Curso: Ecuaciones Diferenciales
Profesor: Marius Mantoiu
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Tarea 3

Instrucciones:

- Pueden resolverla en grupos de máximo tres personas.
- Fecha de entrega: Miércoles 26 de Diciembre en la sala de Matemáticas.

1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdaderas demuéstrelas, en caso contrario justifique o muestre un contraejemplo. **(0.5 puntos c/u)**

   a) El conjunto $K(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es contractiva}\}$ es un $\mathbb{R}-$subespacio vectorial de $L(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ es lipschitziana}\}$ (con suma usual y producto por escalar).

   b) Considere el conjunto $C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$, entonces para cada $\varphi \in C(\mathbb{R})$ existe $B \subset \mathbb{R}$ tal que $\varphi|_B$ es contractiva.

   c) Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones lipschitzianas de constantes M_n. Si $f_n(x) \to f(x)$ entonces f es lipschitziana de constante L, donde $L > |M_n|$.

   d) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$) y una función $f : \mathbb{R} - \{b\} \to \mathbb{R}$ definida por

   $$f(x) = \frac{x+a}{x-b}$$

   entonces f siempre tiene un único punto fijo.

2. Considere el P.V.I $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

   a) Pruebe que el sistema tiene solución unica en cierto intervalo I. **(0.5 puntos)**

   b) Deduzca una ecuación integral a partir de la ecuacón diferencial dada. **(0.5 puntos)**

   c) Use la ecuación integral encontrada en b) para calcular las primeras aproximaciones sucesivas. **(0.5 puntos)**

   d) Resuelva la ecuación. **(0.5 puntos)**

3. Utilice el principio de contracción para mostrar el Teorema de Cauchy-Lipschitz. **(2.0 puntos)**