Guía de Ejercicios y tarea 1.
Álgebra II, segundo semestre 2018

Entregue resueltos los 4 ejercicios marcados con * el miércoles 8 de agosto.

1. Determine los elementos primitivos de $\mathbb{F}_7$.

2. * Determine los elementos primitivos de $\mathbb{F}_{49} = \mathbb{F}_7[i]$ y sus polinomios minimales en $\mathbb{F}_7[x]$. (Acá i denota una raíz de $x^2 + 1 \in \mathbb{F}_7[x]$)

3. Suponga que $\text{car}(F) = p \neq 0$. Demuestre que el morfismo de Frobenius $x \mapsto x^p$ es un automorfismo de cuerpos de F. Si pensamos en F como $\mathbb{F}_p$-espacio vectorial, ¿es $\mathbb{F}_p$-lineal este morfismo?

4. Si F es un cuerpo de característica $p > 0$ y $\alpha \in F$ ¿cuántas soluciones puede tener (en alguna extensión de F) la ecuación $x^p = \alpha$? ¿Y la ecuación $x^{p^k} = \alpha$ con $k \in \mathbb{N}$?

5. Si $\mathbb{F}$ es un cuerpo finito de característica p y $\alpha \in \mathbb{F}$, ¿puede $X^p - \alpha$ ser irreducible en $\mathbb{F}[X]$?

6. Sea $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{F}_p$ el cuerpo finito de p elementos con p primo, y sea L un cuerpo de descomposición del polinomio $G(X) := X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.
   a) Demuestre que $G(X)$ es un polinomio separable, pero NO irreducible en $\mathbb{F}_p[X]$.
   b) Demuestre que el conjunto de las raíces de G es un subcuerpo de L.
   c) Demuestre que L es igual al conjunto de raíces de G.
   d) Demuestre que $[L : \mathbb{F}_p] = n$.
   e) Demuestre que toda extensión de $K/\,\mathbb{F}_p$ de grado n es isomorfa a L.

7. Sea $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de q elementos, de modo que $q = p^n$ para algún primo p y algún $n \in \mathbb{N}$. ¿Cuando se cumple que hay una inyección $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_{q'}$?

8. * Sea p primo y $a \neq 0 \in \mathbb{F}_p$. Demuestre que $g = x^p - x + a$ es irreducible y separable sobre $\mathbb{F}_p$. Determine el cuerpo de descomposición de g sobre $\mathbb{F}_p$. Muestre explícitamente que su grupo de automorfismos es cíclico. ($\alpha \mapsto \alpha + 1$ define un automorfismo)

9. Calcule el grupo de automorfismos del cuerpo $\mathbb{F}_q$.

10. Demuestre que $x^{p^n} - x + 1$ es irreducible sobre $\mathbb{F}_p$ solo si $n = 1$ o $n = p = 2$. Ayuda: Si α es una raíz, entonces $\alpha + a$ también es raíz para todo $a \in \mathbb{F}_{p^n}$. Muestre que esto implica que $\mathbb{F}_p(\alpha)$ contiene $\mathbb{F}_{p^n}$ y $[\mathbb{F}_p(\alpha) : \mathbb{F}_{p^n}] = p$.

11. ¿Cuántos factores irreducibles sobre $\mathbb{F}_3[X]$ tiene el polinomio $X^{27} - X$?

12. Un cuerpo de característica p se dice perfecto si la función $\alpha \mapsto \alpha^p$ es sobreyectiva.

    a) Demuestre que todo cuerpo finito es perfecto.

    b) Demuestre que Si F es un cuerpo cualquiera de característica p, entonces $F(x)$ no es perfecto.

13. Sea $F = \mathbb{F}_p(T)$ el cuerpo de funciones racionales sobre un cuerpo primo finito y sea K/F el cuerpo de descomposición del polinomio $X^p - T$. Demuestre que $[K : F] = p$ y que hay un único F-automorfismo del cuerpo K.

14. Sea $f \in \mathbb{F}_q[x]$ un polinomio irreducible de grado k. Demuestre que f divide a $x^{q^n} - x$ si y solo si k divide a n.

