Ayudantía 7 diciembre

December 6, 2018

Recuerdos

1. Suponga que $f_i : X \to \mathbb{R}$ son funciones medible par $i = 1, \ldots, n$ y sean $p_1, \ldots, p_n$ y r reales positivos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} = r^{-1}$$

Muestre que

$$\left|\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\right|\right| \leq \prod_{i=1}^{n} ||f_i||_{p_i}$$

2. Si $f \geq 0$ es medible, entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que

$$m\left(f \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon}\int_X f$$

3. (f_n) se dice Cauchy en una medida (o L^0 Cauchy) si $\forall \epsilon > 0$,

$$\lim_{n,m\to\infty} m\left(|f_n - f_m| > \epsilon\right) = 0$$

Ejericio 1 (Desigualdad de Chebyshev)

Sea $p \geq 1$ y $f \in L^p$. Entonces $\forall \epsilon > 0$

$$m\left(|f| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^p} ||f||_p^p$$

En particular, si $(f_n) \subset L^p$ es convergente L^p, entonces (f_n) es convergente en medida.

Solución

Por el recuerdo 2, se tiene que

$$m\left(|f| \geq \epsilon\right) = m\left(|f|^p \geq \epsilon^p\right) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\int_X |f|^p = \frac{1}{\epsilon^p} ||f||_p^p$$

y, por lo tanto, si (f_n) es Cauchy en L^p, entonces

$$m\left(|f_n - f_m| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^p} ||f_n - f_m||_p^p \overset{m,n\to\infty}{\longmapsto} 0$$

lo que muestra que (f_n) es cauchy en L^0. Análogamente, se concluye que para el caso L^p.

Ejercicio 2

Suponga que (f_n) es $L^0 - Cauchy$. Entonces existe una subsucesión $g_j := f_{n_j}$ de (f_n) tal que $\lim g_j := f$ existe ctp y $f_n \overset{m}{\to} f$ cuando $n \to \infty$. M´as aún, si g es medible y $f_n \overset{m}{\to} g$ cuando $n \to \infty$, entonces $f = g$ ctp.

Solución

Sea $\epsilon_n > 0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \infty$ y sea $\delta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \epsilon_k$. Elíjase $g_j = f_{n_j}$ tal que (n_j) es subsuecesión de $\mathbb{N}$ y

$$m\left(\{|g_{j+1} - g_j| > \epsilon_j\}\right) \leq \epsilon_j$$

Sean $E_j = \{|g_{j+1} - g_j| > \epsilon_j\}$, $F_N = \bigcup_{j=N}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=N}^{\infty} \{|g_{j+1} - g_j| > \epsilon_j\}$ y $E := \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N$.

Note que, cuando $N \to \infty$,

$$m(E) \leq \sum_{j=N}^{\infty} m(E_j) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \epsilon_j = \delta_N \to 0$$

de donde $m(E) = 0$. Ahora, si $x \notin F_N$, entonces

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} g_j(x) \quad \text{existe}$$

y para $j \geq N$,

$$|f(x) - g_j(x)| \leq \delta_j$$

Así, como $E^c = \bigcup_{N=1}^{\infty} F_N^c$, $\lim_{j \to \infty} g_j(x) = f(x)$ existe para $x \notin E$. Más aún, para $j \geq N$,

$$\{x : |f(x) - g_j(x)| > \delta_j\} \subset F_j$$

y, por lo tanto, cuando $j \to \infty$,

$$m(|f - g_j| > \delta_j) \leq m(F_j) \leq \delta_j \to 0$$

Así, $g_j \overset{m}{\to} f$ cuando $j \to \infty$.

Como $\{|f_n - f| > \epsilon\} \subset \{|f - g_j| > \epsilon/2\} \bigcup \{|g_j - f_n| > \epsilon/2\}$,

$$m\left(\{|f_n - f| > \epsilon\}\right) \leq m\left(\{|f - g_j| > \epsilon/2\}\right) + m\left(|g_j - f_n| > \epsilon/2\right)$$

y cuando $n \to \infty$

$$m\left(\{|f_n - f| > \epsilon\}\right) \leq \limsup_{j \to \infty} m\left(|g_j - f_n| > \epsilon/2\right) \to 0$$

Así, si existe una función g tal que $f_n \overset{m}{\to} g$ cuando $n \to \infty$, entonces cuando $n \to \infty$

$$m(|f - g| > \epsilon) \leq m\left(\{|f - f_n| > \epsilon/2\}\right) + m\left(|g - f_n| > \epsilon/2\right) \to 0$$

Luego

$$m(|f - g| > 0) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f - g| > 1/n\}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(|f - g| > 1/n) = 0$$

Es decir, $f = g$ ctp.

Ejercicio 3

Suponga que $0 < p_0 < p_1$ .Sea $\lambda \in (0,1)$ y defina $p_\lambda \in (p_0, p_1)$ mediante

$$\frac{1}{p_\lambda} = \frac{1-\lambda}{p_0} + \frac{\lambda}{p_1}$$

Entonces $L^{p_0} \bigcap L^{p_1} \subset L^{p_\lambda}$ y

$$||f||_{p_\lambda} \leq ||f||_{p_0}^{\lambda} ||f||_{p_1}^{1-\lambda}$$

Además, asuma $1 \leq p_0 < p_\lambda < p_1$ y, para $f \in L^{p_0} \bigcap L^{p_1}$, sea

$$||f|| := ||f||_{p_0} + ||f||_{p_1}$$

Entonces $(L^{p_0} \bigcap L^{p_1}, ||\cdot||)$ es espacio de Banach.

Solución

Sea $a = \dfrac{p_0}{\lambda}$, $b = \dfrac{p_1}{(1-\lambda)}$. Por el Recuerdo 1, se tiene

$$||f||_{p_\lambda} = \left|\left||f|^{\lambda} |f|^{1-\lambda}\right|\right|_{p_\lambda} \leq \left|\left||f|^{\lambda}\right|\right|_a \left|\left||f|^{1-\lambda}\right|\right|_b = ||f||_{p_0}^{\lambda} ||f||_{p_1}^{1-\lambda}$$

Ahora, veamos que $L^{p_0} \bigcap L^{p_1}$ es completo. Sea (f_n) sucesión de Cauchy en $L^{p_0} \bigcap L^{p_1}$. Entonces (f_n) es de Cauchy en L^{p_0} y en L^{p_1}. Así, existen $f \in L^{p_0}$ y $g \in L^{p_1}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_{p_0} = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} ||g - f_n||_{p_\lambda} = 0$$

Por el ejercicio 1, $f_n \to f$ y $f_n \to g$ en medida y, por el ejercicio 2, $f = g$ ctp. Así,

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n|| = 0$$