Curso: Ecuaciones Diferenciales
Profesor: Marius Mantoiu
Ayudantes: Fabián Hidalgo, Sebastián Rivera

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Ayudantía 2

Jueves 4 de Octubre del 2018

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

   a) $y' = 2xy^2$

   b) $2y' = y(y-2)x^2$

   c) $y' = e^x\sqrt{1-y^2}, \quad y(0) = 1/2$

   d) $3y^2y' = (1+y^3)\cos(x), \quad y(0) = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

   a) $3xy^2y' = 4y^3 - x^3$

   b) $xy' = y - xe^{y/x}$

3. Muestre que una ecuación de la forma $y' = F(ay + bx + c)$, con $a \neq 0$, se puede reescribir como una de variables separables bajo el cambio de variables $z(x) = ay(x) + bx + k$, donde k es cualquier número. Use este resultado para resolver la ecuación diferencial $y' = (y + 4x - 1)^2$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales de primer orden

   a) $(x+1)y' - y = x, \quad x > -1$

   b) $xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 4$

   c) $xy' + (x-2)y = 3x^3e^{-x}$

   d) $x\ln(x)y' + y = 2\ln(x)$

Propuestos 2

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

   a) $yy' = 4x, \quad y(1) = -3$

   b) $(1 + x^2)y' = 1 + y^2, \quad y(2) = -1$

   c) $(\cos(y))y' = 1$

   d) $x^2y' = xy - y^2$

   e) $xyy' = 2y^2 - x^2$

   f) $e^y y' = 4, \quad y(0) = 2$

   g) $7xy^2y' = 4y^3 - 9x^3$

   h) $y' = 5y - 2x$

   i) $(x - y)y' = x + y$

   j) $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$

   k) $(y - x + 1)y' = y - x$

   l) $(y - 3x)y' = 3(y - 3x + 2)$

   m) $xy' - 3y = x^3, \quad y(1) = 0$

   n) $y' - 2y = 4x, \quad y(0) = 1$

   ñ) $y' - 2xy = 1, \quad y(a) = b$

   o) $y' + \cos(x)y = \cos(x), y(\pi) = 0$

2. Muestre que una ecuación de la forma $y' = F\left(\dfrac{ax + by + c}{ex + fy + g}\right)$, con $af - be \neq 0$, se puede llevar a una ecuación de la forma del Problema 3 de esta ayudantía. ¿Y si $af = be$?

3. Use el problema anterior para resolver la ecuación $(2x + 3y + 5)y' = (3x - y + 1)$

4. Un isótopo radiactivo se desintegra a una tasa que es proporcional a la masa del isótopo presente.

   a) Si $x(t)$ representa la masa del isótopo al instante t, pruebe que $x(t) = x(0)e^{-kt}$.

   b) El tiempo T en el que la masa del isótopo se reduce a la mitad se denomina **vida media** del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5730 años, determine la masa restante del carbono 14 al cabo de t años, considerando que inicialmente la masa de la muestra era x_0.

   c) Los restos de una cesta encontrada en una cueva fueron analizados y se determinó que la proporción restante de carbono-14 fue de 0,3. ¿Durante cuánto tiempo la caverna fue usada por humanos?

5. Deduzca que la solución del problema de valor inicial

$$y' + p(x)y = q(x), \quad y(a) = b$$

   está dado por la fórmula

$$y = be^{-P(x)} + \int_a^x e^{-(P(x)-P(t))}q(t)dt,$$

   donde $P(x) = \displaystyle\int_a^x p(t)dt$

Soluciones Ayudantía 2

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

   a) $y' = 2xy^2$

   Solución: La ecuación se puede reescribir como $\dfrac{y'}{y^2} = 2x$. Integrando ambos lados de la ecuación respecto a x, y usando que $dy = y'dx$ (por cambio de variables), se tiene que

   $$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2xdx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}$$

   Si quisiéramos una solución tal que $y(0) = 1$, tendríamos que evaluar nuestra solución en la condición inicial para encontrar la constante C:

   $$y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{0 + C} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = -1$$

   Con esto, nuestra solución sería $y(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

   b) $2y' = y(y - 2)x^2$

   Solución: Separamos variables, obteniendo $\dfrac{2y'}{y(y-2)} = x^2$.

   Integrando respecto en dx a ambos lados, se llega a que $\displaystyle\int \frac{2dy}{y(y-2)} = \int x^2 dx$

   Mediante descomposición en fracciones parciales, se obtiene que $\dfrac{2}{y(y-2)} = \dfrac{1}{y-2} - \dfrac{1}{y}$. Luego:

   $$\int \left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y}\right) dy = \int x^2 dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y-2| - \ln|y| = \frac{1}{3}x^3 + C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = \frac{1}{3}x^3 + C$$

   $\Rightarrow \left|\dfrac{y-2}{y}\right| = e^{\frac{1}{3}x^3} e^C$. Tomando $K = \pm e^C$, se sigue que $\dfrac{y-2}{y} = Ke^{\frac{1}{3}x^3}$

   c) $y' = e^x\sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 1/2$

   d) $3y^2 y' = (1 + y^3)\cos(x), \quad y(0) = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

a) $3xy^2y' = 4y^3 - x^3$

Solución: Esta ecuación no es de variables separables, por lo que tendremos que aplicar otro método de resolución. Note que la ecuación es de la forma $N(x,y)y' = M(x,y)$, donde $N(x,y) = 3xy^2$ y $M(x,y) = 4y^3 - x^3$. Claramente estas funciones son homogéneas de grado 3. En efecto, se tiene que

- $M(kx,ky) = 4(ky)^3 - (kx)^3 = 4k^3y^3 - k^3x^3 = k^3(4y^3 - x^3) = k^3M(x,y)$

- $N(kx,ky) = 3(kx)(ky)^2 = k^3 \cdot 3xy^2 = k^3N(x,y)$.

