Ayudantía 11 de Diciembre

December 11, 2018

Ejercicio 1

Lema de Borel-Cantinelli

Sea (X, M, μ) un espacio de medida y $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección contable de conjuntos medible tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$. Entonces casi todo $x \in X$ pertenece, a lo más, a una cantidad finita de $E_k's$

Solución

Note que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right] = \{x \in X \mid x \text{ pertenece a una cantidad infinita de } E_k's\}$$

Vemos que la medida del conjunto anterior es nula.

En efecto,

$$\mu\left(\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right]\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

y, por hipótesis, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$.

Además, $\{[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k]\}_{k=1}^{\infty}$ es descendente:

En efecto, para cualquier i,

$$\bigcup_{k=i}^{\infty} E_k \supseteq \bigcup_{k=i+1}^{\infty} E_k$$

Así, por la continuidad de μ,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right)$$

Ahora, por la monotonía contable,

$$\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)$$

Por lo tanto

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right]\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) = 0$$

Ejercicio 2

Pruebe que $(\mathbb{R}, \mathbb{B}, m)$, donde $\mathbb{B}$ es el $\sigma-$álgebra de los Boreles y m es la medida de Lebesgue, no es completo.

Solución

Sea ϕ la función Cantor-Lebesgue y defina ψ en $[0,1]$ mediante

$$\psi(x) = \phi(x) + x$$

Resulta que ψ es estríctamente creciente y continua

La función ψ mapea un conjunto medible A en un no medible:

En efecto, por el Teorema de Vitali, $\psi(C)$ contiene un subconjunto W no medible. El conjunto $\psi*$ (W) es medible y tiene medida nula (pues es subconjunto del Cantor). Así, $\psi^*(W)$ es un subconjunto medible del cantor que es mapeado por ψ en un no medible.

Además, una función estríctamente creciente y continua definida en un intervalo mapea Boreles en Boreles

Así, el conjunto A no es Borel pues, si lo fiera, su imagen bajo ψ sería Borel y, por lo tanto, medible.

Ejercicio 3

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible Lebesgue. Pruevbe que la imagen inversa de todo conjunto de Borel es un conjunto medible Lebesgue

Solución

Veremos que

$$\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^*(B) \text{ medible}\}$$

Es un $\sigma-$álgebra que contiene a los abiertos.

En efecto,

$\mathbb{R} \in \mathcal{A}$:

note que $f^*(\mathbb{R}) = E$ (medible), luego $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ es cerrado por complementos:

Si $B \in \mathcal{A}$, entonces $f^*(B)$ es medible, luego $(f^*(B))^c$ es medible, pero $(f^*(B))^c = f^*(B^c)$, luego $B^c \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ es cerrado por uniones numerables:

Sea $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$. Note que

$$x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^*(B_i) \iff \exists j \in \mathbb{N}, x \in f^*(B_j) \iff \exists j \in \mathbb{N}, f(x) \in B_j \iff f(x) \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \iff x \in f^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)$$

Además, $\forall i, B_i \in \mathcal{A} \implies \forall i, f^*(B_i)$ medible $\implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^*(B_i)$ medible $\implies f^*\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\right)$ es medible $\implies \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \mathcal{A}$

Hasta aquí, $\mathcal{A}$ es $\sigma-$álgebra. Por último, recuerde que

f medible sss $\forall O \subseteq \mathbb{R}$ abierto $f^*(O)$ es medible

Es decir, $\mathcal{A}$ contiene a los abiertos.