Curso: Ecuaciones Diferenciales
Profesor: Marius Mantoiu
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Tarea 4

Instrucciones:

- Pueden resolverla en grupos de máximo tres personas.
- Fecha de entrega: Viernes 4 de Enero en la sala de Matemáticas.

1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdaderas demuéstrelas, en caso contrario justifique o muestre un contraejemplo. **(0.5 puntos c/u)**

   a) Para toda función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con crecimiento lineal, existe una función $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$.

   b) Sea $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función con crecimiento lineal en la segunda variable, y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función con crecimiento lineal, entonces $f \circ g := f(\cdot, g)$ posee crecimiento lineal en la segunda variable.

   c) Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, existe una función (no identicamente nula) tal que $x'(t) = t^{2018}x(t) + 2sen(x(t))$ y $x(t_0) = 0$.

   d) Sean $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T, \psi = (\psi_1, \psi_2)^T$ funciones linealmente independientes, entonces la matriz $M = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{pmatrix}$ es invertible.

2. La idea de este problema es reducir un sistema acoplado $x' = Ax$ a un sistema desacoplado $y' = By$ (para facilitar su resolución) mediante la diagonalización de alguna matriz, en nuestro caso, la matriz A (en caso de ser esta diagonalizable claro)

   Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si los autovalores de A son todos distintos (por ende A es diagonalizable). Sea P la matriz invertible tal que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]$ con λ_i autovalores de A, entonces:

   a) Sabiendo que el sistema $x' = Ax$ es acoplado, haga el cambio $y = P^{-1}x$ para obtener un nuevo sistema de la forma $y' = P^{-1}APy$. Concluya que este nuevo sistema es desacoplado. **(0.5 puntos)**

   b) Pruebe que el sistema tiene por solución $y'(t) = \mathrm{Diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]y(t_0)$. **(0.5 puntos)**

   c) Pruebe que la solución al sistema $x' = Ax$ viene dada por $x'(t) = PE(t)P^{-1}x(t_0)$ con $E(t) = \mathrm{Diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]$. **(0.5 puntos)**

   d) Resuelva el siguiente sistema lineal **(0.5 puntos)**

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 3x_2 \\ x_2' &= 2x_2 \end{aligned}$$

3. Aquí se presentan algunas propiedades útiles para el cálculo de la exponencial de una matriz, i.e, métodos para calcular e^A.

   a) Si P y T son tranformaciones lineales sobre $\mathbb{R}^n$ con $S = PTP^{-1}$. Pruebe que $e^S = Pe^T P^{-1}$. **(0.8 puntos)**

   b) Si $P^{-1}AP = \text{Diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]$ entonces $e^{At} = P\text{Diag}[e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t}]P^{-1}$. **(0.2 puntos)**

   c) Si $P^{-1}AP = \text{Diag}[\lambda_1, ..., \lambda_n]$. Pruebe que $\det e^A = e^{\text{traza} A}$. **(0.5 puntos)**

   d) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ entonces $e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A modo de aplicación, muestre algún sistema en donde use esta propiedad para calcular la solución correspondiente. **(0.5 puntos)**