Curso: Ecuaciones Diferenciales
Profesor: Marius Mantoiu
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Tarea 2

Instrucciones:

- Pueden resolverla en grupos de máximo tres personas.
- Fecha de entrega: Viernes 9 de Noviembre en la sala de Matemáticas.

1. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. En caso de ser verdaderas demuéstrelas, en caso contrario justifique o muestre un contraejemplo. **(0.5 puntos c/u)**

   a) Toda función $\mu : B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es factor integrante de alguna ecuación diferencial no exacta.

   b) Si la ecuación diferencial
   $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
   NO es exacta en $B \subset \mathbb{R}^2$, entonces siempre existe una función $\mu : B \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de primer orden tal que $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y}(\overline{x}) = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x}(\overline{x})$ con $\overline{x} \in B$.

   c) Si la ecuación diferencial
   $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$
   NO es exacta en $B \subset \mathbb{R}^2$. Suponga que el conjunto de factores integrantes K de (1) es no trivial (i.e distinto de $\{$ función nula $\}$), entonces para $\mu_1, \mu_2 \in K$ tenemos que $\mu_1 + \mu_2 \in K$.

   d) Si el conjunto K de factores integrantes para cierta ecuación diferencial no exacta es no trivial, entonces K es no numerable.

2. Dada la ecuación diferencial
   $$M(x.y)dx + N(x,y)dy = 0$$
   Suponga que esta no es exacta en $B \subset \mathbb{R}^2$ y que $\mu : B \to \mathbb{R}$ es un factor integrante.

   a) **(0.5 puntos)** Pruebe que μ satisface la ecuación.
   $$N \cdot \frac{\partial(\ln(\mu))}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial(\ln(\mu))}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

   b) **(0.5 puntos)** Suponga que $\mu(x,y) = g(x)$ donde g es una función real. Pruebe que
   $$\mu(x,y) = g(x) = e^{\int \left(\frac{1}{N} \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right] \right)(x)dx}$$

c) **(0.5 puntos)** Suponga que $\mu(x, y) = f(xy)$ donde f es una función real. Pruebe que

$$\mu(x, y) = f(z) = e^{\int \left(\frac{1}{yN - xM}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\right)(z)dz}$$

d) **(0.5 puntos)** Suponga que $\mu(x, y) = h(x^2 + y^2)$ donde h es una función real. Pruebe que

$$\mu(x, y) = h(z) = e^{\int \left(\frac{1}{2xN - 2yM}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\right)(z)dz}$$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales. **(0.5 puntos c/u)**

$$\begin{aligned}
(2y - 3x)dx + xdy &= 0 \\
(y + x^3y + 2x^2)dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)dy &= 0 \\
(x - x^2 - y^2)dx + ydy &= 0 \\
(xy - 2y^2)dx - (x^2 - 3xy)dy &= 0
\end{aligned}$$