Curso: Ecuaciones Diferenciales
Profesor: Marius Mantoiu
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 4

Martes 23 de Octubre del 2018

1. Encuentre un factor integrante de la forma $\mu(x)$ o $\mu(y)$ en las siguientes ecuaciones diferenciales, y luego resuélvalas:

   a) $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$

   b) $y(1 + xy)dx - xdy = 0$

   c) $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

2. Resuelva el problema de valores iniciales

$$y' = \frac{x + y^2}{2y}, \qquad y(0) = 1$$

   y determine el intervalo máximal donde está definida la solución.

3. Demuestre que $\mu(x, y) = xy^2$ es el factor integrante de la ecuación diferencial

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0$$

   Use este factor integrante para resolver la ecuación.

4. Considere una raza de conejos cuya población $P(t)$ satisface el problema de valores iniciales

$$P' = kP^2, \quad k > 0$$

   Si inicialmente había a conejos y después de t_0 meses existen b conejos, describa el número de conejos en el tiempo.

Propuestos 4

1. Demuestre que la ecuación diferencial $(x^2y^3)dx + x(1+y^2)dy = 0$ no es exacta, y que la función $\mu(x,y) = (xy^3)^{-1}$ es un factor integrante.

2. Resuelva la ecuación diferencial $(7x^4y - 3y^8)dx + (2x^5 - 9xy^7)dy = 0$ sabiendo que existe un factor integrante de la forma $x^m y^n$.

3. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$(y\ln(y) - 2xy)dx + (x + y^3e^y)dy = 0$$

4. Determine las condiciones bajo las cuales la ecuación $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = h(x+y)$.

5. Un embrión puede considerarse como una población de células que se multiplican, aumentando así paulatinamente de tamaño en el tiempo. Se ha observado que para un cierto tipo de embrión, las células se multiplican a un ritmo que decrece exponencialmente con el tiempo. Es decir, si y es el tamaño del embrión, entonces

$$y' = \beta e^{-\alpha t} y$$

donde α y β son constantes positivas.

a) Encuentre la solución general $y(t)$ de la ecuación diferencial.

b) Si el tamaño inicial es $y_0 > 0$, encuentre la función $y(t)$ correspondiente y el tamaño límite del embrión cuando $t \to \infty$.

c) Si en $t = 1/\alpha$ el tamaño inicial se ha amplificado por un factor $K > 0$, muestre que el tamaño límite del embrión se amplifica por un factor $F = K^{\frac{e}{e-1}}$.

d) Se sabe que la falta de un nutriente reduce el crecimiento del embrión como (tome $\alpha = \beta = 1$):

$$y' = e^{-t}y - d(t)$$

donde $d(t) = y_0e^{-2t}$, con y_0 el tamaño inicial. Resuelva la ecuación y pruebe que la falta de ese nutriente reduce hasta en casi un 37 % el crecimiento límite del embrión: Utilice la aproximación $1/e = 0,368$.

6. Un modelo matemático para describir la población humana es $P' = aP - bP^2$, donde $a = 0,029$ y $b = 2,695 \cdot 10^{-12}$. ¿Cuántos habitantes llegará a tener la tierra según este modelo?