Luego, podemos tomar el cambio de variables $y = vx$ para llevar la ecuación a una de variables separables. Reemplazando, se sigue que

$$\begin{aligned}
3x(vx)^2(vx)' = 4(vx)^3 - x^3 &\Rightarrow 3x^3v^2(v'x + v) = 4x^3v^3 - x^3 \\
&\Rightarrow 3x^4v^2v' + 3x^3v^3 = 4x^3v^3 - x^3 \\
&\Rightarrow 3x^4v^2v' = x^3(v^3 - 1) \\
&\Rightarrow 3xv^2v' = v^3 - 1, \text{ que es una ecuación de variables separables.} \\
&\Rightarrow \frac{3v^2v'}{v^3 - 1} = \frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \int \frac{3v^2}{v^3 - 1}dv = \int \frac{1}{x}dx \\
&\Rightarrow \ln|v^3 - 1| = \ln|x| + C, \text{ donde } C \in \mathbb{R}. \\
&\Rightarrow v^3 - 1 = \pm xe^C \\
&\Rightarrow v^3 = 1 + kx, \text{ donde } k = \pm e^C \in \mathbb{R}. \\
&\Rightarrow v = \sqrt[3]{1 + kx}
\end{aligned}$$

Usando nuevamente que $y = vx$, se concluye que $y(x) = x\sqrt[3]{1 + kx}$, con $k \in \mathbb{R}$.

b) $xy' = y - xe^{y/x}$

Solución: Esta ecuación no es de variables separables, pero se puede resolver de la misma forma que la anterior (se propone como ejercicio). Aquí lo haremos de una forma más directa. La ecuación se puede reescribir como $y' = \dfrac{y}{x} - e^{y/x} = f(y/x)$, lo que unos sugiere realizar el cambio de variables $v = y/x$ (es decir $y = vx$, mismo cambio de variables que en el problema anterior). Reemplazamos en la ecuación y obtenemos

$$
\begin{aligned}
(vx)' = v - e^v &\Rightarrow v'x + v = v - e^v \\
&\Rightarrow v'x = -e^v, \text{ que es una ecuación de variables separables.} \\
&\Rightarrow e^{-v}v' = -\frac{1}{x} \\
&\Rightarrow \int e^{-v}dv = -\int \frac{1}{x}dx \\
&\Rightarrow -e^{-v} = -\ln|x| + D, \text{ donde} D \in \mathbb{R}. \\
&\Rightarrow e^{-v} = \ln|x| + C \quad (C = -D) \\
&\Rightarrow -v = \ln(C + \ln|x|) \\
&\Rightarrow v = -\ln(C + \ln|x|)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $y(x) = -x\ln(C + \ln|x|)$

Pregunta: En el ejercicio (2a), ¿se puede escribir $y' = f(y/x)$ para alguna función f y luego resolverla de manera más directa? (Saltándose el paso de verificar que M y N son homogéneas).

3. Muestre que una ecuación de la forma $y' = F(ay + bx + c)$, con $a \neq 0$, se puede reescribir como una de variables separables bajo el cambio de variables $z(x) = ay(x) + bx + k$, donde k es cualquier número. Use este resultado para resolver la ecuación diferencial $y' = (y + 4x - 1)^2$.

   Solución: Consideremos el cambio de variables $z(x) = ay(x) + bx + k$, como se indica en el problema. Tomando derivadas, se obtiene que $z' = ay' + b$, lo que implica que $y' = (z' - b)/a$. Reemplazando en la ecuación, se llega a que

   $\dfrac{z' - b}{a} = F(z + c - k) \quad \Rightarrow \quad z' = aF(z + c - k) + b = G(z)$, que es de variables separables.

   Observación: Tomando $k = c$, es más evidente que este cambio de variables nos sirve

4. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales de primer orden

   a) $(x + 1)y' - y = x, \quad x > -1$

      Solución: La ecuación se puede reescribir como $y' - \dfrac{1}{x+1}y = \dfrac{x}{x+1}$. El factor integrante está dado por

      $$\mu(x) = \exp\left[\int -\frac{dx}{x+1}\right] = \exp(-\ln(|x+1|^{-1})) = |x+1| = x + 1 \text{ (puesto que } x > -1)$$

   b) $xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 4$

   c) $xy' + (x - 2)y = 3x^3e^{-x}$

   d) $x\ln(x)y' + y = 2\ln(x)$