# GUIA 7

1. Sea $u : (1,\infty) \to (0,\infty)$ una función derivable satisfaciendo la desigualdad
$$u'(t) \leq \frac{u(t)}{t}, \qquad \forall\, t \in (1,\infty).$$
Mostrar que se cumple tambien
$$2u(7) \leq 7u(2)\,.$$

2. Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

   Mostrar que $\varphi$ es solución del problema de Cauchy
$$x^{(n)} = F(t,x), \qquad x(t_0) = y_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$
si $\varphi$ cumple la ecuación integral
$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k (t-t_0)^k}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} ds\,(t-s)^{n-1} F\left(s; \varphi(s), \ldots, \varphi^{(n-1)}(s)\right).$$

3. Mostrar que los siguentes problemas de Cauchy tienen una unica solución en un entorno de $t = 0$:
$$x'' - 2tx' = txe^{|x|}, \quad x(0) = 5, \quad x'(0) = 8,$$
$$x''' = 2\cos(tx')x'' - 2e^{-t^2}x, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 6, \quad x''(0) = 10^{10}.$$

4. Cada función lineal $S$ tiene a menos un punto fijo.

5. Todos los elementos de $\mathcal{B}$ son puntos fijos de la función $S$. Quién es $S$?

6. Contar el número de puntos fijos de la función
$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad S(\varphi) := a\varphi^2 + (b+1)\varphi + c$$
en función de los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$.

7. Si $T$ no es una contracción, $T$ puede tener muchos puntos fijos o ninguno.

8. Utilisar el Principio de la Contracción para mostrar el Teorema de Cauchy-Lipschitz.

9. Sean $S, T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ dos funciones contractivas en un espacio de Banach. Qué se puede decir sobre $S + T$ y $T \circ S$?