GUIA 9

1. Muestra que existen dos contracciones $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S + T$ no es una contracción.
2. Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tienen crecimiento lineal, fg puede no tener crecimiento lineal en la segunda variable.
3. Sean $A : I \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$ y $b : I \to \mathbb{R}^n$ funciones continuas. Entonces el problema de Cauchy para la ecuación
$$x' = A(t)x + b(t)$$
tiene las propiedades de existencia global y unicidad global. Para conseguir el resultado, muestre que la función $f(t, x) := A(t)x + b(t)$
   - es continua,
   - es localmente de Lipschitz en la segunda variable,
   - crece linealmente a lo más.
4. Sean $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ y
$$A : (\alpha, \beta) \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)\,, \quad b : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$$
funciones continuas.Se supone que el conjunto de todas las soluciones globales de la ecuación diferencial
$$x' = A(t)x + b(t)$$
es un espacio vectorial. Se debe mostrar que $b(t) = 0$ para cada t.
5. La aplicación
$$\exp(\cdot) : \mathbb{L}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$$
tiene las siguientes propiedades:
   - $\exp(0) = I_n$.
   - Si $A \cdot B = B \cdot A$ entonces $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.
   - $\exists\,(\exp A)^{-1} = \exp(-A) \quad \forall A \in \mathbb{L}(\mathbb{R}^n)$.

6. Recordemos la noción de *traza de una aplicación lineal*:

   Si $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, entonces la traza es definida por la relación

   $$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   Mostrar las propiedades de la traza $Tr : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$:

   - Tr es lineal.
   - $Tr(BC) = Tr(CB)$.
   - Si S es una matriz invertible, entonces

     $$Tr(B) = Tr(SBS^{-1}).$$

7. Mostrar que $\exp\left[\mathrm{diag}(\lambda, \mu)\right] = \mathrm{diag}\left[\mathrm{e}^{\lambda}, e^{\mu}\right]$ para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.