Ayudantía Inducción

Álgebra I
Primavera 2019

Problema 1: (Jojó is alive) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$, la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica corresponde a

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r}$$

Con $r \neq 1$ y $a \in \mathbb{R}$. Evalúe la suma

$$\mathcal{S} = 6 + 66 + 666 + 6666 + \cdots + \underbrace{666\cdots666}_{\text{n seis}}$$

Problema 2: Demuestre utilizando inducción.

a) $\operatorname{sen}(n\pi + \alpha) = (-1)^n \operatorname{sen}(\alpha), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$

b) $\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(3\theta) + \operatorname{sen}(5\theta) + \cdots + \operatorname{sen}((2n-1)\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(n\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)}$

c) $(1+x)^n \geq 1 + nx \forall\, n \in \mathbb{N}$, para $x \geq -1$ fijo. (Bernoulli)

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

e) $\forall n \geq 0$ se cumple que $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es divisible por 13

Problema 3: (Relaciones de Equivalencia y Orden)

a) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ fijos con $a \geq 1$ y $b \geq 2$ se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \iff b|ax + y \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax + y$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y solo si $b|(a+1)$.

b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2+1)$

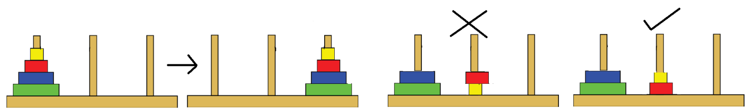
c) Demuestre que si $a = 3$ y $b = 4$, entonces $\mathcal{R}$ es de equivalencia. Encuentre $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$

b) En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación $(a, b) \sim (p, q) \iff n + q = m + p$. Vea si es de equivalencia, y en caso de serlo, identifique el conjunto cociente con $\mathbb{Z}$

non me tenent vincula

Problema 4: (Torre de Hanoi)

Una "Torre de Hanoi" es un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en una estaca, apilados de mayor a menor. El juego consiste en trasladar los anillos a la tercera estaca, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que los anillos se pueden mover sólo de a 1 y nunca puede haber una anillo más grandes sobre otro más pequeño.



Demuestre que la cantidad de pasos mínimos para ganar el juego está dado por la expresión:

$$p(n) = 2^n - 1$$