

GUIA 5

1. Mostrar que

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

2. Mostrar que la propiedad de una función F de ser continua no depende de las selecciones equivalentes de normas.
3. Mostrar que la composición de dos funciones de Lipschitz es una función de Lipschitz.
4. Mostrar que

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := x^2$$

es localmente una función de Lipschitz, sin ser (globalmente) una función de Lipschitz.

5. Determinar los valores del parametro a por los cuales, la función siguiente es localmente de Lipschitz en el segundo argumento sobre todo el dominio de definición.

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t, x) = \sqrt[3]{t} + |x|^a.$$

6. Mostrar que la función

$$F : (-1, 1) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := |x|^{1/3}$$

es una función continua, pero no es una función de Lipschitz en $x_0 = 0$.

7. Mostrar que f es localmente de Lipschitz en la segunda variable
sss satisface la propiedad aparentemente más débil:

Cada $(t_0, x_0) \in D$ tiene un entorno V tal que

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L \|y - x\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in V$$

para un constante $L > 0$.

8. Dar un ejemplo de función continua que no es uniformemente continua.

9. Mostrar que: (a) La convergencia uniforme se puede escribir

$$\|g_j - g\|_\infty \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

utilizando la norma

$$\|h\|_\infty := \sup_{x \in M} \|h(x)\|.$$

(b) La convergencia uniforme implica la convergencia simple.

(c) Dar un ejemplo de sucesión de funciones simplemente convergente que no converge uniformemente.

10. Mostrar por un ejemplo, que una sucesión de funciones continuas puede converger simplemente a una función discontinua.

11. Sea $(\psi_j : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m)_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas, uniformemente convergente a la función (continua) ψ .

Mostrar que la convergencia simple no basta para tener la siguiente conclusión:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b dt \psi_j(t) = \int_a^b dt \psi(t).$$