Ayudantía VII: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En esta ayudantía estudiaremos la ecuación del factor integrante y veremos algunos casos en que es directo (bajo ciertas condiciones) encontrar el factor integrante.

Problema 1: Suponga que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

no es exacta en $B \subset \mathbb{R}^2$, y que $\mu : B \to \mathbb{R}$ es un factor integrante nu nulo de dicha ecuación, entonces

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = N \cdot \frac{\partial(\ln(\mu))}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial(\ln(\mu))}{\partial y}$$

Solución: Basta con trabajar un poco la igualdad $\frac{\partial(\mu M}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ (¿Por qué esto es cierto?) para que se desprenda que $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\left(N \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \cdot \frac{\partial \mu}{\partial y}\right)$ y concluir. ■

Problema 2: Suponga que la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

no es exacta en $B \subset \mathbb{R}^2$, y que $\mu : B \to \mathbb{R}$ es un factor integrante tal que $\mu(x,y) = f(y)$ con f una función real. Pruebe que

$$\mu(x,y) = f(y) = e^{e^{\int \left(-\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right]\right)(y)dy}}$$

Solución: Usando la ecuación del factor integrante obtenida en el P1 tenemos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -M \cdot \cdot \frac{\partial(\ln(\mu))}{\partial y}$$

multiplicando por $-\frac{1}{M}$ a ambos lados de la igualdad, integrando respecto a y y exponenciando se obtiene lo pedido. ■

Ejercicio: Determine bajo que condiciones la ecuación diferencial no exacta $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tiene por factor integrante $\mu(x,y) = h(x^2 + y^2)$ con h una función real. Use lo obtenido para verificar que la ecuación $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$ tiene un factor integrante de la forma $h(x^2 + y^2)$ con h función real.