

Ayudantía 12

Martes 11 de Diciembre del 2018

1. Sea $T : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función contractiva. ¿Será cierto que $2T$ también es contractiva?, ¿y Lipschitziana?.

2. Pruebe que la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} -2y + z + 2 \\ -x - z + 6 \\ -x + y - z + 5 \end{bmatrix}$$

tiene un único punto fijo, y determínelo.

3. Considere el problema de valores iniciales

$$y_1' = y_2^2 + 1, \quad y_2' = y_1^2, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.$$

- (a) Reescriba este problema como un sistema $\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y})$, $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$.
- (b) Muestre que la función $\vec{f}$ encontrada satisface las hipótesis del teorema de existencia local. Calcule una cota M y una constante de Lipschitz K para $\vec{f}$, y un radio de convergencia α para las aproximaciones sucesivas de $\vec{f}$.
- (c) Calcule las primeras tres aproximaciones sucesivas $\vec{\varphi}_0, \vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2$

4. Considere el sistema

$$y_1' = 3y_1 + ty_3, \quad y_2' = y_2 + t^3y_3, \quad y_3' = 2ty_1 - y_2 + e^t y_3$$

Muestre que todo problema de valor inicial para este sistema tiene una solución única que existe para todo $t \in \mathbb{R}$.

5. Use el método de las aproximaciones sucesivas para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = 0$$

con $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

Problemas Propuestos 12

1. Sean $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ y sea $f : \mathbb{R} \setminus \{-D/C\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D}$$

Determine (si existen) condiciones sobre las constantes A, B, C y D para que

- a) f no tenga puntos fijos.
 - b) f tenga un único punto fijo.
 - c) f tenga dos puntos fijos.
 - d) f tenga más de dos puntos fijos.
2. Encuentre los puntos fijos del problema anterior (para cada caso).
3. Encuentre los puntos fijos de la función $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x + 3y - 4z \\ 6x - 3y - 2z \\ -x + 3y - z \end{bmatrix}$$

4. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que f_n es Lipschitziana de constante L_n , ¿será cierto que f es Lipschitziana?
5. Encuentre una sucesión de funciones contractivas $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que converja puntualmente a una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ no contractiva.
6. Considere los sistemas

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + \epsilon y_2, & y_2' &= \epsilon y_1 + y_2 \\ y_1' &= y_1, & y_2' &= y_2 \end{aligned}$$

donde ϵ es una constante positiva.

- (a) Muestre que todo problema de valor inicial para estas ecuaciones tiene soluciones definidas en todo $t \in \mathbb{R}$.
- (b) Encuentre las soluciones $\vec{\varphi}$ y $\vec{\psi}$ del primer y segundo sistema respectivamente, con las condiciones iniciales $\vec{\varphi}(0) = \vec{\psi}(0) = (1, -1)$
- (c) Pruebe que

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| \rightarrow 0, \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$