

Ayudantía III: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Esta ayudantía tiene por objetivo discutir preguntas acerca de la materia ya vista (al menos la vista en ayudantía) de manera grupal o individual.

Ejercicio 1: Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demuéstrelas, en caso contrario muestre un contraejemplo.

1. Todo problema de valor inicial (i.e de Cauchy) tiene una **única** solución.
2. Si tenemos dos soluciones distintas a un problema de Cauchy, digamos φ y ψ entonces $\varphi + \psi$ y $c\varphi$ con $c \in \mathbb{R}$ son también una solución al problema de Cauchy.
3. Si a_2, a_3 son funciones continuas sobre algún intervalo I . La ecuación $a_3(t)x'''(t) + a_2(t)x''(t) = 0$ admite una **infinidad** de soluciones.
4. Dada la ecuación $x'(t) = kx(t)$ con $k \in \mathbb{R}$. Suponga que φ es una solución de esta ecuación, entonces φ es infinitamente diferenciable. Aquí se asume que usted NO sabe que la familia de soluciones es de la forma e^{ct} con $c \in \mathbb{R}$.
5. Toda función diferenciable es solución a alguna ecuación diferencial.

Solución:

1. **Falso.** El contraejemplo es la ecuación 2 que aparece en el ejercicio 2 de la ayudantía 1 y obviamente agregarle una condición inicial adecuada.
2. **Falso.** Mismo contraejemplo anterior.
3. **Verdadero.** Combinaciones $\mathbb{R}$ –lineales del conjunto $\{1, t\}$ verifican la ecuación.
4. **Verdadero.** Al ser φ solución es fácil verificar que $\varphi^{(n)}(t) = k^n \varphi(t)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ de aquí se concluye.
5. **Verdadero.** Dada una función diferenciable φ el sistema $x'(t) - \varphi'(t) = 0$ admite por solución a φ .

Ejercicio 2: (*Ecuaciones lineales*) Este ejercicio tiene por objetivo resolver siguiente el problema de Cauchy.

$$\begin{aligned}x'(t) &= a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

donde a, b son funciones continuas sobre algún intervalo I .

- a) Suponga que existe una función c sobre I de manera que $x(t) = c(t) \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$ y **reescriba** el problema de Cauchy.
- b) Resuelva la ecuación obtenida (que por cierto es conocida) y realice los cambios respectivos para especificar la solución pedida.

Observación: Si $b \equiv 0$ tenemos el caso de una ecuación de variables separables u homogénea.

Ejercicio 3: Resuelva las siguientes ecuaciones:

$$\cos(t)x''(t) + \sin(t)x'(t) = e^t$$

$$2xy'(x) - 3y(x) = 4x^2$$

$$z'(x) = x^{2018}z(x) + e^x$$

$$x(t)x'(t) + t = 0$$

$$tx'(t) + x(t) = [x(t)]^2$$

$$x'(t) = \frac{2(x(t) + 2)}{t + x(t) - 1}$$

Nota: Para el Ejercicio 2 creo que no se requiere más información, pues está prácticamente hecho con las indicaciones, sí puede ser interesante EXPLICITAR la solución al sistema en terminos de $x(t)$ pues se usará para el siguiente ejercicio. Para el Ejercicio 3 notar que la primera columna de ecuaciones TIENEN LA FORMA DE **ECUACIONES LINEALES** por lo que es útil **IDENTIFICAR** los términos respectivos y explicitar la solución. Para la otra columna, notar que tienen la forma de VARIABLES SEPARABLES.