Ayudantía 20 de Nov

November 20, 2018

Espacio L^p

Sea E medible. Se define

$$F^p(E)=\left\{f\,:\,E\to\mathbb{R}\mid\int_E|f|^p<\infty,\,f\,medible\right\}$$

En F^p, se define la relación $f\sim g\iff f=g\,ctp$. Al cuociente se le llama L^p y resulta un espacio de Bannach (normado y completo). Defínase, también

$$F^\infty(E)=\{f:E\to\mathbb{R}\mid f\,\text{medible y acotada ctp}\}$$

y $L^\infty(E)=F^\infty(E)/\sim$.

Recuerde que la norma se define por

$$||f||_p=\left(\int|f|^p\right)^{1/p}$$

$$||f||_\infty=\inf\{a\in\mathbb{R}\,:\,m(\{x\in X\,:\,|f(x)|\geq a\})=0\}$$

Ejercicios

Ejericio 1

Si $f\in L^p(\mathbb{R})$ entonces $\forall\epsilon>0$ existe $\tau\in\mathbb{N}$ tal que $\int_{[-\tau,\tau]^c}|f|^p<\epsilon$

Solución

Lo demostraremos para L^1 y, una vez hecho esto, se tiene que $f\in L^p\implies|f|^p\in L^1$ (se termina al final)

Veremos, entonces, que $f\in L^1(E)\implies\forall\epsilon>0,\exists\tau\in\mathbb{N},\int_{[-\tau,\tau]^c}|f|<\epsilon$

Para esto, veremos primero lo siguiente: (resultado para una función positiva)

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ tal que $\int_{\mathbb{R}}f<\infty$. Muestre que existe $i_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\{x||x|>i_0\}}f<\epsilon$$

En efecto:

Sean $A_i=[-(i+1),i]\bigcup[i,i+1]$, para $i\in\{0,1,\ldots\}$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}}f=\int_{\bigcup A_i}f$$

Definamos $B_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$ y sean $f_n = f \mid_{B_n}$. Note que $f_n \to f$ (puntualmente). Note que, como $f > 0$, se tiene que $f_n \leq f$; además, $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$ (integrable). Así, por TCD,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n &= \int_{\mathbb{R}} f \\ &= \int_{\bigcup A_i} f \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \int_{A_i} f\end{aligned}$$

Lo último porque es unión finita de medibles disjuntos CTP.

Como $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$, entonces $\sum_{i=0}^{\infty} \int_{A_i} f < \infty$, luego dado $\epsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=i_0}^{\infty} \int_{A_i} f < \epsilon$$

de donde

$$\int_{\{x||x|>i_0\}} f < \epsilon$$

Ahora, veremos que dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$. (Resultado para funci´on en L^1)

Entonces, $\int_{\mathbb{R}} f^+, \int_{\mathbb{R}} f^-$ son finitas. Luego:

$\exists i_1, \int_{\{x||x|>i_1\}} f^+ < \epsilon/2$ y $\exists i_2, \int_{\{x||x|>i_2\}} f^- < \epsilon/2$. Tomando $i = max\{i_1, i_2\}$, se conclujye que

$$\int_{\{x|x>i\}} |f| < \epsilon$$

Así, finalmente, si $f \in L^p$, entonces $|f|^p \in L^1$, luego $\forall \epsilon > 0$, $\exists \tau \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{[-\tau,\tau]^c} |f|^p < \epsilon$$

Recuerdo

Si $f \in L^p$, entonces $\int_E |f|^p = \sup\left\{\int_E \varphi \mid \varphi \text{ simple de soporte compacto(finito) y } \varphi < |f|^p\right\}$

Ejercicio 3

Demuestre que si $f \in L^p(E)$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $B \subseteq E$ de medida finita tal que

$$\int_{E \setminus B} |f|^p < \epsilon$$

Solución

Recuerde que

$$\int_E |f|^p = \sup\left\{\int_E \varphi, \varphi \text{simple de soporte finito y } \varphi \leq |f|^p\right\}$$

Así, dado $\epsilon > 0$, existe φ de soporte finito (digamos B) tal que $\varphi \leq |f|^p$ y

$$\int_E |f|^p - \varphi < \epsilon$$

Ahora, como $|f|^p - \varphi > 0$ y $E \setminus B \subseteq E$, entonces

$$\int_{E\setminus B} |f|^p - \varphi < \epsilon$$

Además, note que $\varphi\,|_{E\setminus B} = 0$, luego

$$\int_{E\setminus B} |f|^p = \int_{E\setminus B} |f|^p - \varphi + \int_{E\setminus B} \varphi < \epsilon$$

Ejercicio 4

Muestre que si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\forall t \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)$

$I)$ $f = \chi_E$, con E medible.

