

Ayudantía 10

Martes 27 de Noviembre del 2018

En esta ayudantía trabajaremos con la ecuación diferencial $x'' + a_1x' + a_0x = 0$, donde $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$.

1. Sea L el operador definido por $L[x](t) = x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t)$. Con esto, podemos reescribir nuestra ecuación diferencial como $L[x](t) = 0$.

a) Si $y(t) = e^{\lambda t}$, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, pruebe que $L[y](t) = p_L(\lambda)f(t)$, donde $p_L(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$. (Al polinomio p_L lo llamamos **polinomio característico** de L)

b) Deduzca que $y(t)$ es solución de la ecuación diferencial si y sólo si λ es una raíz de p_L .

2. a) Pruebe que si p_L tiene dos raíces distintas λ_1, λ_2 , entonces las funciones $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ son soluciones de la ecuación diferencial.

b) Pruebe que las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes.

c) Utilice estos resultados para resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$.

3. a) Pruebe que si p_L tiene una única raíz λ , entonces $y_1(t) = e^{\lambda t}$ e $y_2(t) = te^{\lambda t}$ son soluciones de la ecuación diferencial.

Recordo: Si λ es una raíz de multiplicidad 2 de p_L , entonces $p'_L(\lambda) = 0$.

b) Pruebe que las funciones y_1 e y_2 son linealmente independientes.

c) Utilice estos resultados para resolver la ecuación diferencial $y'' = 0$. ¿Y si $y(0) = y'(0) = 1$?

4. Ahora supongamos que $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

a) Pruebe que si p_L tiene una raíz de la forma $\alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$, entonces $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ e $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ son soluciones de la ecuación diferencial.

Recordo: En este caso, necesariamente se cumplirá que la otra raíz es $\alpha - i\beta$.

b) Pruebe que y_1 e y_2 son linealmente independientes.

c) Muestre que $\alpha = -a_1/2$ y $\beta^2 = a_0 - (a_1^2/4)$.

d) Utilice estos resultados para resolver la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - y' - 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$

c) $y'' - 14y' + 53 = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4$

b) $y'' + 2y' + 1 = 0, y(0) = -3, y'(0) = 5$

d) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0$ (**Ejercicio**)