15. Demuestre que
$$\sum_{a \in F_q} a^t = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq t \leq q-2 \\ -1 & \text{si } t = q-1 \end{cases}$$

16. Demuestre que $X^3 - 2X - 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$. Si θ es una raíz de este polinomio, calcule $(1+\theta)(1+\theta+\theta^2)$ y $\frac{1+\theta}{1+\theta+\theta^2}$ en $\mathbb{Q}(\theta)$.

17. * Encuentre los valores de $a \in \mathbb{Z}$ tales que $X^5 - aX - 1$ sea irreducible en $\mathbb{Z}[X]$.

18. Sea K/F una extensión de cuerpos. Si $u \in K$ es un elemento algebraico de grado impar sobre F, entonces u^2 también lo es y $F[u] = F[u^2]$.

19. En el cuerpo de funciones racionales $F(X)$, sea $u = \frac{X^3}{X+1}$. Demuestre que $F(X)$ es una extensión simple de $F(u)$. Calcule $[F(X) : F(u)]$.

20. * Sea K/F una extensión de cuerpos, sean L/F y M/F subextensiones finitas de K/F (es decir, $F \subset L \subset K,\ \ F \subset M \subset K,\ [L : F] < \infty,\ [M : F] < \infty$). Sea LM el compósito de L y M dentro de K (es decir, el mínimo subcuerpo de K que contiene a L y a M).

    a) Demuestre que $[LM : F] < \infty$, y que $[L : F] \big| [LM : F]$.

    b) Demuestre que $[LM : F] = [L : F][M : F]$ implica $L \cap M = F$.

    c) Demuestre que el recíproco se verifica cuando $[L : F] = 2$ o $[M : F] = 2$.

    d) Dé un ejemplo de extensiones F, L, M, K tal que $[L : F] = [M : F] = 3$, $[LM : F] < 9$, $L \cap M = F$.

21. Sea $f(x) \in F[x]$ un polinomio irreducible de grado p y sea $E \supseteq F$ con $|E : F| < \infty$. Si $f(x)$ no es irreducible en $E[x]$, demuestre que $p \mid |E : F|$. Ayuda: Considere un cuerpo $L \supseteq E$ en el que f tenga una raíz.

Guía de Ejercicios y tarea 2.
Álgebra II, segundo semestre 2018

Entregar los 4 ejercicios marcados el lunes 27 de agosto.

1. Determine el cuerpo de descomposición y su grado sobre $\mathbb{Q}$ para cada uno de los polinomios siguientes:

   a) $x^4 - 2$ *b*) $x^4 + 2$ *c*) $x^4 + x^2 + 1$

2. * Sea K una extensión finita de F. Demuestre que K es un cuerpo de descomposición sobre F si y solo si todo polinomio irreducible en $F[x]$ que tiene una raíz en K se descompone completamente en $K[x]$.

3. * Sean K_1, K_2 extensiones finitas de F contenidas en K y suponga que ambas son cuerpos de descomposición sobre F. Demuestre que el composito K_1K_2 y la intersección $K_1 \cap K_2$ son cuerpos de descomposición sobre F.

4. Sea $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$.

   a) Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}}$ es denumerable.

   b) Demuestre que $\overline{\mathbb{Q}}/\,\mathbb{Q}$ es una extensión algebraica infinita.

   c) Sea $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$ y $n = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. Demuestre que el conjunto de racionales p/q (con $p, q \in \mathbb{Z}$) tales que $|\alpha - p/q| < 1/q^{n+1}$ es finito (o vacío). Concluya (como Liouville alrededor de 1829) que $\sum_{j=0}^{\infty} 10^{-j!}$ es un número real no algebraico.

   SUGERENCIA. Sea $P(X) \in \mathbb{Z}(X)$ de grado n y tal que $P(\alpha) = 0$. Considere $|P(p/q)| = |P(p/q) - P(\alpha)|$ y piense en el teorema del valor medio.

5. Sea F, un cuerpo y $g(x) \in F[x]$. Demuestre $D(g(x))$ es el polinomio nulo ssi $g(x)$ es constante, o F es de característica p y $g(x) = f(x^p)$, con $f(x) \in F[x]$.

