Curso: Ecuaciones Diferenciales
Profesor: Marius Mantoiu
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 9 (Sesión doble)

Miércoles 21 de Noviembre del 2018

1. Pruebe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \sqrt{|t|}$ no es localmente lipschitziana en $t_0 = 0$.

2. Pruebe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = t^2$ es Lipschitziana localmente, pero no lo es globalmente.

3. Pruebe que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(t,x) = t^2\cos(x)^2 + x\sin(t)^2$ es Lipschitziana en su segunda variable sobre el conjunto $S : [-1,1] \times \mathbb{R}$.

4. Considere el problema de valor inicial $x' = 1 + x^2, \quad x(0) = 0$.

   a) Resuelva la ecuación usando los métodos usuales. ¿Sobre qué intervalo existe?

   b) Muestre que las aproximaciones sucesivas $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...$ existen para todo real t.

   c) Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ para todo $|t| \leq 1/2$, donde φ es la solución encontrada en la parte a).
   Ayuda: Considere la función $f(t,x) = 1 + x^2$ definida en $R : |t| \leq 1/2, |x| \leq 1$.

5. Considere la sucesión $\varphi_n(t) = 2nte^{-nt^2}, \quad 0 \leq t \leq 1$.

   a) Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$.

   b) Muestre que $\displaystyle\int_0^1 2nte^{-nt^2}dt = 1 - e^{-n}$

   c) Concluya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi_n(t)dt \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)dt$.

6. Determine los valores de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que el problema de valor inicial satisfaga lo pedido:

   a) $tx' + 2x = 0, \quad x(a) = b$ no tiene solución.

   b) $(t-1)x' = (x-1)(x-2), \quad x(a) = b$ tiene una solución. Indique cuándo la solución no es única, y determine todas las soluciones en ese caso.

   c) $(t-1)x' = (x-1)(x-2), \quad x(a) = b$ no tiene solución.

7. Considere el problema de valor inicial $x' = x^{1/3} + t, \quad x(1) = 1$. Verifique si se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad. ¿Y si $x(1) = 0$?

8. Calcule la tercera función de la sucesión de aproximaciones sucesivas para el PVI

$$x_1' = -3x_2, \qquad x_2 = 5x_1$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2$$