Curso: Ecuaciones Diferenciales
Profesor: Marius Mantoiu
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 7

Martes 12 de Noviembre del 2018

1. Considere el problema de valor inicial

$$x' = 3x + 1, \qquad x(0) = 2.$$

   a) Muestre que todas las aproximaciones sucesivas $\phi_0, \phi_1, ...$ existen para todo $t \in \mathbb{R}$.

   b) Calcule las primeras cuatro aproximaciones $\phi_0, ..., \phi_3$ a la solución.

   c) Resuelva la ecuación utilizando los métodos conocidos.

   d) Compare los resultados de las partes b y c (Exprese la solución encontrada en serie de potencias).

2. Sean $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ y $a, b > 0$. Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo $|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$ y sea $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua tal que f_y existe en todo R y además cumple

$$|f_y(x, y)| \leq K \quad \forall (x, y) \in R, \quad \text{para algún } K > 0$$

   Pruebe que f es de Lipschitz de constante K, con respecto a su segunda variable.

3. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2|y|$.

   a) Muestre que f es de Lipschitz con respecto a su segunda variable sobre el rectángulo R : $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

   b) Muestre que f_y no existe en $(x, 0)$ si $x \neq 0$.

4. Sea $f : (-1, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \dfrac{\cos(y)}{1 - x^2}$.

   a) Pruebe que f es Lipschitz con respecto a su segunda variable sobre cada tira $S_a : |x| \leq a$, donde $a \in (0, 1)$

   b) Muestre que todo problema de valor inicial

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = y_0, \quad (|y_0| < \infty)$$

   tiene una solución que existe para $|x| < 1$.

Propuestos 7

1. Para cada uno de los siguientes problemas, calcule las primeras cuatro aproximaciones sucesivas $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$:

   a) $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$

   b) $y' = y^2, \quad y(0) = 0$

   c) $y' = 1 + xy, \quad y(0) = 1$

   d) $y' = y^2, \quad y(0) = 1$

2. Encuentre una solución para el problema de valor inicial de la parte d) del problema anterior. ¿Sobre qué intervalo esta existe? Suponiendo que existe solo una solución de esa ecuación, expliqué por qué las aproximaciones sucesivas encontradas no pueden converger a una solución para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \sqrt{y}$.

   a) Muestre que la función f no es de Lipschitz con respecto a su segunda variable sobre el rectángulo $R : |x| \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$.

   b) Muestre que la función f sí es de Lipschitz con respecto a su segunda variable sobre cualquier rectángulo de la forma $R : |x| \leq a, \quad b \leq y \leq c, \quad (a, b, c > 0)$