=1$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

La estructura del cifrado de Hill es simple. Descompondremos *algebraii* como *alg*, *ebr*, *aii* (siempre en bloques de tres letras). Posteriormente; se hará la conversión palabras - números, al igual que en el cifrado afín (visto en Álgebra y Geometría I). Esto, pues el alfabeto latino se puede visualizar como $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$. Es decir; $a \to 0$, $b \to 1$,..., $z \to 25$. La técnica de cifrado está dada por

$$C = AO.$$

C corresponde al texto encriptado (matriz de orden 3×1), mientras que O corresponde al mensaje original (matriz de orden 3×1). ¡No olvide que esta trabajando sobre $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$!

(a) Usando el cifrado de Hill y la matriz A, encripte la palabra *algebraii*.

(b) Suponga que usted intercepta un código enemigo *LRSTRDLZYEBNVOTITN*, el cual fue cifrado con la matriz B. ¿Cómo puede descifrarlo? ¿Qué mensaje contiene?

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(142) Sean $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$. Calcule A^{-1} y B^{-1} (matrices inversas de A y B respectivamente), empleando la formula de *Leibniz*.

(a) $A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(143) Determine los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$, para que la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ no sea invertible.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & 1 \\ \lambda - 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine A^{-1} (matriz inversa de A) para $\lambda = 2$. Use la formula de *Leibniz*.

(144) Considere $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que $I_n + A$ es invertible. Demuestre que si A una matriz nilpotente de orden dos, entonces

$$(I_n + A)^{-1} = I_n - A.$$

Observación: I_n corresponde a la matriz identidad de orden $n \times n$.

(145) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible, entonces

$$\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}.$$

(146) (Popurrí de Matrices, Parte 6) Cada ejercicio dentro del popurrí es individual entre sí, a menos de que se especifique lo contrario.

(a) Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal que verifica $\det(A) \neq 0$, entonces $A^{-1} = A^t$.

(b) Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, tal que A es invertible y se verifica la relación

$$(C^t B + A)^t = (A + B)^t (I_n + C).$$

Pruebe que $C = -(BA^{-1})^t$. I_n corresponde a la matriz identidad de orden $n \times n$.

(c) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, matriz simétrica e invertible. Demuestre que

$$\operatorname{adj}(A) = (\operatorname{adj}(A))^t.$$

(147) Sea $n \geq 1$ y $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ distintos entre sí. Demuestre que la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] &\to \mathbb{R}_n[x] \\ (p,q) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} p(a_i)q(a_i) \end{aligned}$$

es un producto interno.

(148) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Encuentre el ángulo entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2

$$\ell_1 = \begin{cases} x = (2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})\lambda \\ y = 1 - \sqrt{2}\lambda \\ z = (2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})\lambda \end{cases} \qquad \ell_2 = \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ 2y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

(149) Considere $v \in \mathbb{R}^n$. Se define la norma del vector v mediante la expresión

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle},$$

donde $\langle u, v\rangle$ denota el producto interno entre los vectores $v, u \in \mathbb{R}^n$. La desigualdad de *Cauchy - Schwarz* establece que

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Use el producto interno euclidiano; para probar que dados $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ con $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$, entonces

$$n^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

(150) Sea $\ell \in \mathbb{R}^3$, definido por

$$\ell := \begin{cases} 2x - y + 2z + 3 = 0 \\ x + y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$$

Determine la forma parametrica de ℓ.

(151) (Popurrí de Producto Vectorial, Parte 1) Cada ejercicio dentro del popurrí es individual entre sí, a menos de que se especifique lo contrario.

(a) Sean $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, tales que $A = (0, 2, 2)$, $B = (2, 0, 1)$ y $C = (3, 4, 0)$. Use el producto vectorial para determinar el área del triángulo ABC.

(b) Sean $u = (5, -1, 2)$ y $v = (-1, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$. Encuentre un vector perpendicular y unitario a u y v.

(152) (Producto Mixto) Sean $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$. Se define el producto mixto mediante la expresión

$$[u, v, w] := \langle u \times v, w \rangle.$$

De la definición, se sigue que

$$[u, v, w] = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Se dice que $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ son coplanares si y solo si $[u, v, w] = 0$. Use este resultado para determinar el(los) valor(es) de $n \in \mathbb{R}$, para que $u = (2, -3, 1)$, $v = (1, n, 3)$ y $w = (4, 5, -1)$ sean coplanares.

(b) Determine el volumen del paralelepípedo formado por $u = (3, -1, 1)$, $v = (1, 7, 2)$ y $w = (2, 1, -4)$.