Se tiene que $\int_{\mathbb{R}} f = \int_{\mathbb{R}} \chi_E = mE = m(E-t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{E-t}$

Ahora, note que $\chi_{E-t}(x) = 1 \iff \chi_E(x+t) = 1$, por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{E-t}(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x+t) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)$$

$II)$ Para f simple, digamos $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$,

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x+t) &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x+t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_i}(x+t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_{\mathbb{R}} \chi_{A_i}(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)
\end{aligned}$$

$III)$ Para $f \geq 0$ medible

Recuerde que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x), \varphi \text{ simple de soporte finito y } \varphi(x) \leq f(x)\right\} \\
&= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x+t), \varphi \text{ simple de soporte finito y } \varphi(x+t) \leq f(x+t)\right\} \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)
\end{aligned}$$

$IV)$ Para $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f &= \int_{\mathbb{R}} f^{+}(x) - \int_{\mathbb{R}} f^{-}(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f^{+}(x+t) - \int_{\mathbb{R}} f^{-}(x+t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\end{aligned}$$

Observación: Tomando $g = f \cdot \chi_A$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x+t)$$

Luego

$$\begin{aligned}\int_{A} f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\cdot \chi_A(x+t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\cdot \chi_{A-t}(x)\\ &= \int_{A-t} f(x+t)\end{aligned}$$

Corolario: Si f es $T-$periódica, entonces

$$\int_{[0,nT]} f(x) = n\int_{[0,T]} f(x)$$

Ejercicio 5

Sea $g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ y $f \in L^{1}(\mathbb{R})$. Muestre que

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |g(x)(f(x+t)-f(x))| = 0$$

Solución

Como $g \in L^{\infty}(\mathbb{R})$, existe $M > 0$ tal que $|g(x)| < M$ ctp.

Como $f \in L^{1}(\mathbb{R})$, entonces existe h continua de soporte finito $[a,b]$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f-h| < \epsilon/3$$

de donde

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x+t)-h(x+t)| < \epsilon/3$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|f(x+t)-f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|f(x+t)-h(x+t)| + \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x)-f(x)| + \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x+t)-h(x)|\\ &= (*)\end{aligned}$$

Ahora, como h es continua, $\lim_{t\to 0} h(x+t)-h(x) = 0$.

Sea (t_n) sucesión que converge a cero. Sean

$$\varphi_n = |g(x)|\,|h(x+t_n) - h(x)|$$

Sea $r = máx\,|t_n|$. Note que $\varphi_n\ |_{[a-r,b+r]^c} = 0$. Denotemos por $K = [a-r, b+r]$. Como h es continua de soporte compacto, existe $N > 0$ tal que $|h| < N$. Luego

$$\begin{aligned} |\varphi_n| &= |g(x)|\,|h(x+t) - h(x)| \\ &\leq M \cdot 2N < \infty \end{aligned}$$

Es decir, φ_n son uniformemente acotadas en K (de medida finita). Luego, por el TCA

$$\lim_{n\to\infty} \int_K \varphi_n = 0$$

pues $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = 0$.

Y como $\int_{K^c} \varphi_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n = 0$.

Así, $\exists \delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x+t) - h(x)| < \epsilon/3$.

Por lo tanto, para $|t| < \delta$, se tiene que

$$(*) < \epsilon$$

y se concluye que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,|h(x+t) - h(x)| = 0$$

Ejercicio 6

1. Muestre que $\left|\int_{[o,n]\times[0,\infty)} e^{-y^2} cos(xy)\right| < \infty$
2. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \int_0^n \int_0^\infty e^{-y^2} cos(xy)\, dy dx$

Solución

1. Sea $f(x,y) = e^{-y^2} cos(xy)$. Note que $|f(x,y)| \leq e^{-y^2}$ y

$$\int_{[0,n]\times\mathbb{R}^+} |f(x,y)|\,(dxdy) \leq \int_{[0,n]\times\mathbb{R}^+} e^{-y^2} = (*)$$

Ahora, considere la función

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} \chi_{[0,n]\times[i,i+1]}(x,y)$$

Note que $e^{-y^2} \leq \varphi(x,y)$

Además, considere

$$\varphi_k(x,y) = \sum_{i=0}^{k} e^{-i^2} \chi_{[0,n]\times[i,i+1]}(x,y)$$

Note que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x,y) = \varphi(x,y)$ y que $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$. Así, por TCM

$$\begin{aligned} \int_{[0,n]\times[0,\infty)} \varphi(x,y) &= \lim_{k\to\infty} \int_{[0,n]\times[0,\infty)} \varphi_k(x,y) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} \cdot n \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(*) \leq n \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i^2} < \infty$$

Así,

$$\left| \int_{[o,n]\times[0,\infty)} f(x,y) \right| < \infty$$

2. Ahora, sea $u_n = \dfrac{1}{n} \int_0^n \int_0^\infty e^{-y^2} cos\,(xy)\, dydx$

Por Fubini

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} \int_0^\infty \left(\int_0^n e^{-y^2} cos\,(xy)\, dx \right) dy \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-y^2} \left(\int_0^n cos\,(xy)\, dx \right) dy \end{aligned}$$

Ahora, $R \int_0^n cos\,(xy)\, dx = \dfrac{sen\,(xy)}{y} \,|_0^n = \dfrac{sen\,(yn)}{y}$. Por lo tanto,

$$u_n = \int_0^\infty e^{-y^2} \frac{sen\,(yn)}{y \cdot n} dy$$

Sean $\phi_n(y) = e^{-y^2} \cdot \dfrac{sen\,(yn)}{yn}$. Note que $\phi_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, note que para n suf. grande,

$$\left| \frac{sen\,(yn)}{yn} \right| \leq 1$$

de donde $|\phi_n(y)| \leq e^{-y^2}$ y esta última función es integrable. Así, por TCD

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \phi_n = 0$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$