6. Demuestre que el único automorfismo del cuerpo $\mathbb{R}$ es la identidad.

7. Demuestre que la clausura algebraica $\overline{\mathbb{Q}}$ tiene infinitos automorfismos. Más aún, demuestre que el grupo de automorfismos (de cuerpo) de $\overline{\mathbb{Q}}$ no es denumerable.

8. Sea $f(x)$ un polinomio irreducible en $F[x]$ de grado n y sea $g(x) \in F[x]$. Muestre que todo factor irreducible de $f(g(x))$ tiene grado divisible por n.

9. Sea $K \subset L$ cuerpos y $a \in L$. Pruebe que a es algebraico sobre K si y solamente si existe un K-espacio vectorial de dimensión finita $V \subset L$ tal que $aV \subset V$.

10. Sea w una raiz cúbica y no trivial de la unidad. Sea $L = \mathbb{Q}(w, \sqrt[3]{2})$ y $K = \mathbb{Q}(w\sqrt[3]{2})$. Pruebe que $[L : K] = 2$, pero $[L \cap \mathbb{R} : K \cap \mathbb{R}] = 3$.

11. Demuestre que el cuerpo de descomposición de x^4+2 sobre $\mathbb{F}_5$ es una extensión de grado 2 de $\mathbb{F}_5$.

12. * Suponga que K es un cuerpo de característica p que no es perfecto. Pruebe que existe un polinomio irreducible e inseparable sobre K. Concluya que existe una extensión inseparable de K.

13. Sea F un cuerpo de característica p y F/K una extensión finita tal que $p \nmid [F : K]$. Pruebe que F/K es una extensión separable.

14. Sea F un cuerpo de característica p y $\alpha \in \overline{F}$ un elemento separable. Muestre que $F(\alpha) = F(\alpha^{p^i})$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

15. Sea K/F una extensión separable con la propiedad que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $[F(\alpha) : F] \leq n$, para todo $\alpha \in K$. Muestre que K/F es finita y que $[K : F] \leq n$.

16. Sea K el cuerpo de descomposión del polinomio $p(x) = (x^2-2)(x^4+x^2+2)$ en $\mathbb{F}_5$. Encuentre un elemento primitivo para la extensión $K/\mathbb{F}_5$.

17. Encuentre todos los polinomios irreducibles de grado 1, 2 y 4 sobre $\mathbb{F}_2[x]$ y pruebe que su producto es $x^{16}-x$.

18. Sea $\mathbb{F}_{p^n} = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{p^n}\}$ la extensión de grado n de $\mathbb{F}_p$. Pruebe que $x^{p^n} - x = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{p^n})$.

19. Sea $\mathbb{F}_{p^n}$ la extensión de grado n de $\mathbb{F}_p$ con p un primo impar. Pruebe que en $\mathbb{F}_{p^n}$ hay $\frac{p^n+1}{2}$ cuadrados.

20. * Demuestre que en un cuerpo finito todo elemento es suma de dos cuadrados.

21. Sea $\phi : \mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^n}$ el homomorfismo de Frobenius. Pruebe que $\phi^n = \mathrm{id}$ y que $\phi^s \neq \mathrm{id}$, para $0 < s < n$.

22. Sea L/F una extensión algebraica y sea $\theta : L \to L$ un F-homomorfismo de cuerpos. Demuestre que θ es sobreyectivo. Ayuda: Un polinomio $f \in F[x]$ debe tener tantas raíces en $\theta(L)$ como tiene en L.

Guía de Ejercicios y tarea 3.
Álgebra II, segundo semestre 2018

Entregar los 4 ejercicios marcados el miércoles 12 de septiembre.

1. Considere $L = \mathbb{Q}[\zeta]$ con ζ una raíz séptima primitiva de 1. Encuentre el polinomio minimal $p(x)$ de $\alpha = \zeta + \zeta^6$ en $\mathbb{Q}[x]$. Determine las otras raíces de $p(x)$. ¿Es $\mathbb{Q}[\alpha]/\mathbb{Q}$ una extensión galoisiana?