(153) Considere $U := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R}\right\}$; dotado de las operaciones $\oplus$ y $\cdot$, tales que

$$(x,y) \oplus (z,w) = (x+z, y\cdot w),$$
$$\lambda \cdot (x,y) = (\lambda \cdot x, y),$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es $(U, \oplus, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial? *Las operaciones del lado derecho corresponden a la suma y producto usual en $\mathbb{R}$.*

(154) Considere el espacio vectorial $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Se definen

$$S := \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) = f(\pi - x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\},$$
$$T := \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) = -f(\pi - x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Pruebe que S y T son $\mathbb{R}$ - subespacios vectoriales de $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Determine $S \cap T$.

(155) (Popurrí de Espacios Vectoriales, Parte 1) Cada ejercicio dentro del popurrí es individual entre sí, a menos de que se especifique lo contrario.

(a) Pruebe que $S := \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ es simétrica}\}$ es un $\mathbb{R}$ - subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(b) ¿Es $T := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x \vee z = y\right\}$ un $\mathbb{R}$ - subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

(c) ¿Es $U := \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] : p'(0) + p''(0) = 0\}$ un $\mathbb{R}$ - subespacio vectorial de $\mathbb{R}_n[x]$?

(d) Pruebe que $V := \{B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(B) \neq 0\}$ no es un $\mathbb{R}$ - subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(e) Considere U, W, T; F - subespacios vectoriales de V. ¿Es cierto que si $U + W = U + T$, entonces $W = T$?

(f) Considere U, W, T; F - subespacios vectoriales de V. ¿Es cierto que $(U \cap W) + T = (U + T) \cap (W + T)$?

(156) Sea V un espacio vectorial definido sobre un cuerpo F y U, W; F - subespacios vectoriales de V. Se define

$$U + W := \{v \in V : v = u + w;\ \text{para algún } u \in U, w \in W\}.$$

Pruebe que $U + W$ es un F - subespacio vectorial de V. ¿Serán $U \cup V$ y $U \cap V$, F - subespacios vectoriales de V? Demuéstrelo o proporcione un contraejemplo según corresponda.

(157) Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Considere los conjuntos

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \,\text{es continua}\}$$

$$\mathcal{C}(x_0, y_0) := \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0\right\}.$$

Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{C}(x_0, y_0)$; dotado con la suma y multiplicación por escalar usual de funciones, sea un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial.

(158) Sea $\alpha > 1$ y p un número primo. ¿Es $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ - espacio vectorial con la suma y multiplicación usual en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

(159) Sea $S := \{v_1, v_2, v_3\}$, subconjunto de $\mathbb{R}^3$ linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$. Se define $w_1 := v_1 - v_2$, $w_2 := v_2 - v_3$ y $w_3 := v_3 - v_1$. Pruebe que $\{w_1, w_2, w_3\}$ es un conjunto $\mathbb{R}$ - linealmente dependiente. ¿Que sucederá con la $\mathbb{R}$ - dependencia lineal de $\{w_1, w_2, w_3\}$ si $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_2 + v_3$ y $w_3 = v_3 + v_1$?

(160) Determine el(los) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$, tal(es) que

$$\langle (1, 0, \alpha), (1, 2, -3), (a, 1, 0) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

(161) Sea V un F - espacio vectorial, tal que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto F - linealmente independiente de V y $w \in V$. Pruebe que si $\{v_1 + w, v_2 + w, ..., v_n + w\}$ es F - linealmente dependiente, entonces $w \in \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$.

(162) Considere los subconjuntos de funciones del espacio vectorial $\mathfrak{F}([0, 1], \mathbb{R})$, tales que

$$\begin{array}{ll} S = \{\cos(\pi x), \sin(\pi x)\} & \quad T = \{1, e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}\} \\ U = \{\cos(3x), \sin(3x)\} & \quad W = \left\{1, \sin^2(2x), \cos^2(2x)\right\} \end{array}$$

Pruebe que S y T son $\mathbb{R}$ - linealmente independientes. ¿Qué se puede decir sobre la $\mathbb{R}$ - dependencia lineal de U y W?

(163) Se define el conjunto

$$S := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & \lambda \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Determine el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$, para que S sea un conjunto $\mathbb{R}$ - linealmente dependiente.

