GUIA 8

1. Si $f, g : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tienen crecimiento lineal en la segunda variable, entonces $f+g$ tiene crecimiento lineal en la segunda variable.

2. Sean $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones con crecimiento lineal. Qué se puede decir de la función $b \circ a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $(b \circ a)(x) := b[a(x)]$?

3. Dar muchos ejemplos de funciones $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ no derivables (en algunos puntos) con crecimiento lineal.

4. Dar muchos ejemplos de funciones $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derivables, con derivada no acotada y con crecimiento lineal.

5. Sean E un espacio normado y F un espacio normado completo (de Banach). Entonces $\mathbb{L}(E, F)$ es un espacio normado completo.

6. Sea φ una solución global de la ecuación diferencial lineal

$$x' = A(t)x, \qquad A : (-1,1) \to \mathbb{L}(\mathbb{R}^n) \quad \text{función continua}$$

   tal que $\varphi(1/2) = 0$. Mostrar que $\varphi(-6) = 0$.

7. Mostrar que las siguientes ecuaciones diferenciales definidas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tienen las propiedades de existencia y unicidad *globales*:

$$x' = t^2 x + 2\cos x\,,$$

$$x' + e^t x \cos x = 0\,,$$

$$x' = \frac{x}{x^2+1} + t\,.$$

8. Sean $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ soluciones de la ecuación diferencial lineal $x' = A(t)x$ en $I \times \mathbb{R}^n$.

   Supongamos que existen $t_1, t_2 \in I$ tal que $W(t_1; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \geq 0$ y $W(t_2; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) \leq 0$. Entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ no es un sistema fundamental de soluciones.

9. Dar tres ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales en $(-1,1) \times \mathbb{R}^3$ tal que para cada sistema fundamental de soluciones, el wronskiano asociado sea independiente del tiempo.