Ayudantía 23 nov

November 23, 2018

Ejercicio

Sean $f_n \to f$ ctp en $\mathbb{R}$. Suponga que existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall B \subseteq \mathbb{R}$

$$\int_B |f_n| \leq \int_B |g| + \epsilon$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f$$

Solución

Sea $\epsilon > 0$. Sea $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{8}$. Como $g \in L^1(\mathbb{R})$, entonces existe K copacto tal que

$$\int_{K^c} |g| < \epsilon_1$$

Sea $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{8}$. Como $|g| \in L^1(\mathbb{R})$, existe $\delta > 0$ tal que $m(S) < \delta \implies \int_S |g| < \epsilon_2$

Considerando $\delta > 0$, como mK es finita y $f_n \to f$ ctp, por el Teorema de Egorov existe $P \subseteq K$ tal que

$f_n \overset{u}{\to} f$ en P, con $m(K \setminus P) < \delta$.

Así, considerando $\epsilon_3 = \frac{\epsilon}{m(P) \cdot 4}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_1$, $|f_n - f| < \epsilon_3$.

Sea $\epsilon_4 = \frac{\epsilon}{16}$. Por la hipótesis, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall B \subseteq \mathbb{R}$

$$\int_B |f_n| \leq \int_B |g| + \epsilon_4$$

Note que esto implica que

$$\underline{\lim} \int_B |f_n| \leq \int_B |g| + \epsilon_4$$

Como $f_n \to f$ ctp y $|\cdot|$ es continua, entonces $|f_n| \to |f|$ ctp. Además, $|f_n| \geq 0$; Así, por Fatou,

$$\int_B |f| \leq \underline{\lim} \int_B |f_n| < \int_B |g| + \epsilon_4$$

Con todo lo anterior, considerando $N = máx\{n_0, n_1\}$, se tiene que para $n \geq N$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}} f_n - f\right| &\leq \int_K |f_n - f| + \int_{K^c} |f_n - f| \\
&\leq \int_P |f_n - f| + \int_{K\setminus P} |f_n - f| + \int_{K^c} |f_n - f| \\
&\leq \int_P \epsilon_3 + \int_{K\setminus P} |f_n| + \int_{K\setminus P} |f| + \int_{K^c} |f_n| + \int_{K^c} |f| \\
&\leq mP \cdot \epsilon_3 + 2\left(\int_{K\setminus P} |g| + \epsilon_4\right) + 2\left(\int_{K^c} |g| + \epsilon_4\right) \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sean $f_n \to f$ ctp en $A \subseteq \mathbb{R}$ con $||f_n||_{2015} \leq 2016$. Suponga que $\forall \epsilon > 0$, existe $C \subseteq \mathbb{R}$ de medida finita tal que

$$\int_{C^c} |f_n| < \epsilon$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$$

Solución

Sea $p_1 = 2015,\ p_2 = 2016$

Dado $\epsilon_1 = \dfrac{\epsilon}{6}$, existe $C \subseteq \mathbb{R}$ de medida finita tal que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_{C^c} |f_n| < \epsilon_1$$

Dado $S \subseteq A$, con mS finita, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_S |f_n| &\leq \left(\int_S |f_n|^{p_1}\right)^{1/p_1} \left(\int_S 1\right)^{(p_1-1)/p_1} \\
&\leq \left(\int_A |f_n|^{p_1}\right)^{1/p_1} (mS)^{(p_1-1)/p_1} \\
&= ||f_n||_{p_1} \cdot (mS)^{(p_1-1)/p_1} \\
&\leq p_2 \cdot (mS)^{(p_1-1)/p_1}
\end{aligned}$$

de donde

$$\underline{\lim} \int_S |f_n| \leq p_2 \cdot m(S)^{(p_1-1)/p_1}$$

Como mC es finita, dado $\delta = \dfrac{\epsilon^{p_1/(p_1-1)}}{2\cdot 3\cdot p_2}$, existe $P \subseteq C$ tal que $f_n \xrightarrow{u} f$ en P con $m(C \setminus P) < \delta$