2. Determine el polinomio minimal sobre $\mathbb{Q}$ para el elemento $1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

3. * Determine todos los subcuerpos del cuerpo de descomposición de $x^8 - 2$ que son Galois sobre $\mathbb{Q}$.

4. Muestre que $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ es una extensión de grado 4 de $\mathbb{Q}$ con grupo de Galois cíclico.

5. Demuestre que el cuerpo de descomposición de $x^4 - 2x^2 - 2$ sobre $\mathbb{Q}$ es de grado 8 con grupo de Galois dihedral. Ayuda: ejercicio 16 página 582 Dummit.

6. * Sea K/F una extensión finita de cuerpos. Para $\alpha \in K$, sea $L_\alpha : K \to K$ dada para $x \in K$ por $L_\alpha(x) := \alpha x$. Como L_α es F-lineal, definamos su polinomio característico $P_\alpha(X) \in F[X]$ como $P_\alpha(X) = \det(XI - L_\alpha)$, donde $I(x) = x$ es la función identidad de K a K. Demuestre las siguientes aseveraciones.

   a) Si $K = F(\alpha)$, entonces $P_\alpha(X) = \min_{\alpha,F}(X)$, el polinomio minimal de α sobre F.

   b) $P_\alpha(X) = \big(\min_{\alpha,F}(X)\big)^m$, donde $m = [K : F(\alpha)]$.

7. * Con la nomenclatura del ejercicio anterior, definamos la norma $\mathrm{N}_{K/F} : K \to F$ (resp., la traza $\mathrm{Tr}_{K/F} : K \to F$) de K a F de α como $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha) := \det(L_\alpha)$ $\big($resp., $\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha) := \mathrm{Traza}(L_\alpha)\big)$.

   a) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ todas las raíces (en alguna extensión de F) de $P_\alpha(X) = \prod_{i=1}^n \big(X - \alpha_i\big)$. Demuestre
   $$\mathrm{N}_{K/F}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \alpha_i, \qquad \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

   b) Si K/F es separable, y $K \subset L$ con L algebraicamente cerrado, entonces $P_\alpha(X) = \prod_\tau \big(X - \tau(\alpha)\big)$, donde τ recorre todas las F-incrustaciones de K en L.

   c) Demuestre, para $\alpha \in F$, que $\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha) = [K : F]$, $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha) = \alpha^{[K:F]}$.

   d) Demuestre, para $\alpha, \beta \in K$, que $\mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha + \beta) = \mathrm{Tr}_{K/F}(\alpha) + \mathrm{Tr}_{K/F}(\beta)$, $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha\beta) = \mathrm{N}_{K/F}(\alpha) \cdot \mathrm{N}_{K/F}(\beta)$.

e) Si $F \subset K \subset H$ son extensiones finitas sucesivas de cuerpos, demuestre para $\beta \in H$, $\mathrm{N}_{H/F}(\beta) = \mathrm{N}_{K/F}\big(\mathrm{N}_{H/K}(\beta)\big)$ y $\mathrm{Tr}_{H/F}(\beta) = \mathrm{Tr}_{K/F}\big(\mathrm{Tr}_{H/K}(\beta)\big)$.

f) Demuestre que si K/F es una extensión de cuerpos finitos, entonces $\mathrm{N}_{K/F}$ y $\mathrm{Tr}_{K/F}$ son funciones epiyectivas.

8. Sea K/F extensión galoisiana de grupo de Galois G. Para $\alpha \in K$ definimos $\mathrm{tr}_{K/F}(\alpha) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(\alpha)$ y $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(\alpha)$. Muestre que si $K = F(\alpha)$ y $m_{\alpha,F}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ entonces $\mathrm{tr}_{K/F}(\alpha) = -a_{n-1}$ y $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha) = (-1)^n a_0$. Deduzca que $\mathrm{tr}_{K/F(\alpha)}, \mathrm{N}_{K/F}(\alpha) \in F$.

9. Sea $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$. Encuentre todos los cuerpos L tales que $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq F$.

10. Sea $F = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, para $p \neq 2$ primo. Pruebe que existe una única extensión $L = \mathbb{Q}(\sqrt{D_p})$ de $\mathbb{Q}$ tal que $L \subseteq F$ y $D_p \in \mathbb{Z} - \mathbb{Z}^2$. Determine D_p para $p = 3$ y $p = 5$.

