GUIA 6

1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f, g : A \to \mathbb{R}^n$ dos funciones.

   (a) Mostrar que si f, g son localmente de Lipschitz, entonces $f \cdot g$ es también localmente de Lipschitz.

   (b) Mostrar que f, g pueden ser funciones de Lipschitz sin que $f \cdot g$ sea función de Lipschitz.

2. El conjunto de todas las funciones de Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real.

3. Buscar los puntos $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ donde no se puede aplicar el Teorema de Cauchy - Lischitz para el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x_1' = x_2^2 + t^{1/3},$$

$$x_2' = x_1^{1/3}.$$

4. Buscar los puntos $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ donde no se puede aplicar el Teorema de Cauchy-Lipschitz para la ecuación diferencial

$$x' = t^{1/3} + x^{1/3}.$$

5. Mostrar que el problema de Cauchy en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$x' = |\operatorname{sen}(x)|,$$

$$x(t_0) = x_0$$

   tiene las propiedades de existencia y unicidad locales.

6. Calcular la tercera función de la sucesión de aproximaciones sucesivas para el problema de Cauchy

$$x_1 = -x_2, \qquad x_1(0) = 1,$$

$$x_2' = x_1^2, \qquad x_2(0) = 2.$$

7. Calcular todas las funciones φ_k de la sucesión de aproximaciones sucesivas para el problema de Cauchy en $D = \mathbb{R}^2$

$$x' = x, \qquad x(0) = 1.$$

   Verificar que la sucesión converge a la solución, uniformemente en $[-T, T]$, para cada $T > 0$.

8. A veces, el Lema de Gronwall se reformula:

   La solución de la inecuación diferencial es dominada por la solución de la ecuación diferencial.

   Porque?

9. Sea $u : (0, \infty) \to R_+$ una función derivable tal que

$$u'(t) \leq u(t), \quad \forall\, t > 0.$$

   Mostrar que

$$u(t) \leq u(1)e^{t-1}, \quad \forall\, t \geq 1.$$

10. Sea $u : (1, \infty) \to (0, \infty)$ una función derivable satisfaciendo la desigualdad

$$u'(t) \leq \frac{u(t)}{t}, \quad \forall\, t \in (1, \infty).$$

   Mostrar que se cumple tambien

$$2u(7) \leq 7u(2)\,.$$

11. Mostrar que el problema de Cauchy

$$x' = x^{3/4},$$
$$x(0) = 0,$$

   tiene dos soluciones.

12. Estudiar las soluciones de la ecuación diferencial

$$x' = x^{1/3} + a$$

   para cada valor de $a \in \mathbb{R}$.

13. Determinar los puntos en los cuales no se puede aplicar el Teorema Cauchy-Lipschitz por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} x' = y^3\sqrt{|x-1|} + \ln(t+1) \\ y' = \frac{\sqrt[3]{y-1}}{x} \end{cases}$$

14. Determinar un intervalo de definición de las soluciones, calcular la tercera función de la sucesión de las aproximaciones sucesivas por los siguientes problemas de Cauchy:

   a) $x' = t + e^x, \;\; x(1) = 1;$

   b) $\begin{cases} x' = \frac{t}{y}, & x(0) = 1 \\ y' = -\frac{t}{x}, & y(0) = 1 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} x' = -y^2, & x(0) = 3 \\ y' = xy, & y(0) = 2 \end{cases}$