Cálculo 2

Ejercicios Guía 2

Agosto, 2019

1. **Demostrar que la función f(x)=** $\mid x \mid$ **es convexa en I=R.**
   Basta demostrar que para todo x_1 y $x_2 \in$ R, y $\lambda \in [0,1]$ se cumpla que:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

   En este ejercicio nos aprovecharemos de algunas propiedades aprendidas en Cálculo 1. Tomemos la parte izquierda de la inecuación y apliquemos la definición de f:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) = \mid (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \mid$$

   Recordando la propiedad de la desigualdad triangular $\mid a+b \mid \leq \mid a \mid + \mid b \mid$, nos queda:

$$\mid (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \mid \quad \leq \quad \mid (1-\lambda)x_1 \mid + \mid \lambda x_2 \mid$$

   Por otro lado, como $\lambda \in [0,1]$, los terminos $(1-\lambda), \lambda > 0$, por lo que se pueden sacar del valor absoluto, quedandonos:

$$(1-\lambda) \mid x_1 \mid + \lambda \mid x_2 \mid = (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

   Luego se concluye:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1]$$

2. **Si f y g son funciones convexas en un intervalo abierto I, demuestre que (f+g) y (cf) son convexas en I** $\forall c > 0$

   Como f y g son convexas en I, para todo $x_1, x_2 \in I,\ y\ \lambda \in [0,1]$, se cumple:

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

$$g((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leq(1-\lambda)g(x_1)+\lambda g(x_2)$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos:

$$f((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)+g((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leq(1-\lambda)f(x_1)+\lambda f(x_2)+(1-\lambda)g(x_1)+\lambda g(x_2)$$

Recordemos que por definición, (f+g)(x)=f(x)+g(x). Así, lo anterior lo reescribimos como:

$$(f+g)((1-\lambda)x_1+\lambda x_2)\leq(1-\lambda)(f+g)(x_1)+\lambda(f+g)(x_2)$$

Así, (f+g) es convexa en I.
Para el segundo caso, basta multiplicar la inecuación a ambos lados por c y utilizar la definición (cf)(x)=cf(x) (note que es importante que c>0)

3. **Determine en que intervalo las siguientes funciones son convexas.**
Nota: En esta sección analizaremos el signo de la segunda derivada de estas funciones, y donde esta sea positiva, entonces la función es convexa (y donde es negativa, la función es concava).

   a) f(x)=tg(x) (Supongamos un dominio restringido $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$)
   Sabemos que: $f''(x)=\frac{2tg(x)}{(cos(x))^2}$ (compruebelo). Así, como el factor $\frac{2}{cos(x)^2}>0$, el signo de f"(x) depende netamente del signo de tg(x), y como tg(x) >0 $\forall\ 0<x<\frac{\pi}{2}$, entonces $f''(x)>0\ \forall 0<x<\frac{\pi}{2}$. Luego tg(x) es convexa en el intervalo $(0,\frac{\pi}{2})$.

   b) $g(x)=\frac{x}{1+x}$
   Derivando la función g "2 veces", obtenemos que $g''(x)=\frac{-2}{(1+x)^2}\frac{1}{(1+x)}$ (comprobar), donde el primer factor es negativo para cualquier x disntinto de -1. Luego el signo de g"(x) viene determinado por el segundo factor. Así, para que $g''(x)>0$, necesitamos que el segundo factor sea negativo igual, y eso se obtiene para $x<-1$. Luego g es convexa en el intervalo $(-\infty,-1)$.

   c) h(x)=Arctg(x)
   Es fácil obtener que $h''(x)=\frac{-2}{(1+x^2)^2}x$. El primer factor $\frac{-2}{(1+x^2)^2}<0$, para cualquier real, por lo que $h''(x)>0$ sí, y solo sí, $x<0$. Luego h es convexa en el intervalo (-∞,0).

4. **Dado $S>0$ y x,y >0 tales que $x^2+y^2=S$. Demuestre que la expresión x+y se minimiza cuando x=y.**
Tenemos que definir la función x+y, para estudiar su minimo. El "problema" (en curso de más adelante, ya no será un obstaculo) es que depende de

2 variables, por lo que hay que dejarla solo de una variable. Para ello, ocupamos la expresión de S. Definimos f(x)=x+$\sqrt{S-x^2}$, la cual es claramente equivalente a x+y. Derivando obtenemos:

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{S-x^2}}$$

Para buscar el x que minimiza f, hacemos f'(x)=0. Así, se obtiene que x=$\sqrt{\frac{S}{2}}$. (Comprobar que f"($\sqrt{\frac{S}{2}}$)>0) Así, para ver que efectivamente esto pasa cuando x=y, calculamos y con la expresión de S.
Se concluye que x+y se minimiza, cuando x=y=$\sqrt{\frac{S}{2}}$

5. **Una fábrica vende cervezas en lata cilíndrica de 500 centimetros cubicos. Encuentre el radio y altura que minímizan el área de la lata.**

   El área y el volumen de un cilindro vienen dado por las expresiones:

   $$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

   $$V = \pi rh$$

   Al igual que en el problema anterior, esta expresión depende de 2 variables (r y h), por lo que hay que utilizar la expresión del volumen para dejarlo en una sola variable. Así, despejando h del dato del volumen, nos queda:

   $$A = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$$

   Derivando con respecto r, obtenemos:

   $$A' = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}$$

   Poniendo la condición de A'=0, obtenemos que $r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$. Probar que A"($\sqrt[3]{\frac{250}{\pi}}$) >0. Para encontrar h, basta reemplzar r en V.

6. **Encuentre la distancia más corta del punto (1,1) y la recta y=1-x**
   Notar que cualquier punto (x,y) perteneciente a la recta, se puede escrbir de la forma (x,y)=(x,1-x), para todo x real. Luego la distancia (euclideana) del punto (1,1) a cualquier punto de la recta es: $\sqrt{(x-1)^2+x^2}$ =: f(x). Derivando f, nos queda:

   $$f'(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{(x-1)^2+x^2}}$$

Así, $x = \frac{1}{2}$ minimiza la distancia entre (1,1) y cualquier punto de la recta y=1-x. Pruebe que $f''(\frac{1}{2}) > 0$. Para encontrar esta distancia minima, basta calcular $f(\frac{1}{2})$= $\frac{\sqrt{2}}{2}$.