11. Sea $F = \mathbb{Q}(\zeta_7)$. Encuentre todos los cuerpos L tales que $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq F$.

12. Sea K/F una extensión separable. Demuestre que existe una extensión galoisiana L/F que contiene a K y que posee la propiedad siguiente: para toda extensión galoisiana M/F que contiene a K, L está contenido en M.

13. Sea K una extensión de Galois sobre F y sea F' una extensión cualquiera de F. Pruebe que KF' es una extensión de Galois sobre F' con grupo de Galois isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Gal}(K/F)$.

14. * Sean K/F y F' los cuerpos del ejercicio anterior. Pruebe que existe un isomorfismo $\mathrm{Gal}(KF'/F') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K/K \cap F')$. *Hint: considere el cuerpo fijo por la imagen del isomorfismo y su composito con F'.* Concluya que, si F'/F es finita, entonces $[KF' : F] = \frac{[K:F][F':F]}{[K \cap F':F]}$.

15. Sean K_1, K_2 dos extensiones de Galois sobre F tales que $K_1 \cap K_2 = F$. Pruebe que $\mathrm{Gal}(K_1K_2/F) \simeq \mathrm{Gal}(K_1/F) \times \mathrm{Gal}(K_2/F)$. Recíprocamente pruebe que, si K es galoisiana sobre F y $G = \mathrm{Gal}(K/F) = G_1 \times G_2$ con G_1, G_2 subgrupos de G, entonces $K = K_1K_2$ con K_1, K_2 galoisianas sobre F tales que $K_1 \cap K_2 = F$.

16. Sea $K = \mathbb{F}_{p^n}$ y $F = \mathbb{F}_p$. Determine $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha)$, para $\alpha \in K$ elemento arbitrario.

17. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, las soluciones de la ecuación $x^3 + ax + b = 0$. Sea $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_2 - \alpha_3)$. Probar que $\delta^2 = -27b^2 - 4a^3$.

    Sea ahora $F(\alpha)/F$ una extension cúbica y $x^3 + ax + b = m_{\alpha,F}(x)$. Probar que $F(\alpha)/F$ es galoisiana si y solamente si $-27b^2 - 4a^3$ es un cuadrado en F.

Guía de Ejercicios y tarea 4.
Álgebra II, segundo semestre 2018

Entregar 4 ejercicios a su elección el miércoles 10 de octubre.

1. Demuestre que $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}(\zeta_{13})$
2. Demuestre que al menos uno de 2, 3, 6 es un cuadrado módulo p para cualquier primo p. Concluya que el polinomio $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 6)$ tiene una raíz módulo p para cualquier p, pero que no tiene raíz en $\mathbb{Z}$.
3. Suponga que $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio irreducible. ¿Se puede concluir que su imagen en $\mathbb{F}_p[x]$ por el homomorfismo canónico es irreducible para algún primo p? Demuestre o encuentre un contraejemplo.
4. Determine la clausura de Galois del cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{1 + \sqrt{2}})$ sobre $\mathbb{Q}$.
5. Sea F un cuerpo contenido en el anillo de matrices de $n \times n$ sobre $\mathbb{Q}$. Demuestre que $[F : \mathbb{Q}] \leq n$. Muestre un cuerpo F que cumpla la igualdad.
6. Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}(\zeta_n)$.
7. Sea $\alpha \in K$ tal que $\alpha^n = 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $F(\alpha)/F$ es normal. ¿Cuando es separable?
8. Sea $\alpha \in K$. Demuestre que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que α^n es separable sobre F.
9. Demuestre que $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/5})$ es una extensión de grado 2 de $Q(\sqrt{5})$. Calcule explícitamente $\cos(2\pi/5)$.
10. Calcule $\cos(2\pi/17)$
11. Sea p un primo y $n \in \mathbb{N}$. Calcule el grado sobre $\mathbb{Q}$ de la clausura normal sobre $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})$.
12. Demuestre que $\mathbb{Q}\left(\cos(\pi/9)\right)/\mathbb{Q}$ es una extensión de grado 3. ¿Es normal?
13. Sea K un cuerpo cuya única extensión algebraica y separable es K. ¿Es K algebraicamente cerrado?
14. Sea L la clausura galoisiana de la extensión finita $\mathbb{Q}(\alpha)$ sobre $\mathbb{Q}$. Para todo primo p que divida el orden de $Gal(L/\mathbb{Q})$ demuestre que existe un subcuerpo $F \subseteq L$ con $|L : F| = p$ y $L = F(\alpha)$
15. Sea $F \subseteq \mathbb{R}$ un subcuerpo. Sea $a \in F$ y sea $K = F(\sqrt[n]{a})$ donde $\sqrt[n]{a}$ denota una n-ésima raíz real de a. Demuestre que si L es una extensión de Galois de F contenida en K, entonces $|L : F| \leq 2$.

16. Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible cuyas raíces son todas reales. Suponga además que una de las raíces de $f(x)$, α puede escribirse en términos de radicales reales, es decir que existe una cadena de subcuerpos $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \cdots \subset K_m \subset \mathbb{R}$ con $K_{i+1} = K_i(\sqrt[n_i]{a_i})$ con $a_i \in K_i$, $\alpha \in K_m$. Demuestre que el grupo de Galois de $f(x)$ es un 2-grupo.

17. Sea D un entero libre de cuadrados y a un racional no nulo. Demuestre que si $\mathbb{Q}(\sqrt{a\sqrt{D}})$ es Galois sobre $\mathbb{Q}$, entonces $D = -1$.

18. Demuestre que toda extensión puramente inseparable es normal.

19. Demuestre que si t es trascendente sobre $\mathbb{Q}$, entonces $\mathbb{Q}(t, \sqrt{t^3 - t})$ no es una extensión puramente trascendente de $\mathbb{Q}$.

20. Sea t trascendente sobre $\mathbb{F}_4$ (cuerpo de 4 elementos), $K = \mathbb{F}_4(t^4+t)$ y $E = \mathbb{F}_4(t)$.

    a) Demuestre que $|E : K| = 4$.

    b) Demuestre que E es separable sobre K.

    c) Demuestre que E es Galois sobre K.

    d) Describa el reticulado de subgrupos del grupo de Galois y el correspondiente reticulado de subcuerpos de E, exhibiendo cada subcuerpo como $K(r)$ para alguna función racional r.

21. Sea K un subcuerpo de $\mathbb{C}$ maximal respecto a la propiedad "$\sqrt{2} \notin K$"

    a) Muestre que tal K existe

    b) Muestre que $\mathbb{C}$ es algebraico sobre K.

    c) Muestre que toda extensión finita de K contenida en $\mathbb{C}$ es Galois con grupo de Galois cíclico de orden potencia de 2.

    d) Deduzca que $|\,\mathbb{C} : K|$ es infinito numerable.

Guía de Ejercicios y tarea 5.
Álgebra II, segundo semestre 2018

Entregar los 5 ejercicios marcados el miércoles 24 de octubre.

1. Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$ y sea $A = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ con $a, b \in K^*$. Pruebe que $Z(A) = K \cdot 1_A$.

2. Sea K un cuerpo de característica $\neq 2$ y sean $a, b \in K^*$. Pruebe que si a es un cuadrado entonces $A = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ es isomorfa a $M_2(K)$.

3. * Encuentre dos álgebras de cuaterniones sobre $\mathbb{Q}$ no isomorfas.

4. Sean $\phi : A \to B$ e $\iota : C \to B$ homomorfismos de R-álgebras y supongamos que ι es inyectivo. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   - Existe un único homomorfismo de álgebras $f : A \to C$ tal que $\iota \circ f = \phi$;
   - $\mathrm{Im}(\phi) \subset \mathrm{Im}(\iota)$.

5. Pruebe que si $\varphi : A \to B$ es un homomorfismo de R-álgebras, entonces la aplicación $M_n(\varphi) : M_n(A) \to M_n(B)$ que consiste en aplicar φ a cada coordenada es un homomorfismo de R-álgebras. Concluya que si J es un ideal bilátero de R, entonces $M_n(J)$ es un ideal bilátero de $M_n(R)$ y $M_n(R)/M_n(J) \simeq M_n(R/J)$.

