Ayudantía 27 nov

November 27, 2018

Ejercicio

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ medible. Sea (φ_n) sucesi´on de funciones medibles con dominio com´un A tales que $|\varphi_n| \leq 2015$ y $\varphi_n \to \varphi$ ctp. Sean $(\psi_n) \in L^p(A)$ sucesi´on tal que, en $L^p(A)$, $\psi_n \to \psi$

$a)$ Muestre que si $m(A) < \infty$ entonces $\psi_n \varphi_n \to \psi\varphi$ en $L^p(A)$

$b)$ Muestre que lo anterior es válido para $A = \mathbb{R}$.

Solución

Observaciones previas:

* Del hecho $\psi_n \to \psi$ en $L^p(A)$, dado ϵ_1, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$

$$||\psi_n - \psi|| = \left(\int_A |\psi_n - \psi|^p\right)^{1/p} < \epsilon_1$$

* Note que: como $L^p(A)$ es completo, entonces $\psi \in L^p(A)$. Además, note que como $\psi \in L^p(A)$, entonces $\int_A |\psi|^p < \infty$, de donde $|\psi|^p \in L^1(A)$. Denotaremos $M := \int_A |\psi|^p$.

* Por continuidad absoluta de la integral, dado ϵ_2, $\exists\delta > 0$ tal que $m(B) < \delta$ implica

$$\int_B |\psi|^p < \epsilon_2$$

* Como $|\varphi_n(x)| \leq 2015$ ctp y $\varphi_n \to \varphi$ ctp, entonces

$$|\varphi(x)| \leq 2015 \quad ctp$$

Solución parte $a)$

* Por Egorov, considerando el δ anterior, se tiene que $\exists S \subseteq A$ tal que $\varphi_n \overset{u}{\to} \varphi$ en S y $m(A \setminus S) < \delta$. Así, dado ϵ_3, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$

$$|\varphi_n - \varphi| < \epsilon_3 \quad en\ S$$

Ahora, sea $N = max\{n_1, n_2\}$. Para $n \geq N$,

* Por Minkowski

$$\begin{aligned} ||\psi_n\varphi_n - \psi\varphi||_p &= ||\psi_n\varphi_n - \psi\varphi_n + \psi\varphi_n - \psi\varphi||_p \\ &\leq ||\psi_n\varphi_n - \psi\varphi_n||_p + ||\varphi_n\psi - \psi\varphi||_p \end{aligned}$$

Ahora, note que

$$\begin{aligned}
||\psi_n\varphi_n - \psi\varphi_n||_p + ||\varphi_n\psi - \psi\varphi||_p &= \left(\int_A |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi_n|^p\right)^{1/p} + \left(\int_A |\varphi_n\psi - \psi\varphi|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_A |\psi_n - \psi|^p |\varphi_n|^p\right)^{1/p} + \left(\int_S |\varphi_n - \varphi|^p |\psi|^p + \int_{A\setminus S} |\varphi_n - \varphi|^p |\psi|^p\right)^{1/p} \\
&\leq 2015\left(\int_A |\psi_n - \psi|^p\right)^{1/p} + \left(\int_S |\psi|^p \cdot \epsilon_3 + 2\cdot 2015^p \int_{A\setminus S} |\psi|^p\right) \\
&\leq 2015\cdot\epsilon_1 + \left(M\cdot\epsilon_3 + 2\cdot 2015^p\epsilon_2\right)^{1/p} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Es decir, $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N$, $||\psi_n - \varphi - \psi\varphi||_p < \epsilon$.

Solución parte $b)$

Para $A = \mathbb{R}$,

* De la completitud de $L^p(\mathbb{R})$, se tiene que $\psi \in L^p(\mathbb{R})$. Así, dado ϵ_0, existe $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto tal que

$$\int_{K^c} |\psi|^p < \epsilon_0$$

* Como $\psi_n \to \psi$ en $L^p(K^c)$, entonces $||\psi_n||_p \to ||\psi||_p$ en $\mathbb{R}$, de donde

$$||\psi_n||_p^p \to ||\psi||_p^p \qquad \text{en } \mathbb{R}$$

Así, dado ϵ_1, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$,

$$\left| ||\psi_n||_p^p - ||\psi||_p^p \right| < \epsilon_1$$

de donde

$$-\epsilon_1 < ||\psi_n||_p^p - ||\psi||_p^p < \epsilon_1$$

Luego

$$\int_{K^c} |\psi_n|^p < \epsilon_1 + \int_{K^c} |\psi|^p \leq \epsilon_1 + \epsilon_0$$

