Guía 1

12 de agosto de 2019

§1.

CATEGORÍAS

Ejercicio 1. Pruebe que la inclusión $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ es un epimorfismo en la categoría **Rings**. Pruebe que la inclusión $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ es un epimorfismo en la categoría de espacios topológicos Hausdorff.

Ejercicio 2. Pruebe que en la categoría **Gps** los monomorfismos corresponden a los homomorfismos inyectivos y que los núcleos corresponden a los monomorfismos cuya imagen es un subgrupo normal.

Ejercicio 3 (Dualidad de Pontrjagin). Pruebe que la categoría $\mathcal{C}$ de los grupos abelianos finitos es isomorfa a su categoría opuesta $\mathcal{C}^{\text{op}}$. Pruebe que esto no es cierto para la categoría $\mathcal{T}$ de grupos de torsión.

Ejercicio 4. Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ una familia de objetos en una categoría $\mathcal{C}$. Pruebe que se tienen los siguientes isomorfismos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \prod_{i \in I} C_i) \simeq \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C_i) \quad \text{y} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\prod_{i \in I} C_i, A) \simeq \prod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C_i, A).$$

Ejercicio 5. Sea $\{\alpha_i : A_i \rightarrow C_i\}$ una familia de morfismos en $\mathcal{C}$. Pruebe lo siguiente:

1. Si $\prod A_i$ y $\prod C_i$ existen, entonces existe un único morfismo $\alpha : \prod A_i \rightarrow \prod C_i$ tal que $\pi_i \alpha = \alpha_i \pi_i$ para todo i . Además, si todos los α_i son monomorfismos, entonces α también.
2. Si $\prod A_i$ y $\prod C_i$ existen, entonces existe un único morfismo $\alpha : \prod A_i \rightarrow \prod C_i$ tal que $\iota_i \alpha_i = \alpha \iota_i$ para todo i . Además, si todos los α_i son epimorfismos, entonces α también.

§2.

FUNCTORES

Ejercicio 6. Pruebe que la inclusión de un esqueleto, asumiendo la existencia de un functor “reflexión”, es una equivalencia de categorías.

Ejercicio 7. Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{A}$ categorías. Suponga que $\mathcal{I}$ es pequeña. Pruebe que $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ es una categoría.

§3.

CATEGORÍAS ABELIANAS

Ejercicio 8. Pruebe que las nociones de producto finito y coproducto finito coinciden en una categoría aditiva.

Ejercicio 9. Sea $\mathcal{A}$ una **Ab**-categoría y sea $f : B \rightarrow C$ un morfismo en $\mathcal{A}$. Pruebe lo siguiente:

1. f es un monomorfismo si y sólo si $fe \neq 0$ para todo $e : A \rightarrow B$ no nulo.
2. f es un epimorfismo si y sólo si $gf \neq 0$ para todo $g : C \rightarrow D$ no nulo.

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana. Pruebe que $\mathcal{A}^{\text{op}}$ también lo es.

Ejercicio 11. Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{A}$ categorías. Suponga que $\mathcal{A}$ es abeliana. Pruebe que $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ es una categoría abeliana. Pruebe además que, para todo morfismo $\eta : B \rightarrow C$ en $\mathcal{A}^{\mathcal{I}}$, el núcleo de η es el functor A dado por $A(i) = \ker(\eta_i)$.

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y sea $f : B \rightarrow C$ un morfismo en $\mathcal{A}$. Pruebe que existe una factorización

$$B \xrightarrow{e} \text{im}(f) \xrightarrow{m} C,$$

de f con $m := \ker(\text{coker}(f))$. Pruebe además que m es un monomorfismo y que e es un epimorfismo.

Ejercicio 13. Sea $\{A_i\}$ una familia de subobjetos de un objeto $A \in \mathcal{A}$. Pruebe que si $\mathcal{A}$ es cocompleta, entonces existe un “subobjeto minimal” $\sum A_i$ de A que contiene a todos los A_i (defina en particular la propiedad universal que da sentido a las comillas). De la misma manera, pruebe que si $\mathcal{A}$ es completa, entonces existe un “subobjeto maximal” $\cap A_i$ de A contenido en todos los A_i .

