Ayudantía IV: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En esta ayudantía terminaremos con los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales resolviendo un par de ecuaciones del tipo Ecuaciones Exactas y Ecuaciones de Bernoulli.

Problema 1: Resuelva la ecuación:

$$y'(x) = -\frac{3x^2 + 6x[y(x)]^2}{4[y(x)]^3 + 6x^2 y(x)}$$

o vista de manera usual:

$$y' = -\frac{3x^2 + 6xy^2}{4y^3 + 6x^2 y}$$

Solución: La ecuación dada equivale a

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$$

de esto, al considerar las funciones $M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2$ y $N(x,y) = 6x^2 y + 4y^3$ tenemos que $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 12xy = \frac{\partial N}{x}(x,y)$ por lo que la ecuación dada es exacta. Ahora, haciendo $\mu(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$ se tiene que $\frac{\partial \mu}{\partial y}(x,y) = 6x^2 y + g'(y)$ y como $N(x,y) = 6x^2 y + 4y^3$ se sigue que $g(y) = y^4$ y así $\mu(x,y) = x^3 + 3x^2 y^2 + 4y^4$ por lo que las curvas soluciones $(x, y(x))$ satisfacen $x^3 + 3x^2 y^2 + 4y^4 = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Problema 2: Considere la ecuación

$$y(1 + xy)dx - xdx = 0$$

a) Pruebe que la ecuación NO es exacta.

b) Pruebe que la función $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to \frac{1}{y^2}$ es un factor integrante de la ecuación dada.

c) Verificado lo anterior, resuelva la ecuación.

Solución:

a) Tomando las funciones $M(x,y) = y(1 + xy)$ y $N(x,y) = -x$ se tiene que $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 1 + 2xy \neq -1 = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Luego la ecuación no es exacta. ■

b) Al considerar $\overline{M}(x,y) = \frac{1}{y^2} M(x,y)$ y $\overline{N}(x,y) = \frac{1}{y^2} N(x,y)$ tenemos que $\frac{\partial \overline{M}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}(x,y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, por lo que μ es un factor integrante de la ecuación dada. ■

c) Repita lo que se hizo en el P1 :)

Problema 3: Pruebe que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n$$

se reduce a resolver una ecuación lineal mediante el cambio $z = y^{1-n}$.

Solución: Note que al efectual el cambio sugerido, $z' = (1-n)y^{-n}y'$ por lo que $\frac{z'y^n}{(1-n)} = y'$ así la ecuación dada equivale a $\frac{z'}{(1-n)} + p(x)z = f(x)$ o bien a $z' = (n-1)p(x)z + (1-n)f(x)$ que es lineal. ■

Ejercicios

Ejercicio 1:

a) Pruebe que la ecuación $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ NO es exacta.

b) Verifique que $\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)(x, y)$ es una función que depende sólo de x (digamos f), y que $\mu(x, y) = e^{\int f(x)dx}$ es un factor integrante de la ecuación dada.

c) Resuelva la ecuación.

Ejercicio 2: Repita lo mismo que en el ejercicio anterior pero con

$$\left(\frac{y}{x}\right) dx + (y^3 - \ln(x))dy = 0$$

Ejercicio 3:

a) Pruebe que la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$ es una ecuación del tipo Bernoulli.

b) Haga el cambio respectivo y resuelva la ecuación lineal que se obtiene.