(164) Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto infinito y $\mathfrak{F}(X, \mathbb{R})$, el espacio vectorial de las funciones $f : X \to \mathbb{R}$. Para cada $a \in X$, considere

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \neq a \end{cases}$$

Pruebe que el conjunto $\Omega = \{f_a : X \to \mathbb{R} : a \in X\}$, $\Omega \subseteq \mathfrak{F}(X, \mathbb{R})$ es $\mathbb{R}$ - linealmente independiente.

(165) Considere S y T en $\mathbb{R}^4$, tales que

$$S = \langle(-1,3,0,2),(0,4,4,0)\rangle,$$
$$T = \langle(2,-1,0,1),(0,2,1,1)\rangle.$$

Determine una base para $S\cap T$ y $S+T$. Verifique su respuesta evocando al *Teorema de la Dimensión*.

(166) Sea $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales. Se define

$$S := \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/ p(0) = 0\},$$
$$T := \{p(x) \in \mathbb{R}_2[x] \,/ p(1) = 0\}.$$

Exhiba una base para S, T y $S\cap T$.

(167) Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y $(a_1, a_2, ..., a_n)$, un vector fijo en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que el conjunto

$$W = \{(x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0\},$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Encuentre una base y calcule su dimensión.

(168) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F y U_i; subespacios vectoriales de V con $i = \{1,2,...,n\}$. Pruebe que

$$\dim(U_1 + U_2 + ... + U_n) \leq \dim(U_1) + \dim(U_2) + ... + \dim(U_n).$$

(169) Sean U, W; subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ tales que

$$U = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\},$$
$$W = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0 \wedge x_3 = 2x_4\right\}.$$

Encuentre una base y dimensión para U, W, $U+W$ y $U\cap W$.

(170) Sea el $\mathbb{R}$ - espacio vectorial $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Considere los $\mathbb{R}$ - subespacios vectoriales de $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$S = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\},$$
$$T = \{f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(x) = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que $\mathfrak{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = S \oplus T$.

(171) Determine cual de las siguientes aplicaciones que se exhiben a continuación corresponden a transformaciones $\mathbb{R}$ - lineales.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (2x - 7z, 0, 3y + 2z)$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (y - 3x + \sqrt{2}z, x - 2y + 1)$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, |x|)$.

(d) $T : \mathbb{R}_n [x] \to \mathbb{R}_{n-1} [x]$ definida por $T(p(x)) = p'(x)$.

(172) Considere la transformación $\mathbb{R}$ - lineal: $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x - z, x + 2y + 2z, -x - y)$. Encuentre una base para $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(173) Analice la epiyectividad e inyectividad de la transformación $\mathbb{R}$ - lineal: $T : \mathcal{M}_{2\times3}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$, dada por

$$T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3a_{11} - a_{12} \\ a_{12} - a_{13} & 0 \end{pmatrix}.$$

(174) Describa explícitamente una transformación $\mathbb{R}$ - lineal: $T : \mathbb{R}_3 [x] \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathrm{Im}(T)$ corresponde al subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2, 3, 1)$ y $(1, 0, -1)$.

(175) Sea V un F - espacio vectorial y $T : V \to V$, una transformación F - lineal. Demuestre que

$$\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Ker}(T) = \{0_V\} \text{ si y sólo si } T^2(v) = 0_V \Rightarrow T(v) = 0_V$$

(176) Sea V un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial y $T : V \to \mathbb{R}$, una transformación $\mathbb{R}$ - lineal no nula. Demuestre que existe $v \in V$, tal que $T(v) = 1$. Sabiendo que $S = \langle v\rangle$, pruebe que $V = S \oplus \mathrm{Ker}(T)$.

(177) Sean V, W; F - espacios vectoriales y $T : V \to W$, una transformación F - lineal. Pruebe que si T es una transformación inyectiva y $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq V$ es un conjunto F - linealmente independiente, entonces $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\} \subseteq W$ también preserva la F - independencia lineal.

(178) Sea V un F - espacio vectorial de dimensión 3 y $T : V \to V$; una aplicación F - lineal que verifica $T^3(v) = 0$ y $T^2(v) \neq 0$, $\forall\ v \in V$. Pruebe que existe $\lambda \in F$, tal que $\mathcal{B}_\lambda = \left\{\lambda, T(\lambda), T^2(\lambda)\right\}$ es base de V.

(179) Sea V un F - espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$, una transformación F - lineal que verifica $T^2(v) = T(v)$ (para todo $v \in V$). Pruebe que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

(180) Sea V un F - espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$, una transformación F - lineal. Pruebe que $V = \mathrm{Ker}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$ si y sólo si $\mathrm{Im}(T^2) = \mathrm{Im}(T)$.