Ayudantía II: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En esta ayudantía estudiaremos dos problemas de valor inicial (problema Cauchy) para luego comenzar con el estudio de ecuaciones que se pueden reducir a una ecuación de variables separables mediante algún cambio de variable adecuado.

Problema 1: Encuentre TODAS las soluciones al siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde f es una función continua que no se anula en su dominio (a,b) y $t \in \mathbb{R}$.

Solución: Considere la función $F : (a,b) \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(s)} ds$ la que cumple claramente que $F'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ por lo que F es invertible y F^{-1} está definida sobre cierto (c,d). Ahora, si φ es una solución al problema de Cauchy, tenemos que $F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = (F \circ \varphi)'(t) = 1$ integrando desde t_0 a t y aplicando F^{-1} tenemos $\varphi(t) = F^{-1}(t - t_0)$ con $t \in (c + t_0, d + t_0)$. La unicidad se sigue suponiendo que hay otra que no es de esta forma y llegar a lo mismo.

Ejemplo 1: Si quisiéramos resolver la ecuación $x'(t) = x(t)$ tenemos dos casos (el caso $x \equiv 0$ es claro) que se desprenden de $x(t) \neq 0$ para $t \in I$ donde I es cierto intervalo: $x(t) < 0$ y $0 < x(t)$ para todo t. Para el primer caso, si seguimos cuidadosamente los mismos pasos que en la demostración vemos que $x(t) = ke^t$ con $k \in \mathbb{R}^+$.

Ejemplo 2: Para resolver la ecuación $z'(x) = [\cos(z(x))]^2$, primero notemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$ la función constante $z(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ es solución, luego obtuvimos una familia infinita (numerable por cierto) de soluciones al problema. Ahora si $[\cos(z(x))]^2 \neq 0$ podemos escribir $\frac{z'(x)}{[\cos(z(x))]^2} = z'(x)[\sec(z(x))]^2 = 1$ y al calcular las primitivas respectivas tenemos que $\int \sec(z)dz = \int dx$ lo que equivale a $\tan(z(x)) = x + c$ donde c es una constante real.

Para resolver esta ecuación basta con aplicar $\tan^{-1}$ a ambos lados de la última igualdad obtenida siempre y cuando $z(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para $x \in I$ donde I es algún intervalo, pero al tener que la función tan es de período π la imagen de z debe estar en alguno de los intervalos de la forma $\left(-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, o sea, $z(x) - n\pi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Por lo que la solución no constante a la ecuación dada es $z(x) = n\pi + \arctan(x + c)$.

Ejercicio 1: Encuentre todas las soluciones negativas a la ecuación $x'(t) = x(t)$ con condición inicial $x(t_0) = x_0 < 0$ y esboce un par de soluciones en el plano $(t, x(t))$.

Ejercicio 2: Resuelva la ecuación $z'(x) = [\text{sen}(z(x)]^2$.

Hint: Puede ser útil saber que $\int [\text{cosec}(x)]^2 dx = -\text{cotg}(x) + c$.

Problema 2: *(Ecuaciones de variables separables)* Encuentre TODAS las soluciones al siguiente problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x'(t) &= g(t)f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

donde g y f son funciones continuas en intervalos (a,b) y (c,d) respectivamente y f no se anula en (c,d).

Solución: Procediendo de manera análoga como en el problema anterior, se tiene que $(F \circ \varphi)'(t) = g(t)$, por lo que $F(\varphi(t)) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds$ así $\varphi(t) = F^{-1}\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right)$ con $\int_{t_0}^{t} g(s)ds \in (c,d)$. La unicidad se concluye de igual manera que en el P1.

Ejercicio 3: Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales:

$$x'(t) = \frac{t^2+1}{2-2x(t)} \qquad\qquad y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

$$x(-3) = 4 \qquad\qquad y(1) = 2$$

Hint: Puede ser útil realizar los cambios $u(t) = 2 - 2x(t)$ y $v(x) = -\frac{x}{y(x)}$.

Problema 3: Considere las siguientes ecuaciones $z'(x) = f(ax + bz(x) + c)$ y $w'(x) = f\left(\frac{x}{w(x)}\right)$. Pruebe que haciendo los cambios $u(x) = ax + bz(x) + c$ y $v(x) = \frac{x}{w(x)}$ las ecuaciones anteriores se reducen a una ecuación del tipo variables separables.

Solución: Vaya fuerte y derecho nomáh!.

Ejercicio 4: Resuelva la ecuación $z'(x) = 3z(x) - x$.Pruebe que si estudiamos los sistemas con condición inicial $z(0) = \frac{1}{3}$ y $z(2018) = \frac{1}{3}$ obtenemos las soluciones triviales $z \equiv 0$. ¿Para que condiciones iniciales existe una solución no trivial? Justifique.