Como $f_n \xrightarrow{u} f$ en P, entonces dados $\epsilon_2 = \dfrac{\epsilon}{3mP}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0\ |f_n - f| < \epsilon_2$ en P

Como $f_n \to f$ ctp y $|\cdot|$es continua, entonces $|f_n| \to |f|$ ctp, con $|f_n| \geq 0$, luego por Fatou, $\forall B \subseteq C$,

$$\int_B |f| \leq \underline{\lim} \int_B |f_n|$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{C^c} |f_n| < \epsilon_1$, entonces

$$\underline{\lim} \int_{C^c} |f_n| < \epsilon_1$$

Con todo lo anterior, para $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_A f_n - f \right| &\leq \int_C |f_n - f| + \int_{C^c} |f_n - f| \\
&\leq \int_{C \setminus P} |f_n - f| + \int_P |f_n - f| + \int_{C^c} |f_n - f| \\
&\leq \int_{C \setminus P} |f_n| + \int_{C \setminus P} |f| + \int_P \epsilon_2 + \int_{C^c} |f_n| + \int_{C^c} |f| \\
&\leq 2 \cdot p_2 \cdot m\left(C \setminus P\right)^{(p_1 - 1)/p_1} + \epsilon_2 \cdot mP + 2\epsilon_1 \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea $f \in L_p(X, \mathbb{C}) \bigcap L_q(X, \mathbb{C})$, con $1 \leq p \leq q$ y sea $r \in (p, q)$. Pruebe que si $\theta \in (0, 1)$ es tal que

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{(1 - \theta)}{q}$$

entonces

$$||f||_r \leq ||f||_p^\theta \, ||f||_q^{1-\theta}$$

Note que, en particular, esto muestra que $L^p(X) \bigcap L^1(X) \subseteq L^r(X)$, para todo $r \in [p, q]$

Luego, use lo anterior para demostrar que $\forall \epsilon > 0$, existe una constante $c > 0$ tal que

$$||f||_r \leq \epsilon \, ||f||_p + c \, ||f||_q$$

Solución

De las hipótesis,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p/\theta} + \frac{1}{q/(1-\theta)}$$

Luego, por definición de las normas L^p,

$$\begin{aligned}
||f||_r &= \left|\left| |f|^\theta \, |f|^{1-\theta} \right|\right| \\
&\leq \left|\left| |f|^\theta \right|\right|_{p/\theta} \left|\left| |f|^{1-\theta} \right|\right|_{q/1-\theta} \\
&= ||f||_p^\theta \, ||f||_q^{1-\theta}
\end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Para la segunda parte, usaremos la desigualdad de Young en la forma: si $s, t \geq 0$ y $\theta \in (0, 1)$, entonces

$$st \leq \theta t^{1/\theta} + (1 - \theta) \, s^{1/(1-\theta)}$$

Así, sea $\epsilon > 0$. Aplicaremos la desiguladad de Young a la obtenida previamente:

$$\begin{aligned}
||f||_r &\leq ||f||_p^\theta \, ||f||_q^{1-\theta} \\
&= \left(\frac{\epsilon}{\theta} \, ||f||_p \right)^\theta \left(\left(\frac{\theta}{\epsilon} \right)^{\theta/(1-\theta)} ||f||_q \right)^{1-\theta} \\
&\leq \theta \cdot \frac{\epsilon}{\theta} \, ||f||_p + (1 - \theta) \left(\frac{\theta}{\epsilon} \right)^{\theta/(1-\theta)} ||f||_q \\
&= \epsilon \, ||f||_p + (1 - \theta) \left(\frac{\theta}{\epsilon} \right)^{\theta/(1-\theta)} ||f||_q
\end{aligned}$$

Luego eligiendo $c = (1-\theta)\left(\frac{\theta}{\epsilon}\right)^{\theta/(1-\theta)}$ se concluye.