Control fallido 1

Cálculo 2 - Equipo de Ayudantes.

Octubre, 2019

1. Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{sen(x)cos(x)}{\sqrt{1+2cos^2(x)}}dx$$

<u>Resolución</u>: Debemos buscar una primitiva para la función $\frac{sen(x)cos(x)}{\sqrt{1+2cos^2(x)}}$. Para ello, notemos que al derivar el término $1+2cos^2(x)$, resulta $-4cos(x)sen(x)$ lo que es muy parecido a lo que tenemos en el numerador. Así, definamos la función:

$$u = 1 + 2cos^2(x) \tag{1}$$

Dado que la intención es dejar la integral en términos de u, debemos encontrar el diferencial que define este. Para ello, derivamos la expresión (1) con respecto a la variable x, obteniendo:

$$\frac{du}{dx} = 2(2cos^{2-1}(x)(cos(x))' = -4sen(x)cos(x) \tag{2}$$

De esta forma, trabajando la expresión (2), notamos que:

$$\frac{-du}{4} = sen(x)cos(x)dx \tag{3}$$

Reemplazamos las expresiones (1) y (3) en la integral:

$$\int \frac{-du}{4\sqrt{u}} \tag{4}$$

Finalmente, obtenemos una integral mucho más fácil de trabajar. Por propiedades, podemos sacar las constantes y la raíz la podemos escribir en su forma de potencia:

$$\frac{-1}{4}\int u^{\frac{-1}{2}}du \tag{5}$$

Integrando esta potencia, resulta:

$$-\frac{\sqrt{u}}{2} + C \tag{6}$$

Donde C es un número real. Ahora necesitamos volver a la variable origen, para ello reemplazamos (1) en (6):

$$-\frac{\sqrt{u}}{2} + C = -\frac{\sqrt{1+2cos^2(x)}}{2} + C. \tag{7}$$

$$\therefore \int \frac{sen(x)cos(x)}{\sqrt{1+2cos^2(x)}}dx = -\frac{\sqrt{1+2cos^2(x)}}{2} + C$$

2. Calcule el área de la región acotada por las curvas y=sen(x), y=cos(x) e y=0, en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Además encuentre el volumen del sólido de revolución formado al rotar con respecto al eje x dicha región.

Resolución: Para calcular el área pedida, podemos ver que esta se puede dividir en 2 nuevas áreas. La primera corresponde al área de la región que encierra la curva azul (y=sen(x)) y el eje x, entre 0 y x_0; y la segunda corresponde al área de la región encerrada por la curva roja (y=cos(x)) y el eje x, entre x_0 y $\frac{\pi}{2}$, donde x_0 corresponde al punto de intersección de las curvas y=cos(x) e y=sen(x). Así, el área pedida, será simplemente la suma de las 2 áreas mencionadas anteriormente.

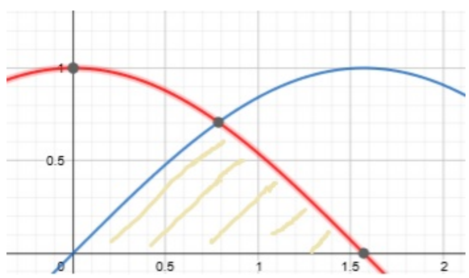

Figure 1: Región acotada por y=cos(x), y=sen(x) e y=0

Primero, encontremos el punto x_0. Para ello, buscamos x tal que sen(x)=cos(x), en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Resolviendo la ecuación, obtenemos que x=$\frac{\pi}{4}$=x_0. Así, por lo dicho en el primer parrafo, tenemos que:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen(x)dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)dx$$

Sabiendo que $cos(\frac{\pi}{4}) = sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, conlcluimos que:

$$A = -cos(\frac{\pi}{4}) + cos(0) + sen(\frac{\pi}{2}) - sen(\frac{\pi}{4}) = 2 - \sqrt{2}$$

Para la otra parte del ejercicio, recordemos que el volumen de un solido de revolución, cuando una región es rotada con respecto al eje x, viene dada por:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Haciendo un razamiento análogo a la parte de áreas, el volumen se podrá escribir como:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen^2(x)dx + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2(x)dx$$

Para resolver estas integrales, ocupamos el truco del ángulo doble. Por álgebra y geometría sabemos que $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$, luego de esta igualdad, utilizando además que $cos^2(x) + sen^2(x) = 1$, podemos obtener 2 igualdades:

$$cos^2(x) = \frac{cos(2x) + 1}{2}$$

$$sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

Así, las integrales del volumen se pueden reescribir como:

$$\int cos^2(x)dx = \int \frac{cos(2x) + 1}{2} dx$$

$$\int sen^2(x)dx = \int \frac{1 - cos(2x)}{2} dx$$

Sabiendo que la integral de $\int cos(2x)dx = \frac{sen(2x)}{2}$, obtenemos que:

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - cos(2x)}{2}(x)dx + \pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + cos(2x)}{2}(x)dx = (\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}) + (\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4})$$

$\therefore V = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$

3. Se define $f : [-1, 1] \longrightarrow R$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x = -1, 0, 1 \\ \\ 1 \quad si \qquad eoc \end{cases}$$

Demuestre que f es Newton integrable en el intervalo [-1,1].
<u>Resolución</u>: Para demostrar que f es integrable Newton en [-1,1], debemos encontrar una antiderivada de f en el intervalo [-1,1], es decir, buscar una función F que sea continua en [-1,1] y que cumpla F'(x)=f(x), en todos los x en [-1,1], donde está permitido fallar (es decir, que no se cumpla

F'(x)=f(x)) en una cantidad finita de puntos. Si se estudia la función f, podemos notar que es prácticamente la función constante 1, salvo en x=-1, x=0 y x=1. Luego nos conviene definir F(x)=x. Por una parte es continua en [-1,1] por ser un polinomio y su derivada es F'(x)=1. Sabemos que f(x)=1, para x $\in$ [-1,1], menos en x=-1, x=0, x=-1, por lo que f(x)=F'(x) en todo x $\in$ [-1,1], menos en x=-1, x=0 y x=1, lo que es equivalente a decir, f(x)=F'(x) en todo x $\in$ [-1,1], menos en una cantidad finita de puntos. Así, como F es continua en [-1,1] y su cumple f(x)=F'(x) en todo x $\in$ [-1,1], menos en una cantidad finita de punto, concluimos que F es una antideriva de f en [-1,1].
$\therefore$ f es integrable Newton en [-1,1]