Ahora, en K, por la parte $a)$, dado ϵ_2, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_2$,

$$\int_K |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p < \epsilon_2$$

Así, tómese $N = max\{n_1, n_2\}$. Para $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
||\psi_n\varphi_n - \psi\varphi||_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p \\
&= \int_K |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p + \int_{K^c} |\psi_n\varphi_n - \psi\varphi|^p \\
&\leq \epsilon_2 + 2^p\left(\int_{K^c} |\psi_n|^p |\varphi_n|^p + \int_{K^c} |\psi|^p |\varphi|^p\right) \\
&\leq \epsilon_2 + 2^p \cdot 2015^p(\epsilon_1 + \epsilon_0 + \epsilon_0) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $||\psi_n\varphi_n - \psi\varphi||_p^p \to 0$, de donde $||\psi_n\varphi_n - \psi\varphi||_p \to 0$.

Ejercicio

Sea $\phi \in L^1(\mathbb{R})$.

$a)$ Demuestre que existe una función x absolutamente continua al que

$$x' = \phi$$

y $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 2016$

$b)$ Muestre que la solución es única

Solución

Sea

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \phi(s)\, ds - \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s)\, ds + 2016$$

Como $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $m(A) < \delta$ implica

$$\int_A |\phi| < \epsilon$$

Note que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(s)\, ds - \int_{\mathbb{R}} \phi(s)\, ds + 2016 = 2016$$

Ahora, sea $\{I_i\}_{i=1}^n$ colección de intervalos tales que $\sum\limits_{i=1}^{n} l(I_i) < \delta$

Denótese por $(a_i, b_i) = I_i$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |x(a_i) - x(b_i)| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{a_i}^{b_i} \phi(s)\, ds \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} |\phi(s)|\, ds \\
&= \int_{\bigcup I_i} |\phi(s)\, ds| < \epsilon
\end{aligned}$$

Es decir, x es absolutamente continua.

$b)$ Si y es otra solución, considere $\varphi = x - y$. Note que φ es AC. Además, $\varphi' = x' - y' = 0$, de donde φ es constante. Por otro lado, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi = 0$, luego $\varphi = 0$.

Ejercicio

Suponga que $f_i : X \to \mathbb{R}$ son funciones medible par $i = 1, \ldots, n$ y sean $p_1, \ldots, p_n$ y r reales positivos tales que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} = r^{-1}$$

Muestre que

$$\left|\left| \prod_{i=1}^{n} f_i \right|\right| \leq \prod_{i=1}^{n} ||f_i||_{p_i}$$

Solución

* Por inducción, partimos con el caso $n = 2$

Para todo $p \in [1, \infty]$, por Holder,

$$||fg||_r^r = \int_X |f|^r |g|^r \leq ||f^r||_p \, ||g^r||_q$$

donde $q = \dfrac{p}{p-1}$. Sea $p_1 = pr$ y $p_2 = qr$ de forma que $p_1^{-1} + p_2^{-1} = r^{-1}$. Así, la ecuación anterior queda

$$||fg||_r \leq ||f||_{p_1} \, ||g||_{p_2}$$

* Vemos el caso general: para $n+1$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \left|\left|\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right|\right|_r &= \left|\left|\prod_{i=1}^{n} f_i \cdot f_{n+1}\right|\right|_r \\ &\leq \left|\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\right|\right|_q ||f_{n+1}||_{p_{n+1}} \end{aligned}$$

donde $q^{-1} + p_{n+1}^{-1} = r^{-1}$. Como $\sum_{i=1}^{n} p_i^{-1} = q^{-1}$, usamos la HI para concluir que

$$\left|\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\right|\right|_q \leq \prod_{i=1}^{n} ||f_i||_{p_i}$$

y con eso se concluye.