Ayudantía 14 Dic

December 13, 2018

Notaciones

1. Sea $f : X \to Y$ función y sea $\mathcal{E} \subset 2^Y$. Denote

$$f^{-1}\mathcal{E} := f^{-1}(\mathcal{E}) := \left\{f^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{E}\right\}$$

y, si $\mathcal{G} \subset 2^X$, denote

$$f_*\mathcal{G} := \left\{A \in 2^Y \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{G}\right\}$$

2. Sea $\mathcal{E} \subset 2^X$ y $A \subset X$. Sea $i_A : A \to X$ inclusión. Denote

$$\mathcal{E}_A = i_A^{-1}(\mathcal{E}) = \left\{A \bigcap E \mid E \in \mathcal{E}\right\}$$

Ejercicios

Ejercicio 1

Sea $\mathcal{E}$ una colección de subconjuntos de X. Muestre que existe un álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ y un $\sigma-$álgebra $\sigma(\mathcal{E})$ que continenen a $\mathcal{E}$ y que son minimales.

Solución

Como 2^X es un álgebra (y $\sigma-$álgebra) y $\mathcal{E} \subset 2^X$, entonces $\mathcal{E}$ siempre es subconjunto de un álgebra (y $\sigma-$álgebra). Además, note que

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) := \bigcap \{A : A \, \text{es álgebra y } \mathcal{E} \subset A\}$$

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{B : B \, \text{es } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{E} \subset B\}$$

son un álgebra y $\sigma-$álgebra respectivamente y, ciertamente, minimales.

Ejercicio 2

Sea X un conjunto y $\mathcal{E} \subset 2^X$. Defina $\mathcal{E}^c := \{A^c : A \in \mathcal{E}\}$ y $\mathcal{E}_c := \mathcal{E} \bigcup \{X, \emptyset\} \bigcup \mathcal{E}^c$. Muestre que (ver ejercicio anterior)

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}) = \{\text{uniones finitas de intersecciones finitas de elementos de } \mathcal{E}_c\}$$

Solución

Denótese por

$$\mathcal{A} \equiv \{\text{uniones finitas de intersecciones finitas de elementos de } \mathcal{E}_c\}$$

Por la definición de álgebra, $\mathcal{E} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}(\mathcal{E})$. Luego, la demostración sólo requiere verificar que $\mathcal{A}$ es un álgebra. Se mostrará, sólamente, que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo tomar complemento. Sea $Z \in \mathcal{A}$ expresado como

$$Z = \bigcup_{i=1}^{N} \bigcap_{j=1}^{K} A_{ij}$$

donde $A_{ij} \in \mathcal{E}_c$. Defínase $B_{ij} := A_{ij}^c$. Note que $B_{ij} \in \mathcal{E}_c$. Además,

$$\begin{aligned} Z^c &= \bigcap_{i=1}^{N} \bigcup_{j=1}^{K} B_{ij} \\ &= \bigcup_{j_1,\ldots,j_N=1}^{K} \left(B_{1j_1} \bigcap B_{2j_2} \bigcap \cdots \bigcap B_{Nj_N} \right) \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Ejercicio 3

Suponga que (X, M), (Y, F) y (Z, G) son espacios medibles. Muestre que si $f : (X, M) \to (Y, F)$ y $g : (Y, F) \to (Z, G)$ son funciones medibles, entonces $g \circ f : (X, M) \to (Z, G)$ es medible.

Solución

Por hipótesis, $g^{-1}(G) \subset F$ y $f^{-1}(F) \subset M$, de donde

$$(g \circ f)^{-1}(G) = f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right) \subset f^{-1}(F) \subset M$$

Ejercicio 4

Sean $f : X \to Y$ función, $\mathcal{E} \subset 2^X$ y $A \subset Y$. Entonces

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$$

y

$$(\sigma(\mathcal{E}))_A = \sigma(\mathcal{E}_A)$$

Solución

Como $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ es un $\sigma-$álgebra y como $\mathcal{E} \subset F$,

$$f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$$

Así,

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$$

A la inversa, note que

$$f_*\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) = \left\{B \subset Y \,:\, f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)\right\}$$

es un $\sigma-$álgebra que contiene a $\mathcal{E}$ y por lo tanto $\sigma(\mathcal{E}) \subset f_*\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$. Así, si $B \in \sigma(\mathcal{E})$, entonces $f^{-1}(B) \in \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$, es decir, $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$, lo que prueba

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$$

Aplicando este resultado con $X = A$ y $f = i_A$ (inclusión), se tiene que

$$(\sigma(\mathcal{E}))_A = i_A^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma\left(i_A^{-1}(\mathcal{E})\right) = \sigma(\mathcal{E}_A)$$

Finalmente, si $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset M$, entonces $f^{-1}\sigma(\mathcal{E}) = \sigma\left(f^{-1}\mathcal{E}\right) \subset M$, lo que prueba que f es medible.