Ejercicio 14. Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana.

1. Pruebe que si $\mathcal{A}$ es completa, entonces satisface (AB4*) si y sólo si los productos de sucesiones exactas son sucesiones exactas, es decir, si y sólo si, para toda familia $\{A_i \rightarrow B_i \rightarrow C_i\}$ de sucesiones exactas en $\mathcal{A}$, la sucesión producto

$$\prod A_i \rightarrow \prod B_i \rightarrow \prod C_i,$$

es también exacta.

2. De la misma manera, pruebe que si $\mathcal{A}$ es cocompleta, entonces satisface (AB4) si y sólo si las sumas directas de sucesiones exactas son sucesiones exactas. *Hint: considere $\mathcal{A}^{\text{op}}$.*

Ejercicio 15. Pruebe que (AB5) implica (AB4) y que (AB5*) implica (AB4*).

Ejercicio 16. Pruebe que si $\mathcal{A} \neq 0$, entonces $\mathcal{A}$ no puede satisfacer simultáneamente (AB5) y (AB5*). *Hint: considere el morfismo $\bigoplus A_i \rightarrow \prod A_i$.*

§4.

LÍMITES Y COLÍMITES

Ejercicio 17. Pruebe que una categoría abeliana es completa (en el sentido de límites) si y sólo si satisface (AB3*).

Ejercicio 18. Pruebe que una categoría abeliana es cocompleta (en el sentido de límites) si y sólo si satisface (AB3).

§5.

FUNCTORES ADJUNTOS

Ejercicio 19. Sean $\mathcal{I}$ y $\mathcal{A}$ categorías. Pruebe que, si todo functor $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$ tiene un límite, entonces existe un functor límite $\text{lím} : \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{A}$. Pruebe que la propiedad universal de $\text{lím} F_i$ corresponde a afirmar que lím es el adjunto por la derecha del functor diagonal $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathcal{I}}$ dado por $\Delta(A)_i := A$ para todo $i \in \mathcal{I}$.

De forma dual, pruebe que la propiedad universal de $\text{colim} F_i$ corresponde a afirmar que $\text{colim} : \mathcal{A}^{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{A}$ (cuando existe) es el adjunto por la izquierda de Δ .

Ejercicio 20. Verifique los detalles de la demostración del Teorema A.6.2 del libro de Weibel.

Ejercicio 21. Sean $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ funtores y sean $\eta : \text{id}_{\mathcal{A}} \Rightarrow RL$ y $\epsilon : LR \Rightarrow \text{id}_{\mathcal{B}}$ transformaciones naturales tales que, para todo $A \in \mathcal{A}$ y para todo $B \in \mathcal{B}$ las composiciones

$$L(A) \xrightarrow{L(\eta)} LRL(A) \xrightarrow{\epsilon L} L(A) \quad \text{y} \quad R(B) \xrightarrow{\eta R} RLR(B) \xrightarrow{R(\epsilon)} R(B),$$

corresponden a la identidad. Pruebe que (L, R) es un par adjunto.

Ejercicio 22. Sea (L, R) un par adjunto y sean η, ϵ como en el Teorema A.6.2 del libro de Weibel. Pruebe que $\epsilon \circ (LR\epsilon) = \epsilon \circ (\epsilon LR)$ y que $(RL\eta) \circ \eta = (\eta RL) \circ \eta$. En otras palabras, pruebe que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} LR(LR(B)) & \xrightarrow{LR\epsilon} & LR(B) \\ \epsilon_{LR(B)} \downarrow & & \downarrow \epsilon_B \\ LR(B) & \xrightarrow{\epsilon} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta} & LR(B) \\ \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_{RL(A)} \\ LR(B) & \xrightarrow{RL\eta} & RL(RL(A)) \end{array}$$