6. Sea K un cuerpo y sea A una K-álgebra unitaria. Demuestre que existe un isomorfismo de K-álgebras $M_n(K) \otimes_K A \simeq M_n(A)$.

7. Sean M, N y T tres R-módulos. Pruebe que $\mathrm{Bil}_R(M, N; T) = \{\varphi : M \times N \to T \mid \varphi\, R\text{-bilineal}\}$ es un R-módulo isomorfo a $\hom_R(M, \hom_R(N, T))$ y a $\hom_R(N, \hom_R(M, T))$.

8. * Sean G, G' grupos finitos. Pruebe que existe un isomorfismo de R-álgebras $R^{G \times G'} \simeq R^G \otimes_R R^{G'}$.

9. Sean f y g aplicaciones R-lineales epiyectivas. Pruebe que $f \otimes_R g$ es epiyectiva. Pruebe además que si $f = \mathrm{id}_M$ y $g = \mathrm{id}_N$, entonces $f \otimes_R g = \mathrm{id}_{M \otimes_R N}$.

10. Exhiba un isomorfismo de K-álgebras $M_n(K) \otimes_K M_m(K) \xrightarrow{\sim} M_{mn}(K)$. Deduzca que $T(M_n(K)) \simeq \bigoplus_{k=0}^{\infty} M_{n^k}(K)$.

11. Sea K un cuerpo y S una K-álgebra graduada con $S_0 \simeq K$. Pruebe que S tiene un único ideal graduado maximal.

12. Sea S un anillo graduado. Pruebe que todo ideal graduado I de S está generado por elementos homogéneos.

13. Pruebe que $S(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$.

14. Pruebe que si M es un R-módulo cíclico entonces $S(M) = T(M)$.

15. Sea V un K-espacio vectorial con base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Pruebe que todo $z \in \Lambda^n(V)$ se escribe como $z = \det(A) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$, donde $A \in M_n(K)$.

16. Sea $x \in \Lambda^k(M)$ y sea $y \in \Lambda^t(M)$. Pruebe que $x \wedge y = (-1)^{kt} y \wedge x$.

17. * Sea R un dominio, sea F su cuerpo cociente visto como R-módulo y sea J un R-submódulo de F. Pruebe que $\Lambda^k(J)$ es un R-módulo de torsión para todo $k \geq 2$.

18. Sean R, F como en el ejercicio anterior. Pruebe que $\Lambda^2(F) = 0$.

19. Sea K un cuerpo. Pruebe que si D es un álgebra de división de centro K, entonces $M_n(D)$ es una K-álgebra central simple.

20. ¿Es $M_2(\mathbb{C})$ una $\mathbb{R}$-álgebra central simple? ¿Es $\mathbb{H}$ una $\mathbb{C}$-álgebra central simple? ¿Es $M_2(\mathbb{C})$ una $\mathbb{C}$-álgebra central simple?

21. * Sea K un cuerpo y A una K-álgebra simple de dimensión finita. Pruebe que $\operatorname{End}_K(A)$ es una K-álgebra de división (con la multiplicación dada por la composición). ¿Qué puede decir si la dimensión no es finita?

22. Sea K un cuerpo y A una K-álgebra de dimensión finita. Definimos el *álgebra opuesta* A° de A como el álgebra dada por $A^\circ = \{a^\circ \mid a \in A\}$ con suma y multiplicación dadas por

$$a^\circ + b^\circ = (a+b)^\circ, \qquad \lambda(a^\circ) = (\lambda a)^\circ, \qquad a^\circ b^\circ = (ba)^\circ,$$

para $a, b \in A$ y $\lambda \in K$.

Pruebe que si A es un álgebra de cuaterniones sobre K, entonces existe un isomorfismo de K-álgebras $A \simeq A^\circ$.

23. * Proponga un ejercicio en el tema de álgebras tensoriales, simétricas o exteriores de módulos. No es necesario que sea original (puede buscar en libros o internet), pero espero que